УДК 517.535.4

Е. Н. СЕРГИЕНКО

О РОСТЕ ФУНКЦИЙ, ПРЕДСТАВИМЫХ В ВИДЕ РАЗНОСТИ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ И ДОПУСКАЮЩИХ СПЕЦИАЛЬНУЮ ОЦЕНКУ СНИЗУ

В 1960 г. В. И. Мацаев [1] доказал ряд теорем о росте целых функций, допускающих некоторые оценки снизу. В работах [2] — [4] эти теоремы были усилены и обобщены на случай мероморфных функций. В настоящей работе результаты [3] обобщаются на функции, представимые в виде разности субгармонических.

Обозначим через U класс функций $u(z)$, представимых в форме $u(z)=u_1(z)-u_2(z)$, где $u_1(z)$ и $u_2(z)$ — субгармонические во всей плоскости функции, причем их риссовские массы $\mu_1(E)$ и $\mu_2(E)$ сосредоточены на непересекающихся множествах.

Пусть $C(0, r)=\{z:|z|<r\}$, $n_u(r)=\mu_2[C(0, r)]$; $m_u(r)=\frac{1}{2\pi}\times$

$$\times\int_0^{2\pi} u^+(re^{i\varphi})\, d\varphi;\ N_u(r)=\int_0^r [n_u(t)-n_u(0)]\frac{dt}{t}+n_u(0)\ln r;\ T_u(r)=$$
$$=m_u(r)+N_u(r).$$

Функции $N_u(r)$ и $T_u(r)$ являются [5, гл. II] неубывающими и выпуклыми относительно $\ln r$. Функция $T_u(r)$ называется неванлинновской характеристикой функции $u(z)\in U$.

Введем для функций $u(z)\in U$ аналог неванлинновского дефекта δ [6], [7] в ∞, полагая

$$\delta_u=1-\varlimsup_{r\to\infty}\frac{N_u(r)}{T_u(r)}=\varliminf_{r\to\infty}\frac{m_u(r)}{T_u(r)}.$$

Для функций $u(z)$ справедливы следующие утверждения, обобщающие известные теоремы Р. Неванлинны [8], [7, с. 55], Ж. Валирона [9], Эдрея и Фукса [10], [7, с. 55—58].

Лемма 1. *Пусть* $l > 1$, *тогда* $\frac{1}{r}\int\limits_0^r M_u^+(t)\,dt \leqslant C(l)\ \ T_u(l\,r)$, *где* $C(l) > 1$, $M_u(t) = \max\limits_{|z|=t}\{u(z)\}$,

Лемма 2. *Пусть* $T_u(r) < K\ r^{\rho}$ *при* $r > 1$. *Тогда существует последовательность* $R_k \to +\infty$ *такая, что* $u(R_k e^{i\varphi}) \geqslant -CR_k^{\rho}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

Лемма 3. *Пусть* $l > 1$, $0 < \delta < \pi$, $r > 1$. *Тогда для любого измеримого множества* $E_r \subset [-\pi,\ \pi]$, $\mathrm{mes}\ E_r = \delta$, *выполнено неравенство* $\int\limits_{E_r} u^+(r\,e^{i\varphi})\,d\varphi \leqslant Q(l,\ \delta)\,T_u(l\,r)$, где $Q(l,\ \delta) = \frac{6l}{l-1}\,\delta \ln \frac{2\pi e}{\delta}$.

Доказательства лемм 1, 2, 3, опускаем, так как переход от случая $u(z) = \ln|f(z)|$, где $f(z)$ — мероморфная функция, к общему случаю $u(z) \in U$ не вызывает дополнительных трудностей.

Нам понадобится также следующее утверждение [11].

Лемма 4. *Если* $r(z)$ — *неотрицательная, гармоническая при* $\mathrm{Jm}\,z > 0$ *и непрерывная при* $\mathrm{Jm}\,z \geqslant 0$ *функция, то сходится интеграл* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{r(t)}{1+t^2}\,dt$.

Обозначим через U^+ класс функций $u(z)$, представимых в форме $u(z) = u_1(z) - u_2(z)$, где $u_1(z)$ и $u_2(z)$ — субгармонические в полуплоскости $\mathrm{Jm}\,z \geqslant 0$ функции.

Положим $A_u(R) = \frac{1}{\pi}\int\limits_1^R \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}\right)[u^+(t) + u^+(-t)]\,dt$; $B_u(R) = \frac{2}{\pi R}\int\limits_0^{\pi} u^+(re^{i\varphi})\ \sin\varphi\ d\varphi$; $C_u(R) = 2\iint\limits_{C^+(0,\,R)/C^+(0,\,1)} y\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}\right)\ \mu_2(dz)$;

$S_u(R) = A_u(R) + B_u(R) + C_u(R)$, где $C^+(0,\ t)$ — верхний полукруг радиуса t.

Эти характеристики являются естественными аналогами характеристик Р. Неванлинны [12] функций, мероморфных в полуплоскости. Легко получить такое обобщение представления Р. Неванлинны функций с ограниченной характеристикой S [12], [7, с. 382].

Лемма 5. *Если функция* $u(z) \in \dot{U}^+$ *и* $S_u(R) = O(1)$, *то*

$$u(z) = \iint\limits_{\Pi} \ln\left|\frac{z-\bar{\zeta}}{z-\zeta}\right|\ [\mu_2(d\zeta) - \mu_1(d\zeta)] + \frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(t)}{|z-t|^2}\,dt + ky,$$

причем все интегралы сходятся абсолютно.

Из теоремы 3.2 в [7, гл. VI] следует такое утверждение:

Лемма 6. *Если выполнены условия леммы 5, то равномерно относительно* φ, $0<\varphi<\pi$ *для* $r \bar{\in} A \subset [1, +\infty)$, $\int\limits_A d(\ln r) < < \infty$, *выполнено* $u(z) = \eta y + 0(r)$, $r \to \infty$.

О функции $u(z)$ класса U, удовлетворяющей во всей плоскости неравенству $u(z) \geqslant -C_0 \frac{r^\alpha}{|\sin\varphi|^k}$, $k \geqslant 0$, $C_0 > 0$, $\alpha > 0$, $z = re^{i\varphi}$, будем говорить, что она имеет порядок убывания α и принадлежит классу $U_{\alpha, k}$.

Целью настоящей работы является получение оценки характеристики $T_u(r)$ для функций класса $U_{\alpha, k}$ при различных α. Сначала рассмотрим случай $\alpha > 1$.

Вначале установим оценку сверху характеристики $m_u(r)$, справедливую вне некоторого исключительного множества.

Теорема 1. *Пусть функция* $u(z) \in U_{\alpha, k}$ *при* $\alpha > 1$, *а риссовская масса* $\mu_1(E)$ *удовлетворяет условию*

$$\iint\limits_{\varepsilon(R, \tau)} \frac{|y|}{1+r^2} \mu_1(d\,z) \leqslant C_0 \frac{R^{\alpha-\beta}}{|\sin\tau|^k}, \quad 1 < \beta < \min\{2, \alpha\}, \tag{1}$$

где $\varepsilon(R, \tau) = \left\{z : |z| \leqslant R, \left|\varphi \pm \frac{\pi}{2}\right| \leqslant \frac{\pi}{2} - \tau\right\}$, $0 < \tau < \frac{\pi}{2}$. *Тогда для любых чисел* $p \in (0, 1)$, $\delta \in (0, \pi)$, $l > 1$, *найдутся такие число* $C(p)$ *и множество* A, *удовлетворяющие условию*

$$m^*(A) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\operatorname{mes}\{A \cap [0, r]\}}{r} < p, \tag{2}$$

что неравенство $m_u(r) \leqslant C(p) \frac{r^\alpha}{\delta^{k+2}} + Q(l, \delta) T_u(l\, r)$, *в котором* $Q(l, \delta) = [6l\delta/(l-1)] \cdot \ln(2\pi e/\delta)$, *выполнено при* $r \bar{\in} A$.

Оценка [2] устанавливается тем же способом, что и неравенство (28) в работе [3] с использованием лемм 1,3 и условия 1.

Используя оценку (2) и метод доказательства теорем 1 и 2 в [3], можно получить такое их обобщение.

Теорема 2. *Пусть функция* $u(z)$ *удовлетворяет условиям теоремы 1 и выполнено одно из условий.*

1) $\delta_u > 0$

2) *категория* $N_u(r)$ *меньше категории* $T_u(r)$. *Тогда* $T_u(r) < C \times (r^\alpha + 1)$ *для всех* r.

При $\alpha < 1$ рассмотрим класс $U_{\alpha,\alpha}$, т. е. функции $u(z) \in U$ и удовлетворяющие неравенству: $u(z) \geqslant -C_1 \left(\frac{r}{|\sin\varphi|}\right)^\alpha$.

Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть* $u(z) \in U_{\alpha,\alpha}$. *Если* $\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|y|}{1+r^2} \mu_1(dz) \leqslant C_1$,

и выполнено одно из условий:

а) $\delta_u > 0$,

б) *категория* $N_u(r)$ *меньше категории* $T_u(r)$, *то*

$$1)\ T_u(r) \leqslant C(r+1);\ 2) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|u(t)|}{1+t^2}\, dt < +\infty;$$

$$3)\ \lim_{\substack{r\to\infty \\ r \overline{\in} A}} \frac{u(re^{i\varphi})}{r} = \begin{cases} K_1 \sin\varphi, & 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \\ K_2 \sin\varphi, & \pi \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \end{cases} \quad \text{где} \quad A \subset [0, \quad +\infty],$$

$m^*(A) = 0$.

Доказательство. Введем в верхней полуплоскости $\Pi = \{\mathrm{Jm}\zeta > 0\}$, следуя В. И. Мацаеву [13], функции

$$\varphi_{1,2}(\zeta) = \zeta \pm e^{i\frac{\pi}{2}(1-\gamma)}(\zeta + i)^\gamma,\ \zeta = \xi + i\eta = \rho e^{i\theta}. \tag{3}$$

При $0 < \gamma < 1$ эти функции однолистны. Образы Π при этих отображениях обозначим через D_1 и D_2 соответственно. Множество D_1 содержится в верхней полуплоскости, а D_2 объемлет верхнюю полуплоскость. Функции $v_{1,2}(\zeta) = u[\varphi_{1,2}]$ принадлежат U, так как $u(z) \in U_{\alpha,\alpha}$, допускают асимптотические оценки снизу $v_1(\zeta) \geqslant -C_1|\zeta|^{(2-\gamma)\alpha}$, $\mathrm{Jm}\,\zeta \geqslant 0$, $v_2(\xi) \geqslant -C_2|\xi|^{(2-\gamma)\alpha}$, $-\infty < \xi < +\infty$.

Обозначим через $\zeta = \psi_2(z)$ функцию, обратную к $z = \varphi_2(\zeta)$. Из (3) следует, что $\zeta = \varphi_2(z) = z + e^{i\frac{\pi}{2}(1-\gamma)} z^\gamma [1 + 0(1)]$, $\xi = y + r^\gamma Q(z) \cdot [1 + 0(1)]$, $0 < q \leqslant Q(z) \leqslant 1$. (4)

Используя полученные соотношения и оценки, лемму 2, теорему 2 и применяя методы, изложенные в [2], [3], можно доказать также утверждения

Лемма 7. *Справедлива оценка* $T_u(r) = O(r)$, $r \to \infty$.

Лемма 8. *Сходится интеграл* $\iint\limits_\Pi \frac{\xi}{1+\rho^2} \mu_2'(d\zeta)$, *где* $\mu_j'(d\zeta)$ — *риссовская масса функции* $u_j[\varphi_2(\zeta)]$, $j = 1, 2$.

Лемма 9. *Величины* $A_{v2}(\rho)$, $C_{v2}(\rho)$ *ограничены.*

Покажем теперь, что ограничена и характеристика $S_{v2}(\rho)$. Известно [7, с. 43], что функция $S_u(R)$ с точностью до ограниченного слагаемого является неубывающей функцией. Поэтому достаточно показать, что верно соотношение $\int\limits_\rho^{2\rho} S_{v2}(t)\, dt = O(\rho)$, которое будет следовать из того, что $\mathrm{I}(\rho) = \int\limits_\rho^{2\rho} B_{v2}(t)\, dt = O(\rho)$.

Имеем $B_{v2}(t) = \frac{1}{\pi t}\int\limits_0^\pi v_2^+(te^{i\theta}) \sin\theta d\theta$; $\mathrm{I}(\rho) = \int\limits_\rho^{2\rho} B_{v2}(t)\, dt \leqslant \frac{1}{\pi\rho} \times \int\limits_\rho^{2\rho}\int\limits_0^\pi v_2^+(t\, e^{i\theta}) \sin\theta\, d\theta dt \leqslant \frac{1}{\pi\rho^2} \iint\limits_\varepsilon v_2^+(\zeta)\, d\xi\, d\eta$, где $\varepsilon = \{\zeta : \rho < |\zeta| <$

$< 2\rho,\ 0 < \theta < \pi\}$. Учитывая определение функции $v_2(\zeta)$, получаем $\mathrm{I}(\rho) \leqslant \frac{1}{\pi\rho^2} \iint\limits_{\varepsilon} u^+[\varphi_2(\zeta)]\, d\xi\, d\eta = \frac{1}{\pi\rho^2} \iint\limits_{\varepsilon'} u^+(z) |\psi_2'(z)|^2\, dx\, dy$, где ε' — образ множества ε при отображении $z = \varphi_2(\zeta)$. Из [3] следует, что при достаточно больших $|\zeta|$ имеем $|\psi_2'|^2 \leqslant 2$, а множество ε' содержится в кольце $\varepsilon'' = \{z : \rho/2 \leqslant |z| \leqslant 2\rho\}$. Поэтому $\mathrm{I}(\rho) \leqslant \frac{C_3}{\rho^2} \times$ $\times \iint\limits_{\varepsilon''} u^+(z)\, dx\, dy \leqslant \frac{C_4}{\rho} \int\limits_{\rho/2}^{2\rho} \left[\int\limits_0^{2\pi} u^+(te^{i\theta})\, d\theta \right] dt$. В силу леммы 7 выполняется $T_u(t) = O(t)$, поэтому $m_u(t) \leqslant C_5 t$ и $\mathrm{I}(\rho) \leqslant C_6 \rho$. Так как $S_{v_2}(\rho) = O(\rho)$, то, согласно лемме 5 имеем представление $v_2(\zeta) =$

$$= \iint\limits_{\Pi} \ln \left| \frac{\zeta - \bar\tau}{\zeta - \tau} \right| [\mu_2'(d\tau) - \mu_1'(d\tau)] + \frac{\eta}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{v^2(t)}{|\zeta - t|^2} dt + k\eta, \text{ откуда}$$

$$v_2(\zeta) - \iint\limits_{\Pi} \ln \left| \frac{\zeta - \bar\tau}{\zeta - \tau} \right| \mu_2'(d\tau) \leqslant \frac{\eta}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{v^2(t)}{|\zeta - t|^2} dt + k\eta.$$

Обозначим через $q(\zeta)$ гармоническую и неотрицательную при $\mathrm{Jm}\,\zeta > 0$ функцию, стоящую в правой части неравенства. Учитывая (3), получаем при $\mathrm{Jm}\,\zeta \geqslant 0$ $g(z) \leqslant q[\psi_2(z)]$; $g(z) = u(z) - \iint\limits_{\Pi} \ln \left| \frac{\varphi_2(z) - \bar\tau}{\varphi_2(z) - \tau} \right| \times$ $\times\ \mu_2'(d\tau)$. Функция $r(z) = q[\psi_2(z)]$ гармонична и неотрицательна при $\mathrm{Jm}\, z \geqslant 0$. В силу леммы 4 имеем $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{g^+(t)}{1+t^2} dt < C_7$. Так как

$(a - b)^+ \geqslant a^+ - b^+$ и $\mathrm{Jm}\,\psi_2(t) > 0$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^+(t)}{1+t^2}\, dt \leqslant C_7 + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \iint\limits_{\Pi} \ln \left| \frac{\psi_2(z) - \bar\tau}{\psi_2(z) - \tau} \right| \mu_2(d\tau) \right\} \frac{dt}{1+t^2}. \tag{5}$$

Рассмотрим функцию $h_\zeta(z) = (\psi_2(z) - \bar\zeta)/(\psi_2(z) - \zeta)$. Очевидно, при каждом фиксированном ζ выполнено $S_{h_\zeta}(r) = O(1)$. На основании леммы 5 имеем при $z = i$ $\ln |h_\zeta(i)| = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln |h_\zeta(t)|}{1+t^2} dt + \ln \left| \frac{i - \overline{\varphi_2(\zeta)}}{i - \varphi_2(\zeta)} \right|$.

Проинтегрировав это неравенство по мере $\mu_2'(d\zeta)$ по верхней полуплоскости Π, получим $\frac{1}{\pi} \iint\limits_{\Pi} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln |h_\zeta(t)|}{1+t^2} dt \right\} \mu_2'(d\zeta) =$

$$= \iint\limits_{\Pi} \ln \left| \frac{\psi_2(i) - \bar{\zeta}}{\psi_2(i) - \zeta} \right| \mu_2'(d\zeta) - \iint\limits_{\Pi} \ln \left| \frac{i - \overline{\varphi_2(\zeta)}}{i - \varphi_2(\zeta)} \right| \mu_2'(d\zeta) \leqslant$$

$\leqslant \iint\limits_{\Pi} \ln \left| \frac{\psi_2(i) - \bar{\zeta}}{\psi_2(i) - \zeta} \right| \mu_2'(d\zeta) - \iint\limits_{C+(0,3)} \ln \left| \frac{i - \overline{\varphi_2(\zeta)}}{i - \varphi_2(\zeta)} \right| \mu_2'(d\zeta)$. Характеристика $S_{v_2}(\rho)$ ограничена, поэтому интегралы в правой части неравенства сходятся. Из (5) имеем
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^+(t)}{1+t^2} dt < +\infty. \tag{6}$$

Рассмотрим интеграл $I = \iint\limits_{\Pi} \frac{y}{1+r^2} \mu_2(dz)$. При $z = \varphi_2(\zeta)$ имеем
$$I = \iint\limits_{\Pi} \frac{y}{1+r^2} \mu_2(dz) \leqslant \iint\limits_{\Pi} \frac{y(\zeta)}{1+r^2(\zeta)} \mu_2'(d\zeta). \tag{7}$$

Из (4) следует, что $y(\zeta) \leqslant \operatorname{Jm} \zeta$. Так как $r(\zeta) = |z| \sim |\zeta|$, то из (7) и леммы 8 получаем, что
$$\iint\limits_{\Pi} \frac{y}{1+r^2} \mu_2(dz) < +\infty. \tag{8}$$

Из утверждения леммы 7 и из оценок (6), (8) следует, что при $\operatorname{Jm} z \geqslant 0$ выполнено $S_u(r) = O(1)$. В силу леммы 5 сходится интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|u(t)|}{1+t^2} dt$. Аналогичным образом можно доказать, что при $\operatorname{Jm} z \leqslant 0$ выполнено $S_u(r) = O(1)$.

Применяя к функции $u(z)$ лемму 6 отдельно в верхней и нижней полуплоскости, получаем утверждение 3) теоремы 3.

Замечание 1. Введем, следуя И. В. Островскому [7], следующую величину $\delta_u' = \sup\limits_{CE \in L} \left\{ \varliminf\limits_{\substack{r \to \infty \\ r \in E}} \frac{m_u(r)}{T_u(r)} \right\}$, где через L обозначен класс измеримых множеств $E \subset [0, +\infty]$, таких, что $m^*(E) < 1$.

Покажем, что в теореме 1 (следовательно, и в теореме 3) условие $\delta_u > 0$ можно заменить условием $\delta_u' > 0$. Действительно, в этом случае выполнено неравенство $m_u(r) \geqslant \frac{1}{2} \delta_u' \cdot T_u(r)$ при $r \geqslant r_0$, $r \bar{\in} E$, $m^*(E) = \mu < 1$. Оценка (2) характеристики $m_u(r)$ справедлива при $r \in A$, причем $m^*(A) = p$, где p — любое число, $0 < p < 1$. Выберем p из условия $p + \mu < 1$. Тогда при $r \geqslant r_0$, $r \bar{\in} A \cup E$, $m^*(A \cup E) < 1$, выполнено $T_u(r) \leqslant C \left\{ \frac{r^\alpha}{\delta^{k+2}} + Q(l, \delta) \times \right.$ $\left. \times T_u(lr) \right\}$. Отсюда, так же как в [3], следует, что $T_u(r) < C \times$ $\times (r^\alpha + 1)$. *Замечание 2.* Без ограничений на меру $\mu_1(E)$ теоремы 2 и 3 неверны. Действительно, функция, равная модулю целой функции произвольного порядка роста, удовлетворяет всем остальным условиям этих теорем.

Список литературы: 1. *Мацаев В. И.* О росте целых функций, допускающих некоторые оценки снизу.—Докл. АН СССР, 1960, 132, № 2, с. 283—286. 2. *Сергиенко Е. Н.* О росте целых функций, допускающих специальную оценку снизу. —Теория функций, функц. анализ и их прил., 1972, вып. 15, с. 78—97. 3. *Сергиенко Е. Н.* О росте мероморфных функций, допускающих специальную оценку снизу.—Теория функций, функц. анализ и их приложения, 1974, вып. 21, с. 83—104. 4. *Мацаев В. И., Могульский Е. З.* Теорема деления для аналитических функций с заданной мажорантой и некоторые ее приложения.—Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР.—Л.: Наука, 1976, вып. 56, с. 73—89. 5. *Привалов И. И.* Субгармонические функции.—М.: ГИТТЛ, 1937.—326 с. 6. *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции. М.-Л.: ОГИЗ, 1941.—388 с. 7. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций.—М.: Наука, 1970.—592 с. 8. *Nevanlinna R.* Le théorème de Picard—Borel et la théorie des fonctions meromorphes.—Paris, 1929.—263 s. 9. *Valiron G.* Lectures on the general theorie of integral functions.— Toulouse, 1923.— 348 s. 10. *Edrei A., Fuchs W. H. J.* Bounds for the number of deficient values of certain classes of meromorphic functions.—Proc. London Math. Soc., 1962, № 12, s. 315—344. 11. *Крейн М. Г.* К теории целых функций экспоненционального типа.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1947, № 11, с. 309—326. 12. *Nevanlinna R.* Über die Eigenschaften meromorpher Funktionen in einem Winkelraum.—Acta Soc. Sci. Fenn., 1925, № 50 (12), s. 1—45. 13. *Мацаев В. И.* Теоретико-функциональные методы в некоторых вопросах теории линейных несамосопряженных операторов. Автореф. дис. д-ра физ.-мат. наук. Харьков, 1966.— 297 с.