УДК 517.55

Д. Е. ПАПУШ

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ С ДИСКРЕТНЫХ МНОЖЕСТВ В C^l

Построению целых функций в C^l с заданной оценкой роста и с заданными значениями в точках дискретного множества (в узлах интерполяции) посвящены работы [1—3 и др.]. В этих работах множество узлов интерполяции либо задавалось как множество общих нулей l целых в C^l функций, либо предполагалось «близким» в том или ином смысле к точкам целочисленной решетки.

Для решения подобных задач мы применили в [4] другой метод, при котором узлы интерполяции характеризовались поведением построенного по ним специальным образом канонического произведения, а интерполирующая функция искалась в виде некоторого многомерного аналога ряда Лагранжа, традиционно используемого в теории интерполяции функций одного переменного. Целью настоящей работы, продолжающей [4], является получение для указанной задачи интерполяции условий разрешимости чисто геометрического характера. Основ-

ным результатом является теорема 3, в которой доказан аналог теоремы Б. Я. Левина о разрешимости задачи интерполяции в случае, когда множество узлов интерполяции есть R-множество.

§ 1. Постановка задачи и предварительные результаты. Пусть $A=\{a^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ — дискретная последовательность точек пространства $\boldsymbol{C}^l$ с конечным показателем сходимости ρ*. Введем в рассмотрение функцию

$$\pi(z)=\prod_{k=1}^{\infty} G_p(<z, a^{(k)}|a^{(k)}|^{-2}>),$$

где $G_p(u)=(1-u)\exp\left(u+\frac{u^2}{2}+\cdots+\frac{u^p}{p}\right)$ — первичный множитель Вейерштрасса, $\langle z, w\rangle = z_1\bar{w}_1+\cdots+z_l\bar{w}_l$ — эрмитово скалярное произведение в $\boldsymbol{C}^l$, а число $p\in \boldsymbol{Z}^+$ выбрано так, что $\sum^{\infty} |a^{(k)}|^{-p}=\infty$, $\sum^{\infty} |a^{(k)}|^{-p-1}<\infty$. Как было показано в [5], $\pi(z)$ — целая функция порядка ρ. Обратим внимание на то, что нулевое множество функции $\pi(z)$ есть счетное объединение гиперплоскостей H_k, для которых точки $a^{(k)}$ являются основаниями перпендикуляров, опущенных из начала координат на H_k.

Пусть $\rho(r)\to\rho$ — некоторый уточненный порядок**. Через $L(z)$ мы всюду в дальнейшем обозначаем радиальный индикатор функции $\pi(z)$ относительно $\rho(r)$:

$$L(z)=\overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-\rho(t)}\ln|\pi(tz)|.$$

Отметим, что в силу результата Л. Грумена [6], функция $L(z)$ непрерывна.

Мы будем решать задачу свободной интерполяции с последовательности A в классе целых функций, радиальный индикатор которых относительно $\rho(r)$ не превосходит $L(z)$. Это означает, что нас будут интересовать условия на последовательность A, при которых для всякой числовой последовательности $\{W_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющей условию

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left(\frac{\ln|w_k|}{|a^{(k)}|^{\rho(|a^{(k)}|)}}-L(a^{(k)}|a^{(k)}|^{-1})\right)\leqslant 0, \tag{1}$$

существует целая функция $f(z)$ конечного порядка не выше ρ и такая, что

$$1)\ f(a^{(k)})=w_k \forall k=1,2,\ldots;$$
$$2)\ L_r(f;z)=\overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-\rho(t)}\ln|f(tz)|\leqslant L(z).$$

---

* $\rho \overset{\mathrm{def}}{=} \inf\left\{\lambda\in R^+: \sum^{\infty}|a^{(k)}|^{-\lambda}<\infty\right\}$.

**Уточненным порядком называется функция $\rho(r)\in C^1(R^+)$, удовлетворяющая условиям $\lim\limits_{r\to\infty}\rho(r)=\rho$ и $\lim\limits_{r\to\infty} r\rho'(r)\ln r=0$.

Для указанной интерполяционной задачи автором [4] было доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $A = \{\xi\, a^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ — *последовательность попарно различных точек пространства* C^l *с конечным показателем сходимости* ρ, $\pi(z)$ — *каноническое произведение, построенное по последовательности* A, $\pi_k(z) = \pi(z)\,(|a^{(k)}| - \langle z, a^{(k)}\,|a^{(k)}|^{-1}\rangle)^{-1}$. *Пусть далее выполнены условия* $\pi_k(a^{(k)}) \neq 0$ *и*

$$\varlimsup_{k\to\infty}\left(\frac{\ln|\pi_k(a^{(k)})|}{|a^{(k)}|^{\rho(|a^{(k)}|)}} - L\,(a^{(k)}\,|a^{(k)}|^{-1})\right) = 0. \qquad (2)$$

Тогда для всякой последовательности комплексных чисел $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$, *удовлетворяющей условию (1), существует целая функция* $f(z)$ *конечного порядка не выше* ρ, *решающая интерполяционную задачу (1), (2) и представимая в виде*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_k\,\pi_k(z)\,\omega_k(z)}{\pi_k(a^{(k)})\,\omega_k(a^{(k)})},$$

где $\omega_k(z)$ — *некоторые целые функции, нулевое множество которых есть объединение гиперплоскостей.*

Фигурирующее в теореме 1 условие (2) трудно проверяемо для конкретных последовательностей A. Поэтому естественно возникает вопрос о нахождении более наглядных достаточных условий, при которых разрешима интерполяционная задача {1), 2)}. Решению этого вопроса и посвящена настоящая работа.

Для заданной последовательности A через $n_z(t)$ обозначим число точек этой последовательности, для которых гиперплоскость $H_k = \{z \in C^l\colon \langle z, a^{(k)}\,|a^{(k)}|^{-2}\rangle = 1\}$ пересекает шар $B(z, t) = \{w \in C^l\colon |w - z| < t\}$. Далее для заданного $\delta > 0$ введем множества

$$Z_\delta(z) = \{k \in N\colon ||a^{(k)}| - \langle z, a^{(k)}\,|a^{(k)}|^{-1}\rangle| < \delta\,|z|\};$$

$$\tilde Z_\delta(z) = \{k \in N\colon 0 < ||a^{(k)}| - \langle z, a^{(k)}\,|a^{(k)}|^{-1}\rangle| < \delta\,|z|\}.$$

Положим далее

$$\pi^\delta(z) = \prod_{k \in Z_\delta(z)} \frac{|a^{(k)}| - \langle z, a^{(k)}\,|a^{(k)}|^{-1}\rangle}{(1+\delta)\,|z|};$$

$$\tilde\pi^\delta(z) = \prod_{k \in \tilde Z_\delta(z)} \frac{|a^{(k)}| - \langle z, a^{(k)}\,|a^{(k)}|^{-1}\rangle}{(1+\delta)\,|z|}.$$

Если $z \in H_j$ для некоторой гиперплоскости с основанием перпендикуляра $a^{(j)}$, то $\pi^\delta(z) = 0$; в противном случае $\pi^\delta(z) = \tilde\pi^\delta(z)$.

Лемма 1. *Имеет место оценка*

$$|\ln|\tilde\pi^\delta(z)|| \leqslant \tilde n_z(\delta|z|)\,\ln(1+\delta^{-1}) + \int_0^{\delta|z|} \frac{1}{t}\,\tilde n_z(t)\,dt,$$

где $\tilde n_z(t) = n_z(t) - n_z(0)$.

Доказательство. Заметим, что величина $||a^{(k)}| - \langle z, a^{(k)} \times$ $\times |a^{(k)}|^{-1}\rangle|$ есть в точности расстояние от гиперплоскости H_k до точки z. Поэтому

$$|\ln|\tilde{\pi}^\delta(z)|| \leqslant - \sum_{k \in \tilde{Z}_\delta(z)} \{\ln||a^{(k)}| - \langle z, a^{(k)}|a^{(k)}|^{-1}\rangle| - \ln((1+\delta)|z|)\} =$$

$$= - \int_0^{\delta|z|} \ln t d\tilde{n}_z(t) + \tilde{n}_z(\delta|z|) \ln((1+\delta)|z|).$$

Интегрируя последнее по частям, получаем требуемое.

Положим теперь

$$\pi^\delta(z, w) = \prod_{k \in Z_\delta(z)} \frac{|a^{(k)}| - \langle z+w, a^{(k)}|a^{(k)}|^{-1}\rangle}{(1+\delta)|z|};$$

$$\tilde{\pi}^\delta(z, w) = \prod_{k \in \tilde{Z}_\delta(z)} \frac{|a^{(k)}| - \langle z+w, a^{(k)}|a^{(k)}|^{-1}\rangle}{(1+\delta)|z|}.$$

Тогда $\tilde{\pi}^\delta(z, 0) = \tilde{\pi}^\delta(z)$. При $\delta < 1$ и $|w| < \delta|z|$

$$\ln|\pi^\delta(z, w)| < 0. \tag{3}$$

Теорема 2. *Пусть $A = \{a^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ — последовательность попарно различных точек пространства $\mathbf{C}^l$ с показателем сходимости ρ, причем функция $\pi(z)$, построенная по последовательности A, является функцией вполне регулярного роста* (в.р.р)* *относительно некоторого уточненного порядка $\rho(r) \to \rho$. Пусть, кроме того, для некоторых c_0, α и δ_0 имеет место оценка*

$$n_{a^{(k)}}(t) \leqslant 1 + c_0 t^\alpha |a^{(k)}|^{\rho(|a^{(k)}|) - \alpha} \tag{4}$$

для $t < \delta_0 |a^{(k)}|$ и $k \in N$. Тогда выполнено условие (2), и, следовательно, для любой последовательности $\{w_k\}_{k=1}^\infty$, удовлетворяющей условию (1), разрешима интерполяционная задача {1), 2)}.

Доказательство. Обозначим $\pi_j^\delta(w) = \pi^\delta(a^{(j)}, w)$, $\tilde{\pi}_j^\delta(w) =$ $= \tilde{\pi}^\delta(a^{(j)}, w)$, $q_j^\delta(w) = \pi(a^{(j)} + w)(\pi_j^\delta(w))^{-1}$.

Так как в силу условия (4) $n_{a^{(j)}}(0) = 1$, и, следовательно, $\pi_j^\delta(w)$ и $\tilde{\pi}_j^\delta(w)$ различаются одним множителем, то

$$q_j^\delta(w) = \pi_j(a^{(j)} + w)(\pi_j^\delta(w))^{-1}(1+\delta)^{-1}|a^{(j)}|^{-1}.$$

Заметим сразу, что функция $q_j^\delta(w)$ не имеет нулей в шаре $B(0, \delta|a^{(j)}|)$, и, следовательно, $\ln|q_j^\delta(w)|$ является в этом шаре плюригармонической функцией.

Оценим величину $\ln|q_j^\delta(0)|$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $\pi(z)$ — функция в.р.р., вне некоторого C_0-множества** E_ε и вне шара $B(0, R_\varepsilon)$

* Для целых функций многих переменных имеются два различных определения вполне регулярного роста (см. [7]). Для целых функций, нулевое множество которых есть объединение гиперплоскостей, эти определения эквивалентны (см. [5], теорема 4).

** Определение C_0-множества см. [8].

остаточно большого радиуса R_ε в силу теоремы о сходимости вне исключительных множеств (см. [8], с. 165) имеет место неравенство $|z|^{-\rho(|z|)}\ln|\pi(z)| > L(z|z|^{-1}) - \varepsilon$. Поэтому для w таких, что $a^{(j)} + w \bar{\in} E_\varepsilon$ и $|a^{(j)} + w| > R_\varepsilon$ с учетом (3) справедливо неравенство

$$|a^{(j)} + w|^{-\rho(|a^{(j)}+w|)} \ln|q_j^\delta(w)| > L\left(\frac{a^{(j)} + w}{|a^{(j)} + w|}\right) - \varepsilon$$

для $\delta < 1$, $|w| < \delta|a^{(j)}|$. В силу непрерывности функции $L(z)$ (см. [6]), можно выбрать δ_1 столь малым, что будет выполнена импликация

$$(|w| < \delta_1 |a^{(j)}|, \quad a^{(j)} + w \bar{\in} E_\varepsilon, \quad |a^{(j)} + w| > R_\varepsilon) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |a^{(j)}|^{-\rho(|a^{(j)}|)} \ln|q_j^\delta(w)| > L(a^{(j)}|a^{(j)}|^{-1}) - 2\varepsilon. \tag{5}$$

Воспользуемся следующим утверждением, которое докажем позже, чтобы не прерывать изложение.

Лемма 2. *Если $E \subset \mathbf{C}^l$ — C_0-множество, $\delta > 0$, то при некотором $R_0 > 0$ для всякого $z \in \mathbf{C}^l$ такого, что $|z| > R_0$, найдутся комплексная прямая $\varkappa$, проходящая через точку z, и окружность γ, радиуса меньшего, чем $\delta|z|$, с центром в точке z, лежащая на $\varkappa$, такие, что $\gamma \cap E = \varnothing$.*

В силу этой леммы, примененной к множеству $E = E_\varepsilon$, точке $z = a^{(j)}$ и числу $\delta = \delta_1$, мы получим, что при $|a^{(j)}| > R_0$ указанная окружность найдется в любом шаре $B(a^{(j)}, \delta_1|a^{(j)}|)$. Если теперь $|a^{(j)}| > \max(2R_\varepsilon, R_0)$, $|w| < \delta_1|a^{(j)}|$, то отсюда, учитывая плюригармоничность функции $-\ln|q_j^\delta(w)|$ в шаре $B(0, \delta|a^{(j)}|)$ при $\delta < \delta_1$ и используя принцип максимума модуля для гармонических функций, заключаем о справедливости неравенства (5) при $w = 0$. Следовательно,

$$|a^{(j)}|^{-\rho(|a^{(j)}|)} \ln|b_j^\delta(0)| > L(a^{(j)}|a^{(j)}|^{-1}) - 2\varepsilon. \tag{6}$$

Обозначая $\tilde{n}_j(t) = n_{a(j)}(t) - 1$ и применяя лемму 1 и неравенство (4), имеем

$$|\ln|\pi_j^\delta(0)|| \leqslant \tilde{n}_j(\delta|a^{(j)}|)\ln(1 + \delta^{-1}) + \int_0^{\delta|a^{(j)}|} \tilde{n}_j(t)\frac{dt}{t} \leqslant$$

$$\leqslant c_0\delta^\alpha|a^{(j)}|^{\rho(|a^{(j)}|)}\ln(1 + \delta^{-1}) + c_0|a^{(j)}|^{\rho(|a(j)|)-\alpha}\int_0^{\delta|a^{(j)}|} t^{\alpha-1}dt \leqslant$$

$$\leqslant c_1\delta^{\alpha/2}|a^{(j)}|^{\rho(|a^{(j)}|)}.$$

Так как $\ln|\pi_j(a^{(j)})| = \ln|q_j^\delta(0)| + \ln|\pi_j^\delta(0)| + \ln((1 + \delta)|a^{(j)}|)$, из последней оценки и (6) получаем, что при выборе $\delta < \delta_1$ достаточно малым и $|a^{(j)}| > R_1(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$|a^{(j)}|^{-\rho(|a^{(j)}|)}\ln|\pi_j(a^{(j)})| \geqslant L(a^{(j)}|a^{(j)}|^{-1}) - 3\varepsilon.$$

Переходя к пределу при $j \to \infty$ с учетом произвольности выбора ε, получаем

$$\lim_{j\to\infty}\left(\frac{\ln|\pi_j(a^{(j)})|}{|a^{(j)}|^{\rho(|a^{(j)}|)}} - L(a^{(j)}|a^{(j)}|^{-1})\right) \leqslant 0.$$

Противоположное неравенство для верхнего предела следует из неравенства $|\pi_k(z)| \leqslant \max\{|\pi(z')| : |z - z'| \leqslant 2\}$, которое легко выводится из принципа максимума модуля (см. [4]).

Итак, в условиях теоремы выполняется условие (2), и для завершения доказательства нам остается сослаться на теорему 1.

В заключение данного параграфа докажем лемму 2, представляющую, на наш взгляд, самостоятельный интерес.

Доказательство леммы 2. Будем рассуждать от противного: предположим, что ни для какой комплексной прямой $\varkappa$, проходящей через точку z, указанной в формулировке леммы, окружности γ не существует. Покажем, что это противоречит предположению о том, что E — C_0-множество.

Пусть $E_z = E \cap B(z, \delta|z|)$ и пусть $\boldsymbol{B} = \{b_1, b_2, \ldots\}$ — некоторое покрытие множества E_z шарами $b_j = B(z^{(j)}, r_j)$. Оценим величину $\sum_j r_j^{2l-3/2}$.

Для $\zeta \in S_1 = \{w \in \boldsymbol{C}^l : |w| = 1\}$ через L_ζ обозначим $(2l-1)$-мерную вещественную гиперплоскость, проходящую через точку z перпендикулярно к вектору ζ. Тем самым мы устанавливаем взаимно-однозначное соответствие между сферой S_1 и множеством $(2l-1)$-мерных гиперплоскостей, проходящих через точку z.

Пусть $w \in \boldsymbol{C}^l$. Круговой проекцией точки w на гиперплоскость L_ζ назовем точки пересечения окружности $\{z + e^{i\theta}w, \ \theta \in [0, 2\pi)\}$ с гиперплоскостью L_ζ (таких точек существует ровно две, если точка w не лежит в $(l-1)$-мерной комплексной гиперплоскости $M_\zeta \subset L_\zeta$; в последнем случае круговой проекцией точки w считаем точки $\pm w$). Соответственно круговой проекцией некоторого множества $D \subset \boldsymbol{C}^l$ на L_ζ мы называем объединение круговых проекций всех точек $w \in D$. Для обозначения круговой проекции на гиперплоскость L мы будем использовать $\mathrm{pr}_L(\cdot)$.

Обозначим через R величину $\delta|z|$. В дальнейшем, не нарушая общности, будем считать, что среди элементов покрытия $\boldsymbol{B}$ нет шаров радиуса большего, чем $R/4$.

Заметим, что в силу предположения, сделанного в начале доказательства, всякая окружность γ с центром в точке z, лежащая на комплексной прямой, проходящей через точку z, и имеющая радиус $r \in (R/2, R)$, содержит хотя бы одну точку множества E_z. Поэтому если $\Gamma_z = B(z, R) \setminus B(z, R/2)$, то

$$\mathrm{pr}_{L_\zeta}(E_z \cap \Gamma_z) = L_\zeta \cap \Gamma_z \quad \forall \zeta \in S_1. \tag{7}$$

Обозначим $(2l-1)$-мерную меру Лебега в $\boldsymbol{R}^{2l-1}$ через m и рассмотрим величину

$$J = \sum \int_{S_1} m(\mathrm{pr}_{L_\zeta}(b_j))\, d\sigma(\zeta),$$

где сумма распространяется на все $b_j \in \boldsymbol{B}$, для которых $|z^{(j)} - z| > R/4$, а σ — нормированная мера Лебега на S_1. С одной стороны, в силу (7)

$$J \geqslant \int_{S_1} m(\mathrm{pr}_{L_\zeta}(E \cap \Gamma_z))\, d\sigma(\zeta) \geqslant c_1(l) R^{2l-1}. \tag{7'}$$

другой, величину J можно оценить, посчитав каждое слагаемое, входящее в J, а затем просуммировав результаты. Имеем

$$\int_{S_1} m(\mathrm{pr}_{L_\zeta}(b_j))\, d\sigma(\zeta) = \Big\{ \int_{\{\zeta: d(L_\zeta,\ z^{(j)}) < \rho_j\}} + \int_{\{\zeta: d(L_\zeta,\ z^{(j)}) > \rho_j\}} \Big\} m(\mathrm{pr}_{L_\zeta}(b_j))\, d\sigma(\zeta) = J_{1,j} + J_{2,j}.$$

Здесь $d(L, w)$ — евклидово расстояние от точки w до гиперплоскости L, ρ_j — некоторое положительное число, $\rho_j > r_j$.

Оценим каждый интеграл в отдельности. Для этого заметим, что множество $\Omega = \{z + e^{i\theta} b_j,\ \theta \in [0, 2\pi)\}$ есть тело вращения в $\boldsymbol{C}^l$, получающееся при движении центра шара b_j вокруг точки z по окружности радиуса $|z^{(j)} - z| < 5R/4$. Так как $(2l-1)$-мерная площадь сечения тела гиперплоскостью L_ζ не превосходит $(2l-1)$-мерной площади поверхности этого тела, мы имеем

$$m(\mathrm{pr}_{L_\zeta}(b_j)) \leqslant c_2(l)\, r_j^{2l-2}\, |z^{(j)} - z|.$$

Нетрудно видеть, что $\sigma\{\zeta \in S_1 : d(L_\zeta,\ z^{(j)}) \leqslant \rho_j\} \leqslant c_3(l)\, \rho_j\, |z^{(j)} - z|^{-1}$. Поэтому $J_{1,j} \leqslant c_4(l)\, r_j^{2l-2} \rho_j$.

Более сложной является оценка второго интеграла. Для простоты будем считать, что $L_\zeta = z + \{w \in \boldsymbol{C}^l : \mathrm{Jm}\, w_l = 0\}$. Для $w \in b_j$ оценим разность $|\arg w_l - \arg z_l^{(j)}|$. Имеем

$$|w - z^{(j)}| \leqslant r_j \Rightarrow |w_l - z_l^{(j)}| \leqslant r_j;\ d(L_\zeta,\ z^{(j)}) = |\mathrm{Jm}\, z_l^{(j)}| \geqslant \rho_j.$$

Легко видеть, что тогда $|\arg w_l - \arg z_l^j| \leqslant \mathrm{tg}\, |\arg w_l - \arg z_l^{(j)}| \leqslant r_j \rho_j^{-1}$ (рис. 1); угол φ наибольший, когда $z_l^{(j)} = i\rho_j$; $z_l = (r_j + i\rho_j)$.

Следовательно, в этом случае пересечение $L_\zeta \cap \Omega$ содержится в области $\{z + e^{i\theta} b_j;\quad |\theta - \arg z_l^{(j)}| \leqslant r_j \rho_j^{-1}\}$, $(2l-1)$-мерная площадь поверхности которой не превосходит

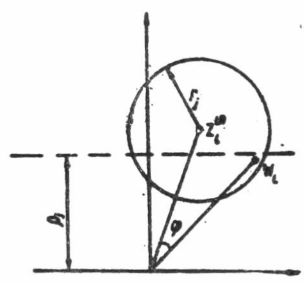

Рис. 1

$$c_5(l)\, r_j^{2l-1}\, |z^{(j)} - z|\, \rho_j^{-1} + c_6(l)\, r_j^{2l-1}.$$

Поэтому $m(\mathrm{pr}_{L_\zeta}(b_j)) \leqslant c_7(l)\, r_j^{2l-1}\, |z^{(j)} - z|\, \rho_j^{-1} \leqslant \frac{5}{4} c_7(l)\, R r_j^{2l-1} \rho_j^{-1}$ и, следовательно, $J_{2,j} \leqslant c_8(l) r_j^{2l-1} R \rho_j^{-1}$. Выбирая $\rho_j = \sqrt{R r_j}$ и суммируя по множеству $\{j \in \boldsymbol{N}: R/4 < |z - z^{(j)}| < 5R/4\}$, получаем оценку $J \leqslant c_9(l) \sum_{b_j \in B} r_j^{2l - \frac{3}{2}} R^{\frac{1}{2}}$.

Сравнивая эту оценку с (7′), имеем, что

$$\sum_{b_j \in B} r_j^{2l - \frac{3}{2}} \geqslant c_{10}(l)\, R^{2l - \frac{3}{2}},$$

откуда в силу произвольности покрытия $\boldsymbol{B}$ следует, что E не является $C_0^{1/2}$-множеством* (и тем более C_0-множеством). Последнее противоречит условию леммы.

§ 2. *Интерполяция с R-множеств в $\boldsymbol{C}^l$.* Введем понятие дискретного R-множества в $\boldsymbol{C}^l$ по аналогии с одномерным случаем (см. [9], с. 259). Именно, дискретную последовательность $A=\{a^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ с конечным показателем сходимости ρ мы будем называть R-множеством относительно некоторого уточненного порядка $\rho(r)\to\rho$, если выполнены следующие условия:

1) каноническое произведение $\pi(z)$, построенное по последовательности A, есть целая функция с правильным множеством «плоских» нулей**;

2) существует положительное число c такое, что шары $B(a^{(k)}, c\,|\,a^{(k)}|^{1-\rho(|a^{(k)}|)/2l})$ не пересекаются.

Следующая теорема, являющаяся в данной работе основной, может рассматриваться как аналог результата Б. Я. Левина об интерполяции с R-множеств на плоскости (см. [9], с. 259—260).

Теорема 3. *Пусть $A=\{a^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ — R-множество в $\boldsymbol{C}^l$ относительно некоторого уточненного порядка $\rho(r)\to\rho$. Тогда для всякой числовой последовательности, удовлетворяющей условию (1), существует решение интерполяционной задачи {1), 2)}.*

Доказательство. Покажем, что в условиях теоремы можно так выбрать новое начало координат — точку O_1, что она, во-первых, попадет в единичный шар с центром в начале координат — точке O и, во-вторых, для системы гиперплоскостей с основаниями перпендикуляров $\{\overrightarrow{O_1a^{(k)}}\}_{k=1}^{\infty}$ будет выполняться оценка (4) теоремы 2. При таком сдвиге начала координат, как нетрудно видеть, условия 1) на R-множество и (1) не изменяться, и мы сможем применить теорему 2. Отметим, что возможность ее применения обусловлена тем обстоятельством, что всякая функция с правильным множеством «плоских» нулей является функцией в.р.р. (см. [10]).

Через B_1 обозначим шар B (0; 1).

Лемма 3. *В условиях теоремы 3 существует точка $O_1\in B_1$ и положительные числа σ и $\varkappa$ такие, что при любых натуральных k и j, $k\neq j$, выполняется равенство*

$$B(a^{(k)}, \sigma\,|\,a^{(k)}|^{-\varkappa})\cap H_j=\varnothing,$$

где H_j — гиперплоскость, проходящая через точку $a^{(j)}$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{O_1a^{(j)}}$.

---

* Определение C_0^{α}-множества см. в [8].

** Определение правильного множества «плоских» нулей см. в [10]. Это определение дает условия лишь на геометрию расположения точек последовательности A. В частности, в простом случае $\rho\,\overline{\in}\,\boldsymbol{Z}^+$ оно означает существование плотности точек последовательности A относительно $r^{\rho(r)}$ в «почти каждом» конусе с вершиной в начале координат.

Доказательство леммы 3 мы опускаем. Идея его заключается в том, чтобы для каждого $a^{(k)}$ указать семейство таких областей $T_{k,j}$, что при $a^{(i)} \overline{\in} T_{k,j}$ выполняется вывод леммы, а затем проверить, что сумма объёмов пересечений всех областей $T_{k,j}$ с B_1 за счет выбора чисел σ и $\varkappa$ может быть сделана меньше объёма B_1.

Воспользуемся леммой 3 для доказательства теоремы.

Пусть O_1 — точка, выбранная согласно лемме 3. Обозначим $\overrightarrow{OO_1} = b$, $\tilde{z} = z + b$ и через $\tilde{\pi}(\tilde{z})$ обозначим каноническое произведение, построенное по последовательности точек $\{\tilde{a}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$, $\tilde{a}^{(k)} = a^{(k)} + b$. Нетрудно проверить, что $\tilde{\pi}(\tilde{z})$ будет целой функцией с правильным множеством «плоских» нулей и радиальным индикатором $L(\tilde{z})$. Это следует из того, что правильность множества «плоских» нулей и величина индикатора функции с «плоскими» нулями определяется лишь множеством оснований перпендикуляров к нулевым гиперплоскостям, геометрия которого не меняется при сдвиге начала координат; подробности см. в [10].

Так как функция с правильным множеством «плоских» нулей есть функция в.р.р., для завершения доказательства нам достаточно получить оценку (4) с некоторым $\alpha > 0$. Для получения этой оценки изучим область G_t, образованную точками a такими, что гиперплоскость с основанием перпендикуляра $\overrightarrow{O_1 a}$ пересекает шар $B(a^{(k)}$, Рассмотрим сечение этой области любой двумерной плоскостью, проходящей через точки O_1 и $a^{(k)}$. Кривая Σ, ограничивающая это сечение, образована точками пересечения касательных к кругу радиуса t и центром в точке $a^{(k)}$ в плоскости Π с перпендикулярами, опущенными на касательные из точки O_1. Направляя ось ординат в плоскости Π по прямой $O_1 a^{(k)}$, а ось абсцисс — в перпендикулярном направлении (рис. 2), получим уравнение искомой кривой Σ

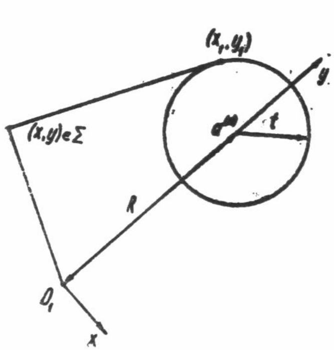

Рис. 2

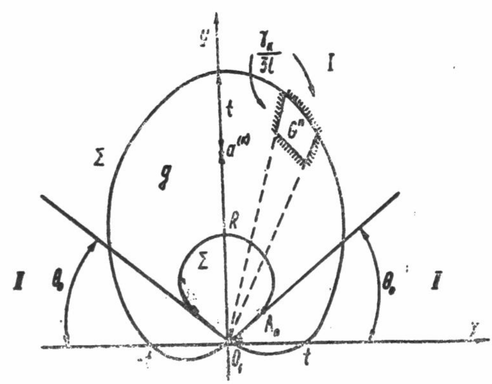

Рис. 3

$$(x^2 + y^2 - Ry)^2 = t^2 (x^2 + y^2), \quad R = |\tilde{a}^{(k)}|,$$

т. е. Σ — улитка Паскаля (рис. 3). Её длина s легко оценивается: 2π

$s = \int_0^2 \sqrt{R^2 + t^2 + 2Rt \sin \psi}\, d\psi \leqslant 2\pi (R + t) \leqslant 4\pi R$ при $t < R$. Заметим, что всякая прямая, проходящая через начало координат O_1, высекает из области g, ограниченной кривой Σ, отрезок длины $2t$.

В дальнейшем рассмотрим отдельно два случая.

1) $\rho \geqslant 2l$. Разобьем область G_t на ячейки G^n следующим образом. В плоскости Π_0, проходящей через точки O_1 и $a^{(k)}$, следы ячеек G^n таковы, как показано на рис. 3. Кроме того, добавим разбиение по всем угловым координатам θ_j, $j = 1, 2, \ldots, 2l - 2$, на отрезки дуг величиной γ_k, где $\gamma_k = c \, | \tilde{a}^{(k)} |^{1 - \rho(|\tilde{a}^{(k)}|)/2l}$. Тогда, как нетрудно видеть, диаметр каждой ячейки не будет превосходить γ_k. В силу сделанного нами предположения ($\rho \geqslant 2l$) функцию $r^{1-\rho(r)2l}$ можно считать монотонно убывающей, и, следовательно, в силу условия 2) на множество A, каждая ячейка G^n может содержать не более одной точки $a^{(j)}$. Оценивая число $\# G^n$ ячеек имеем

$$n_{\tilde{a}^{(k)}}(t) \leqslant \# G^n \leqslant (c_1 R \gamma_k^{-1} + 1)^{2l-1} (c_2 t \gamma_k^{-1} + 1) \leqslant 1 +$$

$$+ c_3 | \tilde{a}^{(k)} |^{\rho(|\tilde{a}^{(k)}|) - 1} t + c_4 | \tilde{a}^{(k)} |^{\rho(|\tilde{a}^{(k)}|)\left(1 - \frac{1}{2l}\right)}. \qquad (8)$$

Оценим последнее слагаемое. Для этого заметим, что согласно выбору точки O_1 по лемме 3 $n_{\tilde{a}^{(k)}}(t) \equiv 1$ при $t < \sigma_1 | \tilde{a}^{(k)} |^{-\varkappa}$. При $t \geqslant \sigma_1 | \tilde{a}^{(k)} |^{-\varkappa}$ имеем $| \tilde{a}^{(k)} |^{\delta} < \sigma_2 t^{\delta} | \tilde{a}^{(k)} |^{\delta(\varkappa+1)} \, \forall \, \delta > 0$. Поэтому при $t < | a^{(k)} |$

$$n_{\tilde{a}^{(k)}}(t) \leqslant 1 + c_3 t \, | \tilde{a}^{(k)} |^{\rho(|\tilde{a}^{(k)}|) - 1} +$$

$$+ c_4 | \tilde{a}^{(k)} |^{\rho(|\tilde{a}^{\cdot k)}|)\left(1 - \frac{1}{2l}\right) - \delta} \sigma_2 t^{\delta} | \tilde{a}^{(k)} |^{\delta(\varkappa+1)} \leqslant 1 +$$

$$+ c_3 t \, | \tilde{a}^{(k)} |^{\rho(|\tilde{a}^{(k)}|) - 1} + c_5 t^{\delta} | \tilde{a}^{(k)} |^{\rho(|\tilde{a}^{(k)}|) - \delta + \delta(\varkappa+1) - \frac{\rho}{4l}}.$$

Выбирая $\delta = \rho (4l (\varkappa + 1))^{-1}$, получаем неравенство

$$n_{\tilde{a}^{(k)}}(t) \leqslant 1 + c_6 t^{\delta} | \tilde{a}^{(k)} |^{\rho(|\tilde{a}^{(k)}|) - \delta}.$$

Итак, оценка (4) с $\alpha = \delta$ и $\sigma = c_6$, а с ней и теорема 3 в рассматриваемом случае доказана.

2) $\rho < 2l$. Получение оценки (4) и в этом случае основано на той же идее, что и в случае 1), однако связано с несколько бо́льшими техническими трудностями. Эти трудности возникают из-за того, что функция $r^{1-\rho(r)/2l}$ является возрастающей и размер ячеек G^n должен уменьшаться при приближении к точке O_1. Для упрощения выкладок дальнейшее доказательство проведем для $\rho(r) \equiv \rho$. Разобьем пространство $\boldsymbol{C}^l$ на три области, которые обозначим соответствующими римскими цифрами, следующим образом:

$$\mathrm{I} = \{ z \in \boldsymbol{C}^l : \operatorname{Re} < z, \tilde{a}^{(k)} > | z |^{-1} | \tilde{a}^{(k)} |^{-1} > \cos \theta_0 \};$$
$$\mathrm{III} = \{ z \in \boldsymbol{C}^l : \operatorname{Re} < z, \tilde{a}^{(k)} > \; < 0 \};$$
$$\mathrm{II} = \boldsymbol{C}^l \setminus (\mathrm{I} \cup \mathrm{III}).$$

Пересечение этих областей с любой двумерной вещественной плоскостью, проходящей через точки O_1 и $a^{(k)}$, по указанной на рис. 3. Проведем оценку числа точек $a^{(j)}$ в пересечении области G_t с каждой из выделенных областей.

В пересечении области G_t с областью I точкой с наименьшим модулем является точка A_0. Считая, что θ_0 таково, что, $|A_0|>0$, и выбрав $\delta_0<\sin\theta_0$, имеем $|A_0|>(\sin\theta_0-\delta_0)R=\alpha_0 R$ при $t<\delta_0 R$. Выберем $\gamma_k=c(\alpha_0 R)^{1-\rho/2l}$. Рассуждая так же, как и в пункте 1), мы получим, что число точек $a^{(j)}$, которые могут попасть в область $G_t \cap \mathrm{I}$, не превосходит правой части неравенства (8) с некоторыми постоянными, зависящими только от величин θ_0 и δ_0.

Получение оценок в областях $\mathrm{II}\cap G_t$ и $\mathrm{III}\cap G_t$ однотипно, поэтому мы ограничимся рассмотрением случая $\mathrm{III}\cap G_t$, а для области $\mathrm{II}\cap G_t$ лишь сформулируем соответствующий результат.

Заметим, что число точек $a^{(j)}$ в области $\mathrm{III}\cap G_t$ заведомо не превосходит числа этих точек в шаре $\boldsymbol{B}(O_1, t)$. Пусть $\beta=1-\rho/2l$. Применим теперь следующую процедуру. Разобьем шаровой слой $B(O_1, t)\setminus B(O_1, t-ct^\beta/3l)$ на ячейки G^n таким образом, чтобы сечение ячейки в плоскости Π_0, проходящей через точки O_1 и $a^{(k)}$, имело вид, указанный на рис. 4. Кроме того, добавим разбиение по всем угловым координатам θ_j, $j=1, 2, \ldots, 2l-2$, на отрезки дуг величиной $ct^\beta/3l$. Тогда диаметр каждой ячейки не превосходит $2ct^\beta/3$. Считая, что $\beta<1$, и, следовательно, функция $r-cr^\beta$ монотонно возрастает при $r>0$, заметим, что всякая ячейка при таком построении содержится в шаре $B(t_0, c|t_0|^\beta)$ для любой точки $t_0\in G^n$. Следовательно, всякая ячейка G^n содержит не более одной точки $a^{(j)}$. Число N таких ячеек, очевидно, не превосходит $\left(\frac{\pi t}{ct^\beta/3l}\right)^{2l-1}\leqslant c_7 t^{\rho\left(1-\frac{1}{2l}\right)}$.

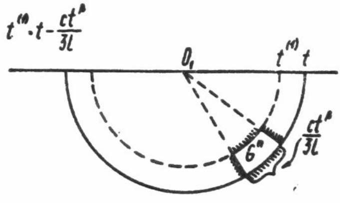

Рис. 4

В дальнейшем, не ограничивая общности, считаем, что $A\cap \cap B(O_1, 2^{1/\beta})=\varnothing$, и, значит, все оценки можно проводить для $t> >2^{1/\beta}$. Обозначим $t^{(1)}=t-ct^\beta/3l$ и проделаем аналогичную процедуру для $t^{(1)}$ и так далее до тех пор, пока величина «смещения» внутрь» — $c(t^{(q)})^\beta/3l$ — не станет меньше, чем $c(t^\beta-1)/3l$. При этом $t^{(q-1)}\geqslant(t^\beta-1)^{1/\beta}$. Пользуясь неравенством $s^\alpha-(s-1)^\alpha\leqslant c_\alpha s^{\alpha-1}$, справедливым при $\alpha>1$ с некоторым c_α для всех $s>1$, получим

$$t-t^{(q-1)}\leqslant t-(t^\beta-1)^{1/\beta}\leqslant c_8 t^{\rho/2l}.$$

Число смещений q легко оценить. Действительно, так как при каждом смещении его величина была не меньше, чем $c(t^\beta-1)/3l$, то $q\leqslant c_8 t^{\rho/2l}(c(t^\beta-1)/3l)^{-1}\leqslant c_9 t^{\rho/2l}(t^\beta-1)^{-1}$. Если при этом $t^{(q)}\leqslant \leqslant 2^{1/\beta}$, то процесс останавливается и число ячеек $\# G^n$, а с ним и число точек $a^{(j)}$ в шаре $B(O_1, t)$ не превосходит

$$\# G^n\leqslant c_7 t^{\rho-\rho/2l}c_9 t^{\rho/2l}(t^\beta-1)^{-1}\leqslant c_{10}t^{\rho-\beta},$$

так как $t^\beta - 1 \geqslant t^\beta/2$. Если же $t^{(q)} > 2^{1/\beta}$, то, обозначив $t_1 = t^{(q)}$, повторим ту же процедуру для $t = t_1$ и т. д. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока число t_{j+1}^β, $t_{j+1}^\beta \leqslant t_j^\beta - 1 \leqslant t_{j-1}^\beta - - 2 \leqslant \ldots \leqslant t^\beta - j - 1$ не станет меньше 2. Следовательно, не позже, чем на $([t^\beta] - 2)$-м шаге процесс оборвется. Так как на каждом шаге число ячеек $\# G^n$ не превосходит величины $c_{10}t^{\rho-\beta}$, общее число ячеек $\# G^n_{\mathrm{III}}$ не превосходит $c_{10}t^{\rho-\beta}([t^\beta] - 2) \leqslant c_{10}t^\rho$. Следовательно, и в области $G_t \cap \mathrm{III}$ содержится не более $c_{10}t^\rho$ точек последовательности A.

Аналогичная процедура для области $G_t \cap \mathrm{II}$ дает оценку $\# G^n_{\mathrm{II}} \leqslant \leqslant c_{11}R^{\rho-1}t$. Окончательно получаем, что число точек последовательности A в области G_t не превосходит

$$n_{a(k)}(t) \leqslant 1 + c_{12}t^\delta R^{\rho-\delta} \text{ с } \delta = \rho(4l(\varkappa + 1))^{-1},$$

где число $\varkappa$ выбрано согласно лемме 3. Таким образом, снова получена оценка (4) с $\sigma = c_{12}$ и $\alpha = \delta$. Для завершения доказательства нам осталось сослаться на теорему 2.

В заключение автор выражает благодарность проф. Л. И. Ронкину за внимание к работе.

Список литературы: 1. *Логвиненко В. Н.* Об интерполировании целыми функциями многих комплексных переменных//Докл. АН СССР. 1977. 234, № 2. С. 302—304. 2. *Berenstein C. A., Taylor B. A.* Interpolation problems in C^n with applications to harmonicanalysis//J. Anal. Math. 1980. 38. P. 188—254. 3. *Gruman L.* Interpolation in spaces of entire functions in C^n//Canad. Math. Bull. 1976. 19, № 1. P. 109—112. 4. *Папуш Д. Е.* Об аналоге ряда Лагранжа для последовательности точек в C^l//Теория операторов и субгармонии функции. 1991. С.85—93. 5. *Папуш Д. Е.* О росте целых функций с «плоскими» нулями//Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1987. 48. С. 117—125. 6. *Gruman L.* The regularitu of growth of entire functions whose zeros are hyperplanes // Arkiv. Mat. 1972. 10, № 1. S. 23—31. 7. *Ронкин Л. И.* Целые функции//Итоги науки и техники. Сер. Совр. пробл. мат. Фундам. напр. 1986. 9. С.5—36. 8. *Азарин В. С.* Об асимптотическом поведении субгармонических функций конечного порядка//Матсборник. 1979. 108 (150). С.147—167. 9. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М., 1956. 632 с. 10. *Папуш Д. Е.* Целые функции нескольких комплексных переменных с правильным множеством «плоских» нулей//Сиб. мат. журн. 1991. С.120—130.

Поступила в редколлегию 13.12.89