УДК 517.994

Л. В. ФАРДИГОЛА

СВОЙСТВО T-УСТОЙЧИВОСТИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В СЛОЕ

Нелокальные краевые задачи в слое $\Pi(T) = \boldsymbol{R}^n \times [0, T]$ исследовались во многих работах [1—4 и др.]. Это вызвано, в первую очередь, возникновением подобных задач как математических моделей реальных процессов [5].

После получения ответа на центральный вопрос — о корректной постановке рассматриваемой задачи — возникает потребность выяснить характер зависимости решения от тех или иных параметров задачи. Нами исследована следующая задача с интегральным краевым условием

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P(-iD_x)\, u(x, t), \quad (x, t) \in \Pi(T); \tag{1}$$

$$\int_0^T B(-iD_x)\, u(x, t) \exp\{-at\}\, dt = u_0(x), \quad x \in \boldsymbol{R}^n. \tag{2}$$

Здесь $P(\sigma)$, $B(\sigma)$ — произвольные полиномы с постоянными комплексными коэффициентами ($\sigma \in \boldsymbol{R}^n$), $a \in \boldsymbol{C}$.

Критерий корректности (см. ниже определение 1) задачи (1), (2) получен нами в работе [6]. Там же выяснено, что задача (1), (2) может оказаться корректной при некотором значении $T = T_0$ и не быть корректной при всех других достаточно близких значениях T. Однако, если при некотором значении $T = T_0$ такая задача корректна, то она корректна при всех достаточно малых значениях $T > 0$. Таким образом, если множество $\tau(P, B, a)$ тех значений $T > 0$, для которых задача (1), (2) корректна, не пусто, то оно обязательно содержит внутренние точки. Спрашивается, имеет ли место в таких точках непрерывная зависимость решения $u(x, t; T)$

и его производных) корректной задачи (1), (2) от T и является ли устойчивой относительно изменения T зависимость гладкости решения $u(x, t; T)$ от гладкости краевой функции $u_0(x)$. Основной результат настоящей работы состоит в утвердительном ответе на этот вопрос.

Обозначим $H_m = \{f(x) \in C^m(\boldsymbol{R}^n) : \|f\|_m = \max_{|\alpha|<m} \sup_{\boldsymbol{R}^n} \{|D^\alpha f(x)|\} < \infty\}$; $\Delta(\sigma; T) \equiv B(\sigma)[\exp\{T(P(\sigma) - a)\} - 1]/(P(\sigma) - a)$; $U(T_0, \delta) = \{T > 0 : |T - T_0| < \delta\}$.

Определение 1. *Задача* (1), (2) *называется корректной в слое* $\Pi(T)$, *если для* $\forall m \in \boldsymbol{N}\, \exists m_1 \in \boldsymbol{N}\, \exists C > 0$ *такие, что для* $\forall u_0(x) \in H_{m_1}$ *задача* (1), (2) *имеет единственное решение* $u(x, t) \in H_m$ (*при* $\forall t \in [0, T]$), *причем* $\sup_{t \in [0, T]} \| u(x, t) \|_m \leqslant C \| u_0(x) \|_{m_1}$.

Задача (1) — (2) корректна в слое $\Pi(T)$ тогда и только тогда, когда $\Delta(\sigma; T) \neq 0$, $\forall \sigma \in \boldsymbol{R}^n$ [6].

Определение 2. *Задача* (1), (2) *называется* T-*устойчивой в слое* $\Pi(T_0)$, *если* $\exists \delta < 0$ *такое, что для* $\forall T \in U(T_0, \delta)$

1) *задача* (1), (2) *корректна, причем параметры* $m_1 = m_1(m)$ *и* $C = C(m)$ (*см. определение 1*) *не зависят от* T;

2) *если* $u(x, t; T) \in H_m$ — *решение этой задачи при* $u_0(x) \in H_{m_1}$, *то* $\sup_{t \in [0, \min\{T, T_0\}]} \| u(x, t; T) - u(x, t, T_0) \|_m \leqslant C' |T - T_0| \| u_0(x) \|_{m_1}$ *где постоянная* $C' > 0$ *не зависит от* T.

Теорема. *Задача* (1), (2) T-*устойчива в слое* $\Pi(T_0)$, *если* $T_0 \in \operatorname{int} \tau(P, B, a)$.

Доказательство. Аналогично [6] получаем степенные по $\sigma \in \boldsymbol{R}^n$ оценки сверху (равномерные относительно $t \in [0, T]$, $T \in U(T_0, \delta')$) модулей функции $R(\sigma, t; T) \equiv \exp\{tP(\sigma)\}/\Delta(\sigma; T)$ и ее производных). Применяя теорему Лагранжа (по $T \in U(T_0, \delta')$), получаем оценки сверху модулей функции $R(\sigma, t; T) - R(\sigma, t, T_0)$ и ее производных, степенные относительно $\sigma \in \boldsymbol{R}^n$, линейные относительно $|T - T_0|$ и равномерные относительно $t \in [0, \min\{T, T_0\}]$, $T \in U(T_0, \delta')$. Отсюда, так же, как в работе [6] корректность, получаем T-устойчивость задачи (1), (2). Теорема доказана.

Замечание. В [6] установлена структура множества $\tau(P, B, a)$: если $\tau(P, B, a) \neq \varnothing$, то это множество является объединением отрезков (в том числе, возможно, и изолированных точек). Возникает вопрос о зависимости от T решения $u(x, t; T)$ в точках $T_0 \in \tau(P, B, a)$, не являющихся внутренними, но являющихся предельными для внутренних точек $\tau(P, B, a)$. Это исследование можно провести по той же схеме, введя аналогично определению 2 понятие T-устойчивости справа (слева) решения корректной задачи (1), (2) в слое $\Pi(T_0)$. Результат этого исследования совершенно аналогичен результату доказанному в теореме.

Как следствие полученной теоремы и установленной в [6] структуры множества $\tau(P, B, a)$ можно сформулировать следующие утверждения. Обозначим $E_1 = \{\sigma \in \boldsymbol{R}^n : \operatorname{Re} P(\sigma) = \operatorname{Re} a\}$, $E_2 = \{x \in \boldsymbol{R} : x = \operatorname{Im} P(\sigma) \wedge \sigma \in E_1\}$.

Утверждение 1. *Если* $E_1 = \varnothing$ *и* $B(\sigma) \neq 0$ $(\forall \sigma \in \boldsymbol{R}^n)$, *то задача* (1), (2) *T-устойчива в слое* $\Pi(T_0)$ *при* $\forall T_0 > 0$.

Утверждение 2. *Если* $E_2 = \{c_1, \ldots, c_l\}$ *и* $B(\sigma) \neq 0$ $(\forall \sigma \in \boldsymbol{R}^n)$, *то задача* (1), (2) *T-устойчива в слое* $\Pi(T_0)$ *при всех* $T_0 > 0$, *кроме счетного множества* $E = \bigcup_{c \in E_2 \{\operatorname{Im} a\}} \{2\pi/(c - \operatorname{Im} a)\} \boldsymbol{Z}$ *изолированных точек.*

Автор благодарит В. М. Борок за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Список литературы: 1. *Борок В. М.* Крчтерий абсолютной $\overline{C}$-устойчивости уравнений в частных производных //Диф. уравнения. 1988. **24,** № 3. С. 438—444. 2. *Мамян А. Х.* Общие граничные задачи в слое // Докл. АН СССР. 1982. **287,** № 1. С. 292—296. 3. *Макаров А. А.* О необходимых и достаточных условиях корректной разрешимости краевой задачи в слое для систем дифференциальных уравнений в частных производных // Диф. уравнения 1981. **17,** № 2. С. 320—327. 4. *Савченко Г. Б.* О корректности одной краевой задачи для систем линейных дифференциальных уравнений // Диф. уравнения. 1978. **14,** № 11. С. 2082—2085. 5. *Нахушев А. М.* О нелокальных краевых задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями // Диф. уравнения. 1985. **21,** № 1. С. 92—101. 6. *Фардигола Л. В.* Критерий корректности в слое краевой задачи с интегральным условием // Укр. мат. журн. 1990. **42,** № 11. С. 1546-1551.

Поступила в редколлегию 20.06.89