УДК 517.9

Н. А. БЫКОВ

ГЛАДКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ГРУБЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА ОКРУЖНОСТИ

Целью работы являются классификация грубых полей на окружности относительно гладкой (C^1) эквивалентности и построение нормальной формы таких полей.

Пусть $v = a(z)\,\partial/\partial z$ грубое векторное поле на S^1. Возможны два случая: $a(z) \neq 0$ для всех z их S^1; v имеет четное число гиперболических особых точек $z_1, \ldots, z_n$, $a'(z_i) = \lambda_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$, причем $\lambda_{i+1}/\lambda_i < 0$.

Обозначим множество грубых полей с фиксированными n особыми точками и значениями производных в этих точках через $C(H, \{z_i\}, \{\lambda_i\})$, где H отвечает за гладкость поля: $H = k \geqslant 2$ — поля класса $C^k(S^1)$; $H = \infty$ — поля из класса $C^\infty(S^1)$; $H = A$ — аналитические поля на S^1. Набор $\{\lambda_i\}$ является очевидным инвариантом гладкой сопряженности.

Теорема. *Отображение* $J : a(z)\,\partial/\partial z \to v.p.\int\limits_{S_1} dz/a(z)$, $J : C(H, \{z_i\}, \{\lambda_i\}) \to \boldsymbol{R}^1$ *сюръективно. Для эквивалентности двух полей из* $C(H, \{z_i\}, \{\lambda_i\})$ *в группе сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов окружности необходимо и достаточно, чтобы* $J(v_1) = J(v_2)$. *Если поля эквивалентны в классе* C^1, *то они эквивалентны и в классе* $C_k(H = k)$, *аналитически* $(H = A)$, $C^\infty(H = \infty)$. *Каждое поле из* $C(H, \{z_i\}, \{\lambda_i\})$ *эквивалентно в классе* C^1 *тригонометрическому полиному из фиксированного семейства* $P(\{z_i\}, \{\lambda_i\})$, *если два полинома из* $P(\{z\}, \{\lambda_i\})$ *эквивалентны в классе* C^1, *то они совпадают.*

Заметим, что и в случае $a(z) \neq 0$, $z \in S^1$ $J(v)$ является единственным инвариантом гладкой сопряженности. Каждое поле класса C^k (C^∞, аналитическое) сопряжено в том же классе гладкости с полем $b\,\partial/\partial z$, где константа b равна $2\pi/\int\limits_0^{2\pi} dz/a(z)$.

Доказательство. Ранее доказано* существование отображения $I : C(H, \{z_i\}, \{\lambda_i\}) \to \boldsymbol{R}^*$ такого, что а) сопряженность полей v_1 и v_2 в группе сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов окружности эквивалентна равенству $I(v_1) = I(v_2)$; б) I сюръективно в случае $H = k$, $H = \infty$; в) при $I(v_1) = I(v_2)$ поля v_1 и v_2 сопряжены в классе $C^k(H = k)$, $C^\infty(H = \infty)$ аналитически $(H = A)$.

Мы получим явный вид для инварианта $I(v)$, докажем сюръективность отображения I в случае $H = A$ и построим семейство простейших представителей в множестве $C\{H, z_i\}, \{\lambda\,j\}$.

Пусть $S^1 = [0;\ 2\pi]$, $z_1 = 0$, и точки z_i расположены в порядке

* *Белицкий Г. Р.* Классификация уравнений на окружности // Укр. мат. журн. 1988. *83*. С. 12—16.

возрастания, $z_{n+1}=z_1$, $\lambda_{n+1}=\lambda_1$. Обозначим дуги $]z_{i-1};\ z_{i+1}[$ на S^1 через U_i. Положим

$$J(v)=v.p.\int_{S^1} dz/a(z)=\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=1}^{n}\int_{z_i+\varepsilon}^{z_{i+1}-\varepsilon} dz/a(z). \qquad (1)$$

Разбивая каждый интеграл в сумме на два точкой $a_i\in U_i\cap U_{i+1}$, убеждаемся, что $J(v)$ существует для каждого $v\in C(H,\{z_i\},\{\lambda_i\})$ и вычисляется по формуле

$$J(v)=\sum_{i=1}^{n}\int_{a_i}^{a_{i+1}} R_{i+1}(s)\,ds+\ln\frac{(a_1-z_1)^{1/\lambda_1}\dots(a_n-z_n)^{1/\lambda_n}}{(z_2-a_1)^{1/\lambda_2}\dots(z_1-a_n)^{1/\lambda_{n+1}}}, \qquad (2)$$

где $R_i(z)=1/a(z)-1/\lambda_i(z-z_i)$, $z\in U_i$.

Поле $a(z)\,\partial/\partial z$ на U_i имеет единственную гиперболическую особую точку z_i, поэтому существует диффеоморфизм

$$X_i(z),\ X_i:U_i\to \boldsymbol{R}^1,\ X_i(z_i)=0,\ X_i(z)\xrightarrow[z\to z_{i+1}]{}+\infty,$$

такой, что $X_{i*}(v\,|\,U_i)=v_{\lambda_i}$, где v_{λ_i} линейное поле на $\boldsymbol{R}^1$. Например, $X_i(z)$ дается формулой

$$X_i(z)=(z-z_i)\exp\{\lambda_i\int_{a_i}^{z} R_i(s)\,ds\},\ z\in U_i. \qquad (3)$$

Здесь диффеоморфизм $X_i(z)$ имеет гладкость не меньшую, чем H.

Рассмотрим диффеоморфизмы $G_i:\boldsymbol{R}^+\to\boldsymbol{R}^-$, $i=1,\dots,n$, $G_i(x)=(X_{i+1}\circ X_i^{-1})(x)$, $x\in\boldsymbol{R}^+$.

Для каждого i $G_i(x)$ сопрягает линейные поля v_{λ_i} на $\boldsymbol{R}^+$ и $v_{\lambda_{i+1}}$ — на $\boldsymbol{R}^-$. Поэтому $G_i(x)=-c_ix^{\nu_i}$, где $c_i\in\boldsymbol{R}^+$, $\nu_i=\lambda_{i+1}/\lambda_i$.

Вычислим константу c_i из соотношения

$$X_{i+1}(z)=-c_i(X_i(z))^{\nu_i},\ z\in U_i\cap U_{i+1}, \qquad (4)$$

которое следует из определения $G_i(x)$. Поскольку

$$R_i(z)=R_{i+1}(z)+1/\lambda_{i+1}(z-z_{i+1})-1/\lambda_i(z-z_i),\ z\in U_i\cap U_{i+1},$$

то

$$(X_i(z))^{\nu_i}=(z-z_i)^{\nu_i}\exp\{\nu_i\lambda_i(\int_{a_i}^{z} R_{i+1}(s)\,ds+$$

$$+\int_{a_i}^{z}-ds/\lambda_{i+1}(z_{i+1}-s)-\int_{a_i}^{z} ds/\lambda_i(s-z_i))\}=-(z-z_i)^{\nu_i}\times$$

$$\times(z-z_{i+1})(z-z_i)^{-\nu_i}\frac{(a_i-z_i)^{\nu_i}}{(z_{i+1}-a_i)}\exp\{\lambda_{i+1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} R_{i+1}(s)\,ds\}\times$$

$$\times \exp\{\lambda_{i+1} \int_{a_{i+1}}^{z} R_{i+1}(s)\, ds\} = -(z - z_{i+1}) \times$$

$$\times \exp\left\{\lambda_{i+1} \int_{a_{i+1}}^{z} R_{i+1}(s)\, ds\right\} \frac{(a_i - z_i)^{\nu_i}}{(z_{i+1} - a_i)} \times$$

$$\times \exp\{\lambda_{i+1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} R_{i+1}(s)\, ds\}.$$

Сравнивая с (3), находим

$$c_i = \frac{(a_i - z_i)^{\nu_i}}{(z_{i+1} - a_i)} \exp\{\lambda_{i+1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} R_{i+1}(s)\, ds\}. \tag{5}$$

Отображения $G_i(x)$ имеют смысл склеивающих наше поле на S^1 из линейных полей на прямой, и инвариант $I(v)$ был реализован в [1] в следующем виде:

$$I(v) = c_1 c_2^{1/\nu_2} \ldots c_i^{1/\nu_2 \ldots \nu_i} \ldots c_n^{1/\nu_2 \ldots \nu_n}. \tag{6}$$

Вычислим теперь $\exp\{\lambda_2 v.p. \int_{S_1} dz/a(z)\}$, учитывая (2)

$$\exp\{\lambda_2 J(v)\} = \frac{(a_1 - z_1)^{\nu_1}}{(z_2 - a_1)} \exp\left\{\lambda_2 \int_{a_1}^{a_2} R_2(s)\, ds\right\} \times$$

$$\times \cdots \frac{(a_n - z_n)^{\nu_n/\nu_2 \ldots \nu_n}}{(z_1 - a_n)^{1/\nu_2 \ldots \nu_n}} \exp\left\{\frac{\lambda_1}{\nu_2 \ldots \nu_n} \int_{a_n}^{a_1} R_1(s)\, ds\right\}.$$

Сравнивая с (5) и (6), находим простую связь $I(v)$ и $J(v)$: $I(v) = \exp\{\lambda_2 J(v)\}$ (7).

Пусть теперь задан набор особенностей поля на $S^1 - \{z_i\}_{i=1}^n$, $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$. Построим семейство тригонометрических полиномов наименьшей степени, которое реализует любое вещественное J или, что эквивалентно, любое положительное I. Разобьем множество особых точек на пары сток-источник: $(z_1, z_2, \lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0)$, $\ldots$, $(z_{n-1}, z_n, \lambda_{n-1} > 0, \lambda_n < 0)$, $z_1 < z_2 < \ldots < z_{n-1} < z_n$.

Положим $Q(z) = \prod_{i=1}^{n/2} (\beta_i + \sin(z + \alpha_i)) = \prod_{i=1}^{n/2} Q_i(z)$, где α_i, β_i выбраны так, что $Q_i(z_{2i-1}) = Q_i(z_{2i}) = 0$. При этом $Q'(z)\,|\,z_{2i-1},\ z_{2i} = (\cos(z + \alpha_i) \prod_{i \neq j} Q_j(z))\,|\,z_{2i-1},\ z_{2i} \neq 0$, и знак $Q'(z)\,|\,z_{2i-1},\ z_{2i}$ совпадает со знаком λ_{2i-1}, λ_{2i}.

Обозначим через γ_i числа $\lambda_i/Q'(z_i) > 0$, $i = 1, \ldots, n$ и через $L(z)$ полином степени $n/2$ такой, что $L(z) > 0$, $z \in S^1$, $L(z_i) = \gamma_i$. Положим $P_s(z) = Q(z)(L(z) + sQ(z))\partial/\partial z$.

При любом s из интервала $]s_1; s_2[$ поле принадлежит $C(A, \{z_i\}, \{\lambda_i\})$ (s меняется на максимально возможном, всегда конечном интервале $]s_1; s_2[$ так, чтобы $L(z) + sQ(z) > 0$, $z \in S^1$).

Из соотношения

$$J(P_s(z)) = J(P_{s_0}(z)) - (s - s_0) \int\limits_{S^1} \frac{dz}{(L + s_0Q)(L + sQ)}, \quad s_0 \in \,]s_1; s_2[$$

заключаем, что $J(P_s(z))$ непрерывная, монотонно убывающая функция параметра s, $\lim\limits_{s \to s_1} J(P_s) = +\infty$, $\lim\limits_{s \to s_2} J(P_s) = -\infty$. Таким образом, $P_s(z)$ — искомое семейство. Теорема доказана.

Пример. Любое поле $w(z)\ \partial/\partial z$ из $C(H, \{0; \pi\}, \{1, -1\})$ сопряжено с полем $\sin z (1 + b \sin z)\ \partial/\partial z$ при некотором b. Если $J(w) = 0$, то $w(z)\ \partial/\partial z$ эквивалентно $\sin z\ \partial/\partial z$.

Поступила в редколлегию 04.11.87