УДК 517.9

Н. А. БЫКОВ

ГЛАДКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ГРУБЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА ОКРУЖНОСТИ

Целью работы являются классификация грубых полей на окружности относительно гладкой (C^1) эквивалентности и построение нормальной формы таких полей.

Пусть $v = a(z)\,\partial/\partial z$ грубое векторное поле на S^1. Возможны два случая: $a(z) \neq 0$ для всех z их S^1; v имеет четное число гиперболических особых точек $z_1, \ldots, z_n$, $a'(z_i) = \lambda_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$, причем $\lambda_{i+1}/\lambda_i < 0$.

Обозначим множество грубых полей с фиксированными n особыми точками и значениями производных в этих точках через $C(H, \{z_i\}, \{\lambda_i\})$, где H отвечает за гладкость поля: $H = k \geqslant 2$ — поля класса $C^k(S^1)$; $H = \infty$ — поля из класса $C^\infty(S^1)$; $H = A$ — аналитические поля на S^1. Набор $\{\lambda_i\}$ является очевидным инвариантом гладкой сопряженности.

Теорема. *Отображение* $J : a(z)\,\partial/\partial z \to v.p.\int\limits_{S_1} dz/a(z)$, $J : C(H, \{z_i\}, \{\lambda_i\}) \to \boldsymbol{R}^1$ *сюръективно. Для эквивалентности двух полей из* $C(H, \{z_i\}, \{\lambda_i\})$ *в группе сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов окружности необходимо и достаточно, чтобы* $J(v_1) = J(v_2)$. *Если поля эквивалентны в классе* C^1, *то они эквивалентны и в классе* $C_k(H = k)$, *аналитически* $(H = A)$, $C^\infty(H = \infty)$. *Каждое поле из* $C(H, \{z_i\}, \{\lambda_i\})$ *эквивалентно в классе* C^1 *тригонометрическому полиному из фиксированного семейства* $P(\{z_i\}, \{\lambda_i\})$, *если два полинома из* $P(\{z\}, \{\lambda_i\})$ *эквивалентны в классе* C^1, *то они совпадают.*

Заметим, что и в случае $a(z) \neq 0$, $z \in S^1$ $J(v)$ является единственным инвариантом гладкой сопряженности. Каждое поле класса C^k (C^∞, аналитическое) сопряжено в том же классе гладкости с полем $b\,\partial/\partial z$, где константа b равна $2\pi/\int\limits_0^{2\pi} dz/a(z)$.

Доказательство. Ранее доказано* существование отображения $I : C(H, \{z_i\}, \{\lambda_i\}) \to \boldsymbol{R}^*$ такого, что а) сопряженность полей v_1 и v_2 в группе сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов окружности эквивалентна равенству $I(v_1) = I(v_2)$; б) I сюръективно в случае $H = k$, $H = \infty$; в) при $I(v_1) = I(v_2)$ поля v_1 и v_2 сопряжены в классе $C^k(H = k)$, $C^\infty(H = \infty)$ аналитически $(H = A)$.

Мы получим явный вид для инварианта $I(v)$, докажем сюръективность отображения I в случае $H = A$ и построим семейство простейших представителей в множестве $C\{H, z_i\}, \{\lambda\ j\}$.

Пусть $S^1 = [0;\ 2\pi]$, $z_1 = 0$, и точки z_i расположены в порядке

* *Белицкий Г. Р.* Классификация уравнений на окружности // Укр. мат. журн. 1988. *83*. С. 12—16.

возрастания, $z_{n+1} = z_1$, $\lambda_{n+1} = \lambda_1$. Обозначим дуги $]z_{i-1}; z_{i+1}[$ на S^1 через U_i. Положим

$$J(v) = v.p. \int\limits_{S^1} dz/a(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{z_i+\varepsilon}^{z_{i+1}-\varepsilon} dz/a(z). \tag{1}$$

Разбивая каждый интеграл в сумме на два точкой $a_i \in U_i \cap U_{i+1}$, убеждаемся, что $J(v)$ существует для каждого $v \in C(H, \{z_i\}, \{\lambda_i\})$ и вычисляется по формуле

$$J(v) = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{a_i}^{a_{i+1}} R_{i+1}(s)\, ds + \ln \frac{(a_1 - z_1)^{1/\lambda_1} \ldots (a_n - z_n)^{1/\lambda_n}}{(z_2 - a_1)^{1/\lambda_2} \ldots (z_1 - a_n)^{1/\lambda_{n+1}}}, \tag{2}$$

где $R_i(z) = 1/a(z) - 1/\lambda_i(z - z_i)$, $z \in U_i$.

Поле $a(z)\,\partial/\partial z$ на U_i имеет единственную гиперболическую особую точку z_i, поэтому существует диффеоморфизм

$$X_i(z),\ X_i: U_i \to \boldsymbol{R}^1,\ X_i(z_i) = 0,\ X_i(z) \xrightarrow[z \to z_{i+1}]{} +\infty,$$

такой, что $X_{i*}(v \mid U_i) = v_{\lambda_i}$, где v_{λ_i} линейное поле на $\boldsymbol{R}^1$. Например, $X_i(z)$ дается формулой

$$X_i(z) = (z - z_i) \exp\{\lambda_i \int\limits_{a_i}^{z} R_i(s)\, ds\},\ z \in U_i. \tag{3}$$

Здесь диффеоморфизм $X_i(z)$ имеет гладкость не меньшую, чем H.

Рассмотрим диффеоморфизмы $G_i: \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}^-$, $i = 1, \ldots, n$, $G_i(x) = (X_{i+1} \circ X_i^{-1})(x)$, $x \in \boldsymbol{R}^+$.

Для каждого i $G_i(x)$ сопрягает линейные поля v_{λ_i} на $\boldsymbol{R}^+$ и $v_{\lambda_{i+1}}$ — на $\boldsymbol{R}^-$. Поэтому $G_i(x) = -c_i x^{\nu_i}$, где $c_i \in \boldsymbol{R}^+$, $\nu_i = \lambda_{i+1}/\lambda_i$.

Вычислим константу c_i из соотношения

$$X_{i+1}(z) = -c_i (X_i(z))^{\nu_i},\ z \in U_i \cap U_{i+1}, \tag{4}$$

которое следует из определения $G_i(x)$. Поскольку

$$R_i(z) = R_{i+1}(z) + 1/\lambda_{i+1}(z - z_{i+1}) - 1/\lambda_i(z - z_i),\ z \in U_i \cap U_{i+1},$$

то

$$(X_i(z))^{\nu_i} = (z - z_i)^{\nu_i} \exp\{\nu_i \lambda_i (\int\limits_{a_i}^{z} R_{i+1}(s)\, ds +$$

$$+ \int\limits_{a_i}^{z} -ds/\lambda_{i+1}(z_{i+1} - s) - \int\limits_{a_i}^{z} ds/\lambda_i(s - z_i))\} = -(z - z_i)^{\nu_i} \times$$

$$\times (z - z_{i+1})(z - z_i)^{-\nu_i} \frac{(a_i - z_i)^{\nu_i}}{(z_{i+1} - a_i)} \exp\{\lambda_{i+1} \int\limits_{a_i}^{a_{i+1}} R_{i+1}(s)\, ds\} \times$$

$$\times \exp\{\lambda_{i+1} \int\limits_{a_{i+1}}^{z} R_{i+1}(s)\,ds\} = -(z - z_{i+1}) \times$$

$$\times \exp\left\{\lambda_{i+1} \int\limits_{a_{i+1}}^{z} R_{i+1}(s)\,ds\right\} \frac{(a_i - z_i)^{\nu_i}}{(z_{i+1} - a_i)} \times$$

$$\times \exp\{\lambda_{i+1} \int\limits_{a_i}^{a_{i+1}} R_{i+1}(s)\,ds\}.$$

Сравнивая с (3), находим

$$c_i = \frac{(a_i - z_i)^{\nu_i}}{(z_{i+1} - a_i)} \exp\{\lambda_{i+1} \int\limits_{a_i}^{a_{i+1}} R_{i+1}(s)\,ds\}. \tag{5}$$

Отображения $G_i(x)$ имеют смысл склеивающих наше поле на S^1 из линейных полей на прямой, и инвариант $I(v)$ был реализован в [1] в следующем виде:

$$I(v) = c_1 c_2^{1/\nu_2} \ldots c_i^{1/\nu_2 \ldots \nu_i} \ldots c_n^{1/\nu_2 \ldots \nu_n}. \tag{6}$$

Вычислим теперь $\exp\{\lambda_2 v.p. \int\limits_{S_1} dz/a(z)\}$, учитывая (2)

$$\exp\{\lambda_2 J(v)\} = \frac{(a_1 - z_1)^{\nu_1}}{(z_2 - a_1)} \exp\left\{\lambda_2 \int\limits_{a_1}^{a_2} R_2(s)\,ds\right\} \times$$

$$\times \cdots \frac{(a_n - z_n)^{\nu_n/\nu_2 \ldots \nu_n}}{(z_1 - a_n)^{1/\nu_2 \ldots \nu_n}} \exp\left\{\frac{\lambda_1}{\nu_2 \ldots \nu_n} \int\limits_{a_n}^{a_1} R_1(s)\,ds\right\}.$$

Сравнивая с (5) и (6), находим простую связь $I(v)$ и $J(v)$: $I(v) = \exp\{\lambda_2 J(v)\}$ (7).

Пусть теперь задан набор особенностей поля на $S^1 - \{z_i\}_{i=1}^n$, $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$. Построим семейство тригонометрических полиномов наименьшей степени, которое реализует любое вещественное J или, что эквивалентно, любое положительное I. Разобьем множество особых точек на пары сток-источник: $(z_1, z_2, \lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0), \ldots, (z_{n-1}, z_n, \lambda_{n-1} > 0, \lambda_n < 0)$, $z_1 < z_2 < \ldots < z_{n-1} < z_n$.

Положим $Q(z) = \prod\limits_{i=1}^{n/2} (\beta_i + \sin(z + \alpha_i)) = \prod\limits_{i=1}^{n/2} Q_i(z)$, где α_i, β_i выбраны так, что $Q_i(z_{2i-1}) = Q_i(z_{2i}) = 0$. При этом $Q'(z)\,|\,z_{2i-1}, z_{2i} = (\cos(z + \alpha_i) \prod\limits_{i \neq j} Q_j(z))\,|\,z_{2i-1}, z_{2i} \neq 0$, и знак $Q'(z)\,|\,z_{2i-1}, z_{2i}$ совпадает со знаком $\lambda_{2i-1}, \lambda_{2i}$.

Обозначим через γ_i числа $\lambda_i/Q'(z_i) > 0$, $i = 1, \ldots, n$ и через $L(z)$ полином степени $n/2$ такой, что $L(z) > 0$, $z \in S^1$, $L(z_i) = \gamma_i$. Положим $P_s(z) = Q(z)(L(z) + sQ(z))\partial/\partial z$.