УДК 517.946.9

Л. В. БЕРЛЯНД, М. В. ГОНЧАРЕНКО

ОСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ СО СЛАБЫМ ПОГЛОЩЕНИЕМ

Пусть Ω — область в $\boldsymbol{R}^n$, ограниченная гладкой поверхностью $\partial\Omega$. Рассмотрим области $\Omega^{(s)}$, полученные из Ω удалением большого числа мелких непересекающихся множеств $F_\alpha^{(s)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, s$, $(\Omega^{(s)} = \Omega \setminus F^{(s)}$, $F^{(s)} = \bigcup\limits_{\alpha=1}^{s} F_\alpha^{(s)})$. С ростом параметра s число множеств $F_\alpha^{(s)}$ неограниченно растет, а их диаметры стремятся к нулю, причем мера множества $F^{(s)}$ остается конечной.

В областях $\Omega^{(s)}$ рассмотрим краевую задачу:

$$\frac{\partial u^{(s)}(x, t)}{\partial t} - \Delta u^{(s)}(x, t) = 0, \; x \in \Omega^{(s)}, \; t > 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u^{(s)}}{\partial \nu} + \sigma^{(s)} u^{(s)} = 0, \; x \in \partial F^{(s)}, \; t > 0, \tag{2}$$

$$u^{(s)} = 0, \; x \in \partial\Omega, \; t > 0, \tag{3}$$

$$u^{(s)}(x, 0) = \varphi(x), \; x \in \Omega^{(s)}, \tag{4}$$

которая описывает процесс диффузии частиц в пористой среде. Здесь $u^{(s)}(x, t)$ — плотность частиц в точке x в момент времени t; $\varphi(x) \in C_0^2(\Omega)$; $\frac{\partial}{\partial \nu}$ — производная по нормали к $\partial F^{(s)}$. Краевое условие (2) вместе с

$$\int\limits_{\partial F^{(s)}} \sigma^{(s)} \, d\Gamma < \infty, \quad \sigma^{(s)} \geqslant 0 \tag{5}$$

задает слабое поглощение на границе пор. Например, в случае периодического или регулярного [1] расположения пор из (5) следует $\sigma^{(s)} = O(s^{-1/3})$.

Нас интересует асимптотика решения задачи (1)—(4) при $s \to \infty$. Оказывается, что при достаточно общих предположениях $u^{(s)}(x, t)$ сходится при $s \to \infty$ к функции $u(x, t)$, которая является решением следующей осредненной задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{b(x)} \sum_{ik=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) - \frac{c(x)}{b(x)} u = 0 \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{6}$$

$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \tag{7}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \Omega. \tag{8}$$

Коэффициенты $a_{ik}(x)$, $b(x)$ и $c(x)$ — гладкие функции в Ω, причем $a_{ik}(x)$ и $c(x)$ выражаются через локальные энергетические характеристики области $\Omega^{(s)}$, а $b(x)$ определяется геометрией множества $F^{(s)}$.

Будем предполагать, что система областей $\Omega^{(s)}$ удовлетворяет условию сильной связанности [2], т. е. для любой функции $v^{(s)}$ ($v^{(s)} \in \in H^1(\Omega^{(s)})$) существует продолжение $\tilde{v}^{(s)}(x) \in H^1(\Omega)$, такое, что $\tilde{v}^{(s)} = = v^{(s)}$ при $x \in \Omega^{(s)}$ и

$$\| \tilde{v}^{(s)} \|_{H^1(\Omega)} \leqslant c \| v^{(s)} \|_{H^1(\Omega^{(s)})}, \tag{9}$$

причем постоянная c не зависит от s. Достаточным условием для выполнения (9) является, например, условие регулярности распределения $F_{\alpha}^{(s)}$, которое формулируется в геометрических терминах [1].

Зафиксируем произвольную точку $x^0 \in \Omega$ и рассмотрим куб $K^0 = = K(x^0, h)$ с центром в точке x^0 и ребрами длины h, ориентированными по координатным осям. Введем локальные характеристики:

$$T_l(x^0, s, h) = \inf_{v^{(s)}} \int_{K^0 \cap \Omega^{(s)}} \{ |\nabla v^{(s)}|^2 - h^{-2-\tau} | v^{(s)} - \langle x - x^0, l \rangle |^2 \} \, dx; \tag{10}$$

$$c(x^0, s, h) = \inf_{w^{(s)}} \Bigg[\int_{K^0 \cap \Omega^{(s)}} \{ |\nabla w^{(s)}|^2 + h^{-2-\theta} | w^{(s)} - 1 |^2 \} \, dx + \\ + \int_{\partial F^{(s)} \cap K^0} \sigma^{(s)} | w^{(s)} |^2 \, d\Gamma \Bigg], \tag{11}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\boldsymbol{R}^n$; τ и θ — произвольные положительные числа; нижняя грань берется в классе функций $w^{(s)}(x)$, $v^{(s)}(x) \in H^1(K^0 \cap \Omega^{(s)})$; l — произвольный единичный вектор в $\boldsymbol{R}^n$. Легко проверить, что функционая $T_l(x^0, s, h)$ является квадратичной относительно l и представляется в виде [2]: $T_l(x^0, s, h) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \times \times (x^0, s, h) l_i l_k$, где

$$a_{ik}(x^0, s, h) = \int_{K^0 \cap \Omega^{(s)}} \{ (\nabla v_i^{(s)}, \nabla v_k^{(s)}) + \\ + h^{-2-\tau} [v_i^{(s)} - (x_i - x_i^0)] [v_k^{(s)} - (x_k - x_k^0)] \} \, dx.$$

Тензор $\{a_{ik}\}$ и функция $c(x^0, s, h)$, вообще говоря, зависят от произвольных параметров τ и θ соответственно, но при больших s и малых h эта зависимость не существенна.

Теорема 1. *Пусть области $\Omega^{(s)}$ удовлетворяют условию сильной связанности (9) и в каждой точке $x^0 \in \Omega$ существуют пределы:*

$$1)\quad \lim_{h\to 0}\lim_{s\to\infty} \frac{\operatorname{mes}(K(x^0, s, h) \cap \Omega^{(s)})}{h^n} = b(x^0);$$

$$2)\quad \lim_{h\to 0}\varliminf_{s\to\infty} \frac{a_{ik}(x^0, s, h)}{h^n} = \lim_{h\to 0}\varlimsup_{s\to\infty} \frac{a_{ik}(x^0, s, h)}{h^n} = a_{ik}(x^0);$$

$$3)\quad \lim_{h\to 0}\varliminf_{s\to\infty} \frac{c(x^0, s, h)}{h^n} = \lim_{h\to 0}\varlimsup_{s\to\infty} \frac{c(x^0, s, h)}{h^n} = c(x^0),$$

где $a_{ik}(x^0)$, $c(x^0)$ и $b(x^0)$ — непрерывные функции в Ω, а тензор $\{a_{ik}\}$ положительно определен. Тогда решения $u^{(s)}(x, t)$ задачи (1)—(4) сходятся к решению $u(x, t)$ осредненной задачи (6)—(8) в следующем смысле:

$$\lim_{s\to\infty} \int_{\Omega^{(s)}} |u^{(s)} - u|^2\, dx = 0. \tag{12}$$

Замечание. Аналогично [2] можно показать, что если условия 2) и 3) теоремы 1 выполняются при некотором τ и θ соответственно, то они выполняются при любом $\tau > 0$ и $\theta > 0$.

Теорема 1 является следствием следующей теоремы 2 о сходимости решений соответствующих стационарных задач.

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 решения $u^{(s)}(x)$ задачи*

$$\Delta u^{(s)}(x) - \lambda u^{(s)}(x) = f(x), \quad x \in \Omega^{(s)}, \quad \lambda > 0, \quad f(x) \in L_2(\Omega), \tag{13}$$

$$\frac{\partial u^{(s)}}{\partial \nu} + \sigma^{(s)} u^{(s)} = 0, \quad x \in \partial F^{(s)}, \tag{14}$$

$$u^{(s)} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{15}$$

сходятся в смысле (12) к решению $u(x)$ осредненной задачи:

$$\frac{1}{b(x)} \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) - \lambda u - \frac{c(x)}{b(x)} u = f(x), \quad x \in \Omega \tag{16}$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{17}$$

Доказательство. Решение $u^{(s)}$ задачи (13)—(14) минимизирует функционал:

$$J(u^{(s)}) = \int_{\Omega^{(s)}} \{|\nabla u^{(s)}|^2 + \lambda |u^{(s)}|^2 + 2fu^{(s)}\}\, dx + \int_{\partial\Omega^{(s)}} \sigma^{(s)} |u^{(s)}|^2\, d\Gamma \tag{18}$$

в классе функций $u^{(s)} \in H^1(\Omega^{(s)})$. Поэтому $\|u^{(s)}\| \leqslant A \|f\|_{L_2(\Omega^{(s)})}$, где A не зависит от s. В силу условия сильной связанности областей $\Omega^{(s)}$ можно построить продолжение $\tilde{u}^{(s)} \in H^1(\Omega)$ функцией $u^{(s)}$, удовлетворяющее такому же неравенству $\|\tilde{u}^{(s)}\|_{H^1(\Omega)} \leqslant A \|f\|_{L_2(\Omega)}$. Тогда последовательность функций $\tilde{u}^{(s)}$ будет слабо компактной в $H^1(\Omega)$, и, следовательно, можно выделить подпоследовательность $\{\tilde{u}^{(s_k)}, k = 1, 2, \ldots\}$, слабо сходящуюся в $H^1(\Omega)$ к некоторой функции $u(x) \in H^1(\Omega)$. Покажем, что если выполняются условия теоремы 2, то $u(x)$ будет решением задачи (16)—(17). Поскольку эта задача имеет единственное решение, то и вся подпоследовательность $\{\tilde{u}^{(s_k)}\}$ будет слабо сходиться к u в $H^1(\Omega)$, а в силу теоремы вложения сильно в $L_2(\Omega)$ [3].

Пусть $w(x)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая и финитная в Ω функция ($w \in C_0^2(\Omega)$). Покроем Ω кубами $K^\alpha = K(x^\alpha, h)$ с ребрами достаточно малой длины h, ориентированными по координатным осям. Центры кубов x^α образуют пространственную решетку с периодом $h - r$ ($r > 0$). Соотношение между h и r будет выбрано позже. По этому покрытию построим разбиение единицы $\{\varphi_\alpha(x)\}$

$$\varphi_\alpha(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n), \ 0 \leqslant \varphi_\alpha \leqslant 1;$$
$$\varphi_\alpha = 0, \ x \notin K^\alpha; \ \varphi_\alpha = 1, \ x \in K^\alpha \setminus \bigcup_{\beta \neq \alpha} K^\beta;$$
$$\sum_\alpha \varphi_\alpha = 1; \ \left|\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_i}\right| \leqslant cr^{-1}, \ (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Пусть w_α — функция, минимизирующая (11). Рассмотрим функцию

$$w^{(s)} = w + \sum_\alpha w(w_\alpha - 1)\varphi_\alpha + \sum_\alpha \sum_{i=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_i}[v_i^\alpha - (x_i - x_i^\alpha)]\varphi_\alpha. \quad (19)$$

Легко видеть, что $w^{(s)} \in H^1(\Omega^{(s)})$, а так как $u^{(s)}$ минимизирует функциональная J в классе функций из $H^1(\Omega^{(s)})$, то

$$J(u^{(s)}) \leqslant J(w^{(s)}). \quad (20)$$

Произведем в (20) предельный переход $s \to \infty$ и покажем, что

$$\varlimsup_{s\to\infty} J(u^{(s)}) \leqslant \varlimsup_{s\to\infty} J(w^{(s)}) \leqslant \tilde{J}(w), \quad (21)$$

где

$$\tilde{J}(w) = \int_\Omega \left\{\sum_{i,k=1}^n a_{ik}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_k} + \lambda b w^2 + 2fbw + cw^2\right\} dx \quad (22)$$

— функционная энергия осредненной задачи.

Оценим сверху $J(w^{(s)})$. Для этого воспользуемся оценками, полученными в [1] из (10) и условия 2) теоремы 2.

$$\int_{K^\alpha \cap \Omega^{(s)}} |v_i^\alpha - (x_i - x_i^\alpha)|^2 dx = O(h^{n+2+\tau}), \quad (23)$$

$$\int_{K^\alpha \cap \Omega^{(s)}} |\nabla v_i^\alpha|^2 dx = O(h^n), \quad (24)$$

$$\int\limits_{(K^\alpha \setminus K_1^\alpha) \cap \Omega^{(s)}} |v_i^\alpha - (x_i - x_i^\alpha)|^2 \, dx = o(h^{n+2+\tau}), \tag{25}$$

$$\int\limits_{(K^\alpha \setminus K_1^\alpha) \cap \Omega^{(s)}} |\nabla v_i^\alpha|^2 \, dx = o(h^n), \tag{26}$$

где $K_1^\alpha = K^\alpha \setminus \bigcup\limits_{\beta \neq \alpha} K^\beta$.

Аналогично из (11) и условия 3) теоремы 2 получаем оценки:

$$\int\limits_{K^\alpha \cap \Omega^{(s)}} |\nabla w_\alpha|^2 \, dx = O(h^n), \tag{27}$$

$$\int\limits_{K^\alpha \cap \Omega^{(s)}} |w_\alpha - 1|^2 \, dx = O(h^{n+2+\Theta}), \tag{28}$$

$$\int\limits_{(K^\alpha \setminus K_1^\alpha) \cap \Omega^{(s)}} |w_\alpha - 1|^2 \, dx = o(h^{n+2+\Theta}), \tag{29}$$

$$\int\limits_{(K^\alpha \setminus K_1^\alpha) \cap \Omega^{(s)}} |\nabla w_\alpha|^2 \, dx = o(h^n), \tag{30}$$

$$\int\limits_{K^\alpha \cap \partial\Omega^{(s)}} \sigma^{(s)} |w_\alpha|^2 \, d\Gamma = O(h^n), \tag{31}$$

$$\int\limits_{(K^\alpha \setminus K_1^\alpha) \cap \partial\Omega^{(s)}} \sigma^{(s)} |w_\alpha|^2 \, d\Gamma = o(h^n). \tag{32}$$

Теперь перейдем непосредственно к оценке $J(w^{(s)})$. Дифференцируя (19), находим компоненты $\nabla w^{(s)}$:

$$\frac{\partial w^{(s)}}{\partial x_j} = \sum_\alpha \frac{\partial w}{\partial x_j}(w_\alpha - 1)\varphi_\alpha + \sum_\alpha w \frac{\partial w_\alpha}{\partial x_j}\varphi_\alpha + \sum_\alpha w(w_\alpha - 1)\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_j} +$$
$$+ \sum_\alpha \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}[v_i^\alpha - (x_i - x_i^\alpha)]\varphi_\alpha + \sum_\alpha \sum_{i=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial v_i^\alpha}{\partial x_j}\varphi_\alpha +$$
$$+ \sum_\alpha \sum_{i=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_i}(v_i^\alpha - (x_i - x_i^\alpha)]\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_j}.$$

Конечный вклад в функционал $J(w^{(s)})$ дадут только квадраты слагаемых из следующих сумм:

$$\sum_\alpha w \frac{\partial w_\alpha}{\partial x_j}\varphi_\alpha; \quad \sum_\alpha \sum_{i=1}^n \frac{\partial x}{\partial x_i}\frac{\partial v_i^\alpha}{\partial x_j}\varphi_\alpha.$$

Остальные слагаемые дадут подынтегральные выражения, которые будут линейными и квадратичными комбинациями функций: $[v_i^\alpha -$

$-(x_i - x_i^\alpha)]\,\varphi_\alpha\ \ [v_k^\beta - (x_k - x_k^\beta)]\,\dfrac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_j}$; $(w_\beta - 1)\dfrac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_j}$; $(w_\alpha - 1)\,\varphi_\alpha$; причем коэффициенты в квадратичных выражениях ограничены (зависят от w),

а в линейных зависят от $\dfrac{\partial v_i^\alpha}{\partial x_j}\varphi_\alpha$, $\dfrac{\partial w_\alpha}{\partial x_j}\varphi_\alpha$ и $f \in L_2(\Omega)$.

При оценке учитывается, что $w \in C_0^2(\Omega)$, $0 \leqslant \varphi_\alpha \leqslant 1$, и (23)—(30).

Суммирование по α производится в пределах $1 \leqslant \alpha \leqslant N$, где $N = N(w, h) = O(h^{-n})$. С каждым кубом пересекаются лишь ближайшие кубы K^β, число которых не превосходит 3^n.

Оценим поверхностный интеграл в $J(w^{(s)})$. Для этого перепишем функцию $w^{(s)}$ в виде:

$$w^{(s)} = \sum_\alpha w w_\alpha \varphi_\alpha + \sum_\alpha \sum_{i=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_i}[v_i^\alpha - (x_i - x_i^\alpha)]\,\varphi_\alpha.$$

Тогда
$$(w^{(s)})^2 = \sum_\alpha w^2 w_\alpha^2 \varphi_\alpha^2 + 2\sum_\alpha\sum_{i=1}^n w\frac{\partial w}{\partial x_i}[v_i^\alpha - (x_i - x_i^\alpha)]\,\varphi_\alpha w_\alpha +$$
$$+ \sum_\alpha \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)^2 [v_i^\alpha - (x_i - x_i^\alpha)]^2 \varphi_\alpha^2 +$$
$$+ 2\sum_{\alpha\neq\beta} w^2 w_\alpha w_\beta \varphi_\alpha\varphi_\beta + 4\sum_{\alpha\neq\beta} w\frac{\partial w}{\partial x_i} w_\alpha [v_i^\beta - (x_i - x_i^\beta)]\,\varphi_\alpha\varphi_\beta +$$
$$+ 2\sum_{\alpha\neq\beta}\sum_{i,\,k=1}^n \left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x_k}\right)[v_i^\alpha - (x_i - x_i^\alpha)]\,[v_k^\beta - (x_k - x_k^\beta)]\,\varphi_\alpha\varphi_\beta.$$

Конечный вклад дает только первое слагаемое. При оценке учитывается, что $w \in C_0^2(\Omega)$, $|\,v_i^\alpha - (x_i - x_i^\alpha)\,| = O(h)$, а также (31)—(32).

Таким образом, оцениваемый функционал представим в виде

$$J(w^{(s)}) = \sum_\alpha \sum_{i=1}^n \int\limits_{K^\alpha \cap \Omega^{(s)}} \frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_k}(\nabla v_i^\alpha, \nabla v_k^\alpha)\,dx +$$
$$+ \sum_\alpha \int\limits_{K^\alpha \cap \Omega^{(s)}} w^2 |\nabla w_\alpha|^2 dx + \lambda^2 \int\limits_{\Omega^{(s)}} w^2 dx +$$
$$+ 2\int\limits_{\Omega^{(s)}} fw\,dx + \sum_\alpha \int\limits_{\partial F^{(s)} \cap K^\alpha} \sigma^{(s)} w^2 w_\alpha^2 d\Gamma + E(s, h, r, w). \tag{33}$$

Через $E(s, h, r, w)$ обозначены остальные слагаемые, причем

$$\overline{\lim_{s\to\infty}}\,|E(s, h, r, w)| = O(h^{2+\Theta}) + O(h^{2+\tau}) + O(h^{1+\tau/2}) + O(h^{1+\Theta/2}) +$$
$$+ o\left(\frac{1}{r^2}h^{2+\Theta}\right) + o\left(\frac{1}{r^2}h^{2+\tau}\right) + o(1) + o\left(\frac{1}{r^2}h^{2+\tau}\right) + o\left(\frac{1}{r}h^{1+\Theta/2}\right) +$$
$$+ o\left(\frac{1}{r}h^{1+\tau/2}\right) + o\left(\frac{1}{r}h^{2+\tau/2+\Theta/2}\right).$$

Положим $r = \min(h^{1+\tau/2}, h^{1+\Theta/2})$. Тогда $\lim\limits_{h\to 0} \overline{\lim\limits_{s\to\infty}} |E(s, h, r, w)| = 0$.

В [2] показано, что при $s \geqslant s(h)$

$$\sum_{i,k=1}^{n} \int_{K^\alpha \cap \Omega^{(s)}} \frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_k}(\nabla v_i^\alpha, \nabla v_k^\alpha) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_k} a_{ik}(x^\alpha, s, h) + O(h^{n+1}). \tag{34}$$

Аналогично из условия 3) теоремы 2 и гладкости функции $w(x)$ следует

$$\int_{K^\alpha \cap \Omega^{(s)}} w^2 |\nabla w_\alpha|^2 dx + \int_{\partial F^{(s)} \cap K^\alpha} \sigma^{(s)} w^2 |w_\alpha|^2 \leqslant$$

$$\leqslant w^2(x^\alpha) c(x^\alpha, s, h) + O(h^{n+1}). \tag{35}$$

Из (34)—(35) следует, что в силу условий теоремы 2 для любой функции $w(x) \in C_0^2(\Omega)$ справедливо (21), и так как класс функций C_0^2 плотен в $H^1(\Omega)$, то неравенству (21) удовлетворяет любая функция из $H^1(\Omega)$.

Покажем, что если $u(x)$ — слабый предел продолженных функций $\tilde{u}^{(s)}$ в $H^1(\Omega)$ по некоторой подпоследовательности, то справедливо неравенство, обратное к (21): $\tilde{J}(u) \leqslant \lim\limits_{s\to\infty} J(u^{(s)})$ **(36)**.

Построим $u_\varepsilon(x) \in C_0^2(\Omega)$, такую, что $\| u_\varepsilon - u \|_{H^1(\Omega)} \leqslant \varepsilon$ **(37)**.

Рассмотрим в областях $\Omega^{(s)}$ последовательность функций $u_\varepsilon^{(s)} = u^{(s)}(x) + u_\varepsilon(x) - u(x)$. Очевидно,

$$\lim_{s=s_k\to\infty} \| u_\varepsilon^{(s)} - u_\varepsilon \|_{L_2(\Omega^{(s)})} = 0, \ \| u_\varepsilon^{(s)} - u^{(s)} \|_{H^1(\Omega^{(s)})} < \varepsilon. \tag{38}$$

Продолжаем функции $u_\varepsilon^{(s)}$ на всю область Ω так, чтобы полученные продолжения $\tilde{u}_\varepsilon^{(s)}$ сходились к u_ε в $L_2(\Omega)$ и $\| \tilde{u}_\varepsilon^{(s)} \|_{H^1(\Omega)} < c$. Обозначим $v_\varepsilon^{(s)} = u_\varepsilon^{(s)} - u_\varepsilon$. Очевидно, $v_\varepsilon^{(s)}$ стремится к нулю по мере, поэтому существует последовательность множеств $G^{(s)} \subset \Omega$, таких, что при $x \in \Omega \setminus G^{(s)}$ $|v_\varepsilon^{(s)}| < \delta(s)$, $\lim\limits_{s\to\infty} \delta(s) \to 0$. Построим [4] последовательность функций $\hat{v}_\varepsilon^{(s)}(x)$, таких, что $\hat{v}_\varepsilon^{(s)} = v_\varepsilon^{(s)}$, когда $x \in \Omega \setminus \hat{G}^{(s)}$, где $\hat{G}^{(s)} \supset G^{(s)}$ и $\operatorname{mes} \hat{G}^{(s)} \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} 0$, причем $\max\limits_{\Omega} |\hat{v}_\varepsilon^{(s)}| < G \max\limits_{\Omega\setminus\hat{G}^{(s)}} |v_\varepsilon^{(s)}|$, т. е. $\max |\hat{v}_\varepsilon^{(s)}| < c\delta(s)$ и $\| \hat{v}_\varepsilon^{(s)} \| \underset{H^1(\hat{G}^{(s)})}{\longrightarrow} 0$. Положим $\hat{u}_\varepsilon^{(s)} = u_\varepsilon + \hat{v}_\varepsilon^{(s)}$, $\Omega_{\varepsilon,\delta} = \{x \in \Omega : |\nabla u_\varepsilon| > \delta, |u_\varepsilon| > \delta\}$. Разобьем область Ω на непересекающиеся кубы $K^\alpha = K(x^\alpha, h)$ с ребрами длины h, ориентированными по координатным осям и выделим те из них, которые принадлежат области

$\Omega_{\varepsilon,h}$. В пересечении каждого из выделенных кубов с областью $\Omega^{(s)}$ рассмотрим функцию:

$$w_\alpha^{(s)} = \frac{u_s(x^\alpha) + u_\varepsilon^{(s)}(x) - \hat{u}_\varepsilon^{(s)}(x)}{u_\varepsilon(x^\alpha)}. \tag{39}$$

Так как $u_\varepsilon^{(s)} = \hat{u}_\varepsilon^{(s)}$ при $x \in \Omega^{(s)} \setminus \hat{G}^{(s)}$, то $\lim\limits_{s\to\infty} \| w_\alpha^{(s)} - 1 \|_{L_2(\Omega^{(s)})} = 0.$ (40)

Кроме того, нетрудно получить

$$\int\limits_{K^\alpha \cap \Omega^{(s)}} |\nabla w_\alpha^{(s)}|^2 dx = \frac{1}{u_\varepsilon^2(x^\alpha)} \int\limits_{K^\alpha \cap \hat{G}^{(s)}} |\nabla u_\varepsilon^{(s)}|^2 dx + o(1). \tag{41}$$

Оценивая поверхностный интеграл, получаем

$$\int\limits_{\partial F^{(s)} \cap K^\alpha} \sigma^{(s)} |w_\alpha^{(s)}|^2 d\Gamma = \frac{1}{u_\varepsilon^2(x^\alpha)} \int\limits_{\partial F^{(s)} \cap K^\alpha} \sigma^{(s)} |u_\varepsilon^{(s)}|^2 d\Gamma + O(h) + o(1). \tag{42}$$

При оценках воспользовались определением функции $w_\alpha^{(s)}$ и тем, что

$$\operatorname{mes} \hat{G}^{(s)} \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \| \hat{v}^{(s)} \|_{H^1(\hat{G}^{(s)})} \xrightarrow{s\to\infty} 0.$$

Далее, согласно (11):

$$\int\limits_{K^\alpha \cap \Omega^{(s)}} |\nabla w_\alpha^{(s)}|^2 dx + h^{-2-\Theta} \int\limits_{K^\alpha \cap \Omega^{(s)}} |w_\alpha^{(s)} - 1|^2 dx +$$
$$+ \int\limits_{\partial F^{(s)} \cap K^\alpha} \sigma^{(s)} |w_\alpha^{(s)}|^2 d\Gamma \geqslant c(x^\alpha, s, h) \tag{43}$$

и, значит, в силу (40)—(42)

$$\int\limits_{K^\alpha \cap \hat{G}^{(s)}} |\nabla u_\varepsilon^{(s)}|^2 dx + \int\limits_{\partial F^{(s)} \cap K^\alpha} \sigma^{(s)} |u_\varepsilon^{(s)}|^2 + O(h) \geqslant c(x^\alpha, s, h)\, u_\varepsilon^2(x^\alpha) + o(1). \tag{44}$$

Таким образом, получаем

$$\sum_\alpha \Big\{ \int\limits_{K^\alpha \cap \Omega^{(s)}} |\nabla u_\varepsilon^{(s)}|^2 dx + \int\limits_{\partial F^{(s)} \cap K^\alpha} \sigma^{(s)} |u_\varepsilon^{(s)}|^2 d\Gamma \Big\} +$$
$$+ \int\limits_{\Omega^{(s)}} (\lambda (u_\varepsilon^{(s)})^2 + 2 f u_\varepsilon^{(s)})\, dx \geqslant$$
$$\geqslant \sum_\alpha \Big\{ \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x^\alpha, s, h) \frac{\partial u_\varepsilon^{(s)}}{\partial x_i}(x^\alpha) \frac{\partial u_\varepsilon^{(s)}}{\partial x_k}(x^\alpha) + \tag{45}$$
$$+ c(x^\alpha, s, h)\, u_\varepsilon^2(x^\alpha) \Big\} + \int\limits_{\Omega(s)} \{ \lambda |u_\varepsilon^{(s)}|^2 + 2 f u_\varepsilon^{(s)} \} dx - o(1) - O(h) - O(h^{2+\tau}).$$

Здесь мы воспользовались оценкой, аналогичной [2]:

$$\int\limits_{K^\alpha \cap \Omega^{(s)}} |\nabla u_\varepsilon^{(s)}|^2 dx \geqslant \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x^\alpha, s, h) \frac{\partial u_\varepsilon^{(s)}}{\partial x_i}(x^\alpha) \frac{\partial u_\varepsilon^{(s)}}{\partial x_k}(x^\alpha) - O(h^{n+2+\tau}) - dl,$$

и равенством

$$\int\limits_{K^{\alpha}\bigcap\Omega^{(s)}\setminus\hat{G}^{(s)}} |\nabla u_{\varepsilon}^{(s)}|^2\,dx = \int\limits_{K^{\alpha}\bigcap\Omega^{(s)}} |\nabla\hat{u}_{\varepsilon}^{(s)}(x)|^2\,dx + o(1).$$

Перейдя в (45) к пределу при фиксированном $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ сначала по $s = s_k \to \infty$, а затем по $h \to 0$, учитывая условия 1)—3) теоремы 2, непрерывность $a_{ik}(x)$, $c(x)$, $b(x)$ и гладкость $u_{\varepsilon}(x)$, а также сходимость $u_{\varepsilon}^{(s)}(x)$ к $u_{\varepsilon}(x)$, получаем

$$\lim_{s=s_k\to\infty}\Big\{\int\limits_{\Omega_{\varepsilon,\delta}} |\nabla u_{\varepsilon}^{(s)}|^2\,dx + \int\limits_{\Omega^{(s)}}\{\lambda|u_{\varepsilon}^{(s)}|^2 + 2fu_{\varepsilon}^{(s)}\}\,dx +$$

$$+\int\limits_{\partial\Omega_{s,\delta}}\sigma^{(s)}|u_{\varepsilon}^{(s)}|^2\,d\Gamma \geqslant \int\limits_{\Omega_{\varepsilon,\delta}}\Big\{\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial x_i}\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial x_k} +$$

$$+ cu_{\varepsilon}^2\Big\}\,dx + \int\limits_{\Omega}\{\lambda bu_{\varepsilon}^2 + 2fbu_{\varepsilon}\}\,dx.$$

Теперь переходим к пределу по $\delta \to 0$ и затем — по $\varepsilon \to 0$. Отсюда с учетом (37), (38) следует (36).

Получаем, что для любой фиксированной функции $w(x) \in H^1(\Omega)$ $\tilde{J}(u) \leqslant \tilde{J}(w)$, т. е. $u(x)$ минимизирует функционал (22). Значит, $u(x)$ является решением задачи (16)—(17). Теорема 2 доказана.

Для доказательства теоремы 1 заметим, что решения задач (1)—(4) и (6)—(8) соответственно представляются в виде

$$u^{(s)} = \int\limits_0^{\infty} e^{-t\lambda}\,dE_{\lambda}^{(s)}P^{(s)}\varphi \quad \textbf{(46)}; \qquad u = \int\limits_0^{\infty} e^{-t\lambda}\,dE_{\lambda}\varphi, \tag{47}$$

где $P^{(s)}$ — оператор ограничения $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega^{(s)})$; $E_{\lambda}^{(s)}$ и E_{λ} — спектральные семейства операторов, порождаемых задачами (1)—(4) в $L_2(\Omega)$ и (6)—(8) в $L_2^{b(x)}(\Omega)$ (с весом $b(x)$, [5]). Из теоремы 2 и леммы о сходимости разложений единицы [5] следует, что, переходя к пределу по s в (46), получаем (47). Соответствующие вычисления полностью аналогичны [5]. В общем случае тензор $\{a_{ik}\}$ и функционал $c(x)$ выражаются через достаточно сложные характеристики (10) и (11) множества $F^{(s)}$, но в некоторых частных случаях их удается выразить через более простые характеристики. Рассмотрим типичный пример структуры, близкой к периодической. Отметим, что осреднение уравнений в частных производных для периодических структур изучалось многими авторами [3, 6].

Пусть $f(x) \geqslant 0$ — некоторая функция из класса $C_1(\Omega)$. Рассмотрим множество $F^{(s)} \subset \Omega \subset R^3$, состоящее из шаров $F_{\alpha}^{(s)}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, s)$ радиуса $r_{\alpha} = f(x^{\alpha})\,s^{-1/3}$ с центрами $x^{\alpha} \in \Omega$. Точки x^{α} образуют периодическую решетку с периодами $\delta_k = \gamma_k s^{-1/3}$ вдоль оси Ox_k, $k = 1, 2, 3$. Для того чтобы различные шары $F_{\alpha}^{(s)}$ не пересекались, потребуем, чтобы выполнялось условие $M = \sup\limits_{x\in\Omega} f(x) < \min\gamma_k/2$ **(48).**

Таким образом, в области Ω выделены ячейки $P_{\alpha}^{(s)}$ — параллелепипеды $\Pi_{\alpha}^{(s)}$, из которых выброшены шары $F_{\alpha}^{(s)}$ радиуса r_{α}.

Пусть $\sigma^{(s)}(x) = \sigma(x) s^{-1/3}$, где $\sigma(x) \in C_1(\Omega)$. В этом случае функция $c(x)$ вычисляется по формуле $c(x) = \frac{4\pi f^2(x)\sigma(x)}{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}$ **(49)**.

Растянув $P_\alpha^{(s)}$ в $s^{1/3}$ раз, получаем ячейку P_{x^α}: параллелепипед $\prod = \{x \in R^3 : |x_k| < \gamma_k/2,\ \ k = 1, 2, 3\}$ с выброшенным шаром $F_{x^\alpha} = \{x \in \prod : \sum_{k=1}^{3} x_k \leqslant f(x^\alpha)\}$. В области P_{x^α} рассмотрим функцию $u_k(x) \in H^1(P_{x^\alpha})$, являющуюся решением краевой задачи:

$$\Delta u_k(x) = 0,\ x \in P_{x^\alpha};\ u_k(x) = \pm \frac{\gamma_k}{2},\ x \in \partial P_{x^\alpha} \cap \left\{x : x_k = \pm \frac{\gamma_k}{2}\right\}; \quad (50)$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial \nu}(x) = 0,\ x \in \partial P_{x^\alpha} \diagdown \left\{x : x_k = \pm \frac{\gamma_k}{2}\right\},$$

которая имеет единственное решение. Положим

$$A_{ik} = \int_{P_{x^\alpha}} (\nabla u_i, \nabla u_k)\, dx.$$

Тогда для рассматриваемого множества $F^{(s)}$ компоненты тензора $\{a_{ik}(x)\}$ в области Ω вычисляются по формулам $a_{ik}(x) = \frac{f^3(x)}{\gamma_1\gamma_2\gamma_3} A_{ik}\delta_{ik}$ **(51)**, где δ_{ik} — символ Кронекера.

Список литературы: 1. *Берлянд Л. В.* Осреднение уравнений линейной теории упругости в областях с мелкозернистой границей // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1983. Вып. 40. С. 16—24. 2. *Хруслов Е. Я.* Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи при измельчении границы области // Мат. сб. 1978. **106**, № 4. С. 604—621. 3. *Жиков В. В.*, *Козлов С. М.*, *Олейник О. А.* Усреднение параболических операторов // Тр. Моск. мат. об-ва. 1982. **45**. С. 182—236. 4. *Хруслов Е. Я.* О сходимости решений второй краевой задачи в слабосвязанных областях // Теория операторов и функцион. пространствах и ее прил. К., 1981. 143 с. 5. *Берлянд Л. В.* О сходимости разложений единицы операторов второй краевой задачи // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1979. Вып. 35. С. 3—8. 6. *Бердичевский В. Л.* Пространственное осреднение периодических структур // Докл. АН СССР. 1975. **22**, № 3. С. 565—567.

Поступила в редколлегию 18.11.86.