УДК 517. 51

А. Г. ЧЕРНЯВСКИЙ

КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ ОПЕРАТОРАМИ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В R^2

В статье изложены результаты изучения квазианалитических классов функций, порожденных несколькими гиперболическими операторами произвольного порядка с постоянными коэффициентами, действующими на функции $u(x, y)$ двух переменных. Для упрощения записи рассматривается случай двух операторов H_1 и H_2 порядков k и l соответственно. В случае $H_1 = D_x$, $H_2 = D_y$ эта задача рассматривалась вначале П. Лелоном [1] и А. Л. Кузьминой [2], а затем В. И. Мацаевым и Л. И. Ронкиным [3, 4].

В статье использованы методы теории абстрактной квазианалитичности для операторов в банаховом пространстве, развитой Ю. И. Любичем и В. А. Ткаченко [5, 6].

Пусть $U_L \subset R^2$ — есть область влияния кусочно-гладкой кривой L, т. е. множество таких точек $Z \in R^2$, что все характеристики операторов H_1 и H_2, проходящие через точку Z, имеют непустое пересечение с кривой L.

Пусть задана неотрицательная последовательность $\{m_{pq}\}_{p,\ q=0}^{\infty}$, скорость роста которой, следуя работе [1], будем измерять с помощью последовательности $\{M_n\}_0^{\infty}$, построенной по правилу

$M_n = \min\{m_{pq},\ kp+lq=n\}$, если для n возможно хотя бы одно представление вида $n=kp+lq$, и $M_n=\infty$ в противном случае.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Для того, чтобы из соотношений*

$$H_1^p H_2^q u(x,\ y) \in C^r(U_L),\ r=\max\{k,\ l\},\ |H_1^p H_2^q u| \leqslant m_{pq},\ D_{x,y}^S H_1^p \times \\ \times H_2^q u|_L = 0,\ |s| \leqslant r-1;\ p,\ q=0,\ 1,\ \ldots \tag{1}$$

следовало, что $u(x,\ y)\equiv 0$, $(x,\ y)\in U_L$, *необходимо и достаточно, чтобы последовательность* $\{M_n\}$ *удовлетворяла условию квазианалитичности* $\int\limits_1^\infty \frac{\ln T(r)\, dr}{r^2} = \infty,\ T(r) = \sup\limits_{n\geqslant 0} \frac{r^n}{M_n}$. (2)

Теорема 1 была анонсирована нами в заметке [7]. Если в теореме 1 принять $H_1 = D_x$; $H_2 = D_y$, то получается результат, установленный Л. И. Ронкиным [4].

Необходимость условия (2) для квазианалитичности может быть без труда обоснована с помощью стандартных методов теории квазианалитических классов [8].

Для доказательства достаточности прежде всего отметим следующий простой факт.

Лемма 1. *Пусть бесконечно дифференцируемая финитная функция* $f(y)\in C^\infty(R^N)$, $N>1$ *удовлетворяет оценкам* $|D_{y_1}^{\alpha p} D_{y_2}^{\beta q} \times \times f(y_1, y_2)| \leqslant m_{pq}$, $y=(y_1,\ y_2)$, $y_1\in R^d$, $|\alpha| = k, |\beta| = l, p, q = 0, 1, \ldots$ *с фиксированным разбиением переменных* $y=(y_1,\ y_2)$ *и фиксированными мультииндексами* α *и* β, *пусть последовательность* $\{m_{pq}\}$ *удовлетворяет условию квазианалитичности* (2). *Тогда функция* $f(y)$ *тождественно равна нулю.*

Следующее утверждение позволяет перенести теорию абстрактной квазианалитичности [5, 6] на случай нескольких операторов.

Будем говорить, что полином $Q(x_1, \ldots, x_s)$ степени k удовлетворяет условию E с показателями $\{\alpha_i\}$, если справедливо представление $Q(x_1, \ldots, x_s) = C\prod\limits_{i=1}^s x_i^{\alpha_i} + q(x_1, \ldots, x_s)$, $\sum\limits_{i=1}^s \alpha_i = k$, $C\neq 0$, в котором степень полинома q меньше k, и любая переменная x_i входит в полином $q(x_1, \ldots, x_s)$ со степенью не выше α_i.

Заметим, что для некоторого положительного R при $|\lambda_i|\geqslant R$, $i=1, \ldots, s$ выполнена оценка

$$|Q(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)| \geqslant \mathrm{const} \prod_{i=1}^s |\lambda_i|^{\alpha_i},\ |\lambda_i|\geqslant R. \tag{3}$$

Лемма 2. *Пусть в банаховом пространстве* S *заданы операторы* $A_1, \ldots, A_N$, $N>1$, *не имеющие спектра, резольвенты* $R_i(\lambda)$ *которых являются целыми функциями экспоненциального типа, равномерно ограниченными при* $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$. *Предположим,* *что операторы и резольвенты коммутируют, точнее, если* $x \in \mathrm{Dom}(A_i A_j) \cap \mathrm{Dom}(A_j A_i)$, то $A_i A_j x = A_j A_i x$, *и если* $x \in \mathrm{Dom} \times (A_i) \cap \mathrm{Dom}(A_j)$, *то* $R_j(\lambda) x \in \mathrm{Dom}(A_i)$ *и* $A_i R_j(\lambda) x = R_j(\lambda) A_i x$. *Пусть полиномы* $Q_1(x_1, \ldots, x_d)$ *и* $Q_2(x_{d+1}, \ldots, x_N)$ *степени* k *и* l *удовлетворяют условию* E *с показателями* $\{\alpha_i\}$ *и* $\{\beta_i\}$ *соответственно, операторы* B_1 *и* B_2 *заданы в виде* $B_1 = Q_1(A_1, \ldots, A_d)$, $B_2 = Q_2(A_{d+1}, \ldots, A_N)$, *и последовательность* $\{m_{pq}\}$ *удовлетворяет условию квазианалитичности* (2). *Тогда из соотношений*[1] $x \in \mathrm{Dom}(B_1^p B_2^q)$, $\| B_1^p B_2^q x \| \leqslant m_{pq}$; $p, q = 0, 1, \ldots$ *следует, что* $x = 0$.

Доказательство леммы 2. Рассмотрим произвольный линейный функционал $F \in S^*$ и целую функцию экспоненциального типа от N комплексных переменных $F(R_1(\lambda_1) \ldots R_N(\lambda_N) x)$, $\lambda_i \in C$. Покажем, что эта функция имеет минимальный экспоненциальный тип в области $\mathrm{Re}\,\lambda_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, N$. Выберем такое число ρ, что при условии $|\lambda_i| \geqslant \rho$, $i = 1, \ldots, N$ полиномы Q_1 и Q_2 удовлетворяют оценке (3) с показателями $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_i\}$ соответственно. Пусть $L_\rho^{(i)}$ — есть контур в комплексной плоскости $\lambda_i \in C$, составленный из двух лучей $\{|\lambda_i| \geqslant \rho,\ \mathrm{Re}\lambda_i = 0$ и полуокружности $\{|\lambda_i| = \rho,\ \mathrm{Re}\lambda_i \geqslant 0\}$, и пусть $L_\rho = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)\colon \lambda_i \in L_\rho^{(i)}$. Введем целую функцию $w(\lambda)$, $\lambda \in C$, удовлетворяющую в области $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant 0$ соотношениям $\max |\lambda^n w(\lambda)| < \infty$, $n = 0, 1, \ldots$ и имеющую в этой области нулевой индикатор. Рассмотрим бесконечно дифференцируемую функцию

$$\chi(s_1, \ldots, s_N) = \int\limits_{L_\rho} F\Big(\Big(\prod_{i=1}^{N} w(\lambda_i)\, e^{-\lambda_i s_i}\, R_i(\lambda_i)\Big) x\Big)\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_N, \quad s_i \geqslant 0.$$

Из тождества

$$\prod_{j=1}^{N} R_j(\lambda_j) A_i x = \lambda_i \prod_{j=1}^{N} R_j(\lambda_j) x + \prod_{j \neq i} R_j(\lambda_j) x, \quad x \in \bigcap_{j=1}^{N} \mathrm{Dom}(A_j)$$

следует, что

$$\prod_{j=1}^{N} R_j(\lambda_j) A_i^n x = \lambda_i^n \prod_{j=1}^{N} R_j(\lambda_j) x + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_i^k \prod_{j \neq i} R_j(\lambda_j) A_i^{n-1-k} x, \quad A^k x \in \bigcap_{j=1}^{N} \mathrm{Dom}(A_j), \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Поэтому, если вектор x удовлетворяет условию леммы, то справедливо представление

$$\prod_{j=1}^{N} R_j(\lambda_j) B_1^p B_2^q x = Q_1^p(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)\, Q_2^q(\lambda_{d+1}, \ldots, \lambda_N) \prod_{j=1}^{N} R_j(\lambda_j) x + \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_N),$$

[1] Вектор y принадлежит, например, области определения оператора B_1, если $y \in \mathrm{Dom}(A_1^{\alpha_1} \ldots A_d^{\alpha_d})$ для любого мультииндекса α, $|\alpha| \leqslant k$.

в котором вектор-функция $\varphi_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ является полиномом по переменной λ_i. Пользуясь этим представлением, оценкой вида (3) для полиномов Q_1 и Q_2, леммой Жордана и обозначив $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$, $\gamma_1 = (s_1, \ldots, s_d)$, получаем

$$D_{\gamma_1}^{\alpha p} D_{\gamma_2}^{\beta q} \chi(s_1, \ldots, s_N) = \int\limits_{L_\rho} F\left(\left(\prod_{i=1}^{N} w(\lambda_i)\, e^{-\lambda_i s_i} R_i(\lambda_i)\right) B_1^p B_2^q x\right) \prod_{i=1}^{d} \times$$

$$\times \lambda_i^{\alpha_i p} \prod_{i=d+1}^{N} \lambda_i^{\beta_i q} Q_1^{-p}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)\, Q_2^{-q}(\lambda_{d+1}, \ldots, \lambda_N)\, d\lambda, \; |D_{\gamma_1}^{\alpha p} D_{\gamma_2}^{\beta q} \chi \times$$

$$\times (s_1, \ldots, s_N)| \leqslant (\mathrm{const})^{p+q} m_{pq}, \quad s_i \geqslant 0.$$

Рассмотрим функцию $\chi(s_1, \ldots, s_N) = \chi(s_1^2, \ldots, s_N^2)$. Поскольку по теореме Винера-Пэли $\chi(s_1, \ldots, s_N) = 0$, если существует такое i, что $s_i \geqslant \sigma_i$, где σ_i — тип резольвенты $R_i(\lambda)$, то $\varkappa$ — бесконечно дифференцируемая финитная функция. Применяя лемму 3 работы [4], получаем, что $|D_{\gamma_1}^{\alpha p} D_{\gamma_2}^{\beta q} \varkappa(s_1, \ldots, s_N)| \leqslant (\mathrm{const})^{p+q} \times \times m_{pq}$, $s_i \in R^1$. Пользуясь леммой 1, получим тогда, что $\varkappa \equiv 0$, т. е. $\chi(s_1, \ldots, s_N) = 0$ при $s_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, N$. Это означает по теореме Винера—Пэли, что функция $F(R_1(\lambda_1) \ldots R_N(\lambda_N) x)$ имеет в области $\{\lambda\colon Re\,\lambda_i \geqslant 0,\ 1 \leqslant i \leqslant N\}$ минимальный экспоненциальный тип. Аналогично рассматривая другие области C^N, являющиеся прямыми произведениями N комплексных полуплоскостей $\mathrm{Re}\,\lambda_i \geqslant 0$ или $\mathrm{Re}\,\lambda_i \leqslant 0$, и пользуясь принципом Фрагмена—Линделефа, получим, что для любого функционала $F \in S^*$ функция $F(R_1(\lambda_1) \ldots R_N(\lambda_N) x)$ — тождественная константа, не зависящая от переменных λ_i, но тогда $R_1(\lambda_1) \ldots R_N(\lambda_N) x \equiv \mathrm{const}$, откуда сразу же получаем, что $x = 0$. Лемма доказана.

Для использования доказанной леммы нам потребуется

Лемма 3. *Пусть L — гладкая кривая*, D — оператор первого порядка $D = aD_x + bD_y$, $a^2 + b^2 = 1$ **(4)** и каждая характеристика оператора D пересекает кривую L не более, чем в одной точке. Тогда оператор A в банаховом пространстве $S = C(U_L)$, заданный дифференциальной операцией D вида (4) на множестве функций $\mathrm{Dom}(A) = \{u \in C^1(U_L);\ u(x, y) = 0;\ (x, y) \in L\}$, не имеет спектра, и его резольвента $R(\lambda)$ — целая оператор-функция экспоненциального типа, равномерно ограниченная при $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$. Если $u(x, y) \in \mathrm{Dom}(A)$, то $D_x R(\lambda) u = R(\lambda)[D_x u]$, $D_y R(\lambda) u = R(\lambda) \times \times [D_y u]$.

Следующая лемма является ослабленным вариантом теоремы 1.

Лемма 4. *Если кривая L является гладкой и обладает свойством, что каждая характеристика операторов H_1, H_2 пересекает ее не более, чем в одной точке, то из выполнения соотношений* (1), (2) *следует, что $u(x, y) \equiv 0$, $(x, y) \in U_L$.*

Доказательство леммы 4. Пусть $v_1, \ldots, v_d$ — операторы дифференцирования по характеристическим направлениям оператора H_1, а $v_{d+1}, \ldots, v_N$ — оператора H_2. Как известно [9], операторы H_1 и H_2 представимы в виде $H_1 = Q_1(v_1, \ldots, v_d)$, $H_2 = Q_2(v_{d+1}, \ldots, v_N)$ с полиномами Q_1 и Q_2, удовлетворяющими условию E с показателями $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_i\}$ соответственно. Каждому из операторов v_i поставим в соответствие в банаховом пространстве $S=C(U_L)$ оператор A_i с резольвентой $R_i(\lambda)$ способом, указанным в лемме 3. Введем операторы $B_1=Q_1(A_1,\ldots,A_d)$, $B_2=Q_2(A_{d+1},\ldots,A_N)$. Если функция $u(x,y)$ удовлетворяет условию леммы 4, то она содержится в пространстве S и удовлетворяет всем условиям леммы 2. Применяя эту лемму, получаем, что $u(x,y)\equiv 0$, $(x,y)\in$ $\in U_L$. Лемма доказана.

Лемма 5[1]. *Пусть выполнены соотношения* (1), (2). *Тогда* $u(x,y)\equiv 0$, *в выпуклой оболочке кривой* L.

Доказательство. Пусть $L\neq \operatorname{conv}(L)$. Выберем произвольную точку $M\in\operatorname{conv}(L)\setminus L$ и покажем, что $u(M)=0$. В силу связности кривой L и выбора точки M, на кривой L существуют такие точки A и B, что соединяющий их отрезок содержит точку M. Не ограничивая общности, можно считать, что на отрезке $[A,B]$ нет отличных от A и B точек кривой L. Поэтому существует односвязная область $G\subset\operatorname{conv}(L)$, граница которой состоит из участка кривой L и отрезка $[A,B]$. Пусть T—полуплоскость с границей AB, содержащая область G. Определим функцию u_0 в T, полагая $u_0=u$ в G и $u_0=0$ в $T\setminus G$. В полуплоскости T можно указать отрезок l, который не пересекается с областью G и имеет непустое пересечение с каждой из характеристик операторов H_1, H_2, проходящих через точку M. Очевидно, $M\in U_l$. Применяя к функции u_0 в области U_l и кривой l лемму 4, получим, что $u(M)=0$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. *Достаточность.* Пусть выполнены соотношения (1), (2). Рассмотрим произвольную точку $M\in U_L$. Допустим, что характеристики операторов H_1, H_2, проходящие через M, пересекают кривую L в точках $C_1,\ldots,C_N$. Будем считать, что $N>1$. Если $M\in\operatorname{conv}(C_1,\ldots,C_N)$, то $u(M)=0$, в силу леммы 5. Предположим, что $M\bar{\in}\operatorname{conv}(C_1,\ldots,C_N)$, тогда найдутся такие крайние характеристики MC_i, MC_j, что все остальные характеристики MC_s операторов H_1 и H_2 лежат в угле C_iMC_j, имеющем раствор, меньший π. Очевидно, каждая характеристика MC_ν, $\nu=1,\ldots,N$, имеет непустое пересечение с отрезком $[C_i, C_j]$, поэтому $M\in U_{[C_i,C_j]}$. Из леммы 5 вытекает также, что на отрезке $[C_i,C_j]$, $D^s_{x,y}H_1^pH_2^qu(x,y)=0$, $(x,y)\in[C_i,C_j]$ $|s|<r$; $p,q=0,1,\ldots$. Применяя к кривой $L=[C_i,C_j]$ и области $U_{[C_i,C_j]}$ лемму 4, получим, что $u(M)=0$. Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Lelong P.* Sur une propriété de quasianalyticite des fonctions de plusieurs variables.—C. R. Acad.Sci. Paris, 1951. **232**,p. 1178. 2. *Кузьмина А. Л.* Об одном классе квазианалитических функций многих переменных.— Докл. АН СССР, 1951, **80**, № 6, с. 853—856. 3. *Мацаев В. И., Ронкин Л. И.* Квазианалитические классы функций от нескольких переменных.—Зап. мат. отд—ния физ.-мат. фак. и Харьк. мат. о-ва, 1961, **27**, серия 4, с. 49—57. 4. *Ронкин Л. И.*

[1] Можно показать, что эта лемма справедлива и без требования гиперболичности операторов H_1, H_2

О квазианалитических классах функций нескольких переменных.— Докл. АН СССР, 1962, **146**, № 3, с. 546—549. 5. *Любич Ю. И., Ткаченко В. А.* Критерий квазианалитичности для абстрактных операторов.— Докл. АН СССР, 1970, **190**, № 4, с. 772—774. **6.** *Любич Ю. И., Ткаченко В. А.* Абстрактная проблема квазианалитичности.— Теория функций, функц. анализ и их приложения. 1972, вып. 16. с. 18—29, **7.** Чернявский А. Г. Об операторной квазианалитичности для функций нескольких переменных.— Докл. АН СССР, 1979, **244**, № 2, с. 296—299. 8. *Мандельбройт С.* Квазианалитические классы функций.— М:. ГИТТЛ, 1937.— 108 с. **9.** *Курант Р.* Уравнения с частными производными.— М.; Мир. 1964. 830 с.

Поступила в редколлегию 05.09.79.