УДК 517.56

И. И. МАРЧЕНКО, А. И. ЩЕРБА

О ВЕЛИЧИНЕ ПРОТЯЖЕНИЯ МЕРОМОРФНОЙ В КРУГЕ ФУНКЦИИ

Используем стандартные обозначения неванлинновской теории распределения значений мероморфных функций — $T(r, f)$, $N(r, a, f)$, $m(r, a, f)$, $\delta(a, f)$ (1, 2).

В работе (3) введена величина протяжения $\sigma(a, f)$ для мероморфных в плоскости функций:

$$\sigma(\infty, f) = \overline{\lim_{r\to\infty}} |\{\theta : |f(re^{i\theta})| > 1\}|, \qquad \sigma(a, f) = \sigma\left(\infty, \frac{1}{f-a}\right),$$

где $|E|$ — мера Лебега множества E. Для функций конечного нижнего порядка λ известна точная оценка снизу для величины $\sigma(a, f)$ [4]:

$$\sigma(a, f) \geqslant \min\left\{2\pi, \frac{4}{\lambda}\arcsin\sqrt{\frac{\delta(a, f)}{2}}\right\}.$$

Отметим, что в работе [5] получена оценка снизу для величины

$$\sigma(t, \infty, f) = \overline{\lim_{r\to\infty}} |\{\theta : \ln|f(re^{i\theta})| > tT(r, f)\}| \qquad (0 \leqslant t \leqslant \delta(\infty, f))$$

через $\delta(\infty, f)$, λ, t.

В работах В. П. Петренко была введена и исследована величина отклонения $\beta(a, f)$ мероморфных функций от значения a. Напомним ее определение

$$\beta(\infty, f) = \underline{\lim_{r\to\infty}} \max_{|z|=r} \ln^+|f(z)| / T(r, f), \qquad \beta(a, f) = \beta\left(\infty, \frac{1}{f-a}\right).$$

Величина $\beta(a, f)$ характеризует скорость приближения функции $f(z)$ к значению a в более сильной метрике, чем величина $\delta(a, f)$. Очевидно, что $\delta(a, f) \leqslant \beta(a, f)$. Для функций конечного нижнего порядка известна точная оценка сверху для $\beta(a, f)$ [6]. В работах

6, 7] исследовался вопрос об оценке протяжения через величину отклонения.

В случае мероморфных в единичном круге функций величина $\delta(a, f)$ может быть равна ∞. В связи с этим в работе [8] рассмотрена величина

$$\hat{\beta}(\infty, f) = \varliminf_{r\to 1} \frac{(1-r)\ln^{+}\max\limits_{|z|=r}|f(z)|}{T(r, f)}, \qquad \hat{\beta}(a, f) = \hat{\beta}\left(\infty, \frac{1}{f-a}\right).$$

В работе [9] для мероморфных в круге функций конечного нижнего порядка получена точная оценка сверху для $\hat{\beta}(a, f)$.

Поскольку для мероморфных в круге функций конечного порядка величина $\sigma(a, f)$ может быть равна 0, встает вопрос о возможной скорости стремления к нулю меры множества $\{\theta : |f(re^{i\theta})| > 1\}$ при $r\to 1$. С этой целью введем следующие величины:

$$\omega_1(t, f) = \overline{\lim_{r\to 1}}\, \operatorname{arctg} \frac{|\{\theta : \ln|f(re^{i\theta})| > tT(r, f)/(1-r)\}|}{2(1-r)};$$

$$\omega_2(t, f) = \overline{\lim_{r\to 1}}\, \operatorname{arctg} \frac{|\{\theta : \ln|f(re^{i\theta})| > tT(r, f)\}|}{2(1-r)};$$

$$\omega_3(t, f) = \overline{\lim_{r\to 1}}\, \operatorname{arctg} \frac{|\{\theta : \ln|f(re^{i\theta})| > t\max\limits_{|z|=r}\ln|f(z)|\}|}{2(1-r)},$$

где $t\in[0, \infty)$.

Цель работы — получение оценок снизу для величин $\omega_i(t, f)$ ($i = 1, 2, 3$) для мероморфных в круге функций конечного нижнего порядка через величины $\delta(\infty, f)$, $\hat{\beta}(\infty, f)$. Перейдем к формулировке полученных результатов.

Теорема 1. *Пусть мероморфная в круге функция $f(z)$ имеет конечный нижний порядок λ такая, что $\hat{\beta}(\infty, f) > 0$. Тогда для каждого фиксированного t, $0 \leqslant t < \hat{\beta}(\infty, f)$ справедливо неравенство $\omega_1(t, f) \geqslant x_0$,* где *$x_0$ — наименьший положительный корень уравнения*

$$\hat{\beta}(\infty, f) = t\frac{\cos\lambda x}{\cos^{\lambda+2}x} + \pi\lambda\frac{\sin(\lambda+1)x}{\cos^{\lambda+1}x}.$$

Если $\lambda = 0$, то $\omega_1(t, f) \geqslant \arccos\sqrt{t/\hat{\beta}(\infty, f)}$.

Теорема 2. *Для мероморфной в круге функции $f(z)$ конечного нижнего порядка λ такой, что $\delta(\infty, f) > 0$, и для каждого t, $0 \leqslant t < \delta(\infty, f)$, выполнено неравенство $\omega_2(t, f) \geqslant y_0$,* где *$y_0$ — наименьший положительный корень уравнения*

$$(1-t)\frac{\cos(\lambda+1)x}{\cos^{\lambda+1}x} = 1 - \delta(\infty, f).$$

Если $\lambda = 0$, то $\omega_2(t, f) = \frac{\pi}{2}$.

Теорема 3. *Пусть мероморфная в круге функция $f(z)$ имеет конечный нижний порядок λ и $\hat{\beta}(\infty, f) > 0$. Тогда для каждого t,*

$0 < t < \frac{1}{\pi\lambda}\hat{\beta}(\infty, f)\cos^{\lambda+1}\frac{\pi}{2(1+\lambda)}$, *справедливо неравенство* $\omega_3(t, f) \geqslant$ $\geqslant z_0$, *где* z_0 — *наименьший положительный корень уравнения:*

$$\hat{\beta}(\infty, f) = \frac{\pi\lambda}{\cos^{\lambda+1} x}\left\{\sin(\lambda+1)x + \frac{t\cos\lambda x}{\cos x \cdot \cos^{\lambda+1}\frac{\pi}{2(1+\lambda)}}\right\}.$$

Если $\lambda = 0$, *то* $\omega_3(t, f) \geqslant \arccos\sqrt{2t/\beta(\infty, f)}$.

В случае $t = 0$ полученные оценки для $\omega_i(t, f)$ $(i = 1, 2, 3)$ являются точными. Они достигаются на функции $f_\lambda(z) = E_{\lambda+1}\left(\frac{z}{1-z}\right)$, где $E_\lambda(z)$ — функция Миттаг—Леффлера [10].

Часть результатов настоящей работы была анонсирована авторами в работе [11].

Перейдем к доказательству сформулированных теорем. Весь вспомогательный материал для их доказательства был подготовлен ранее [9]. В связи с этим мы будем использовать обозначения из этой работы, а также соответствующие формулы и утверждения.

Докажем теорему 1. Вначале докажем ее для $\lambda > 0$. В формуле (2.2) [9] положим $\psi = 0$:

$$R^{\lambda+1}\sigma'_\gamma(R)\Big|_{R_k}^{v_k} - \lambda R^\lambda \sigma_\gamma(R)\Big|_{R_k}^{v_k} \geqslant \int_{R_k}^{v_k}\left\{\frac{\partial}{\partial\varphi}W_\gamma(R, \alpha_1)\cos\lambda\alpha_1 - \right.$$

$$- \frac{\partial}{\partial\varphi}W_\gamma(R, \alpha)\cos\lambda\alpha - \lambda W_\gamma(R, \alpha)\sin\lambda\alpha +$$

$$\left. + \lambda W_\gamma(R, \alpha_1)\sin\lambda\alpha_1\right\}R^{\lambda-1}\,dR. \qquad (1)$$

В силу (1.9) [9] следует

$$\frac{\partial}{\partial r}V_\gamma(r, \theta_2) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}V_\gamma(r, \theta_2)\,\mathrm{tg}(\theta_2+\alpha) - \frac{\partial}{\partial R}W_\gamma(R, \alpha)\frac{1}{\cos(\theta_2+\alpha)};$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}W_\gamma(R, \alpha) = \frac{R}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}V_\gamma(r, \theta_2)\frac{1}{\cos(\theta_2+\alpha)} - R\,\mathrm{tg}(\theta_2+\alpha)\frac{\partial}{\partial R}W_\gamma(R, \alpha). \qquad (2)$$

Подставляя (2) в неравенство (1), получим

$$R^{\lambda+1}\sigma'_\gamma(R)\Big|_{R_k}^{v_k} - \lambda R^\lambda\sigma_\gamma(R)\Big|_{R_k}^{v_k} \geqslant \int_{R_k}^{v_k}\left\{\frac{R}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}V_\gamma(r, \theta_1)\cos(\theta_1+\alpha_1)\cos\lambda\alpha_1 - \right.$$

$$- \frac{R}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}V_\gamma(r, \theta_2)\cos\lambda\alpha/\cos(\theta_2+\alpha) + R\frac{\partial}{\partial r}W_\gamma(R, \alpha)\,\mathrm{tg}(\theta_2+\alpha)\cos\lambda\alpha -$$

$$\left. - \lambda W_\gamma(r, \alpha)\sin\lambda\alpha\right\}R^{\lambda-1}dR. \qquad (3)$$

Заметим, что

$$\int_{R_k}^{v_k} R^\lambda \frac{\partial}{\partial R} W_\gamma(R, \alpha) \operatorname{tg}(\theta_2+\alpha)\, dR = W_\gamma(R, \alpha) R^\lambda \operatorname{tg}(\theta_2+\alpha)\Big|_{R_k}^{v_k} -$$

$$-\lambda \int_{R_k}^{v_k} W_\gamma(R, \alpha) R^{\lambda-1} \operatorname{tg}(\theta_2+\alpha)\, dR - \int_{R_k}^{v_k} W_\gamma(R, \alpha) R^\lambda \frac{\partial\theta_2}{\partial R} \frac{dR}{\cos^2(\theta_2+\alpha)}.$$

Так как $1 - Re^{-i\alpha} = re^{i\theta_2}$, то

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{R\sin\alpha}{1-R\cos\alpha}, \qquad \frac{\partial\theta_2}{\partial R}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta_2} = \frac{\sin\alpha}{(1-R\cos\alpha)^2} > 0 \quad \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right).$$

Поэтому

$$\int_{R_k}^{v_k} R^\lambda \frac{\partial}{\partial R} W_\gamma(R, \alpha) \operatorname{tg}(\theta_2+\alpha)\, dR = W_\gamma(R, \alpha) R^\lambda \operatorname{tg}(\theta_2+\alpha)\Big|_{R_k}^{v_k} -$$

$$-\lambda \int_{R_k}^{v_k} W_\gamma(R, \alpha) R^{\lambda-1} \operatorname{tg}(\theta_2+\alpha)\, dR -$$

$$-\int_{R_k}^{v_k} W_\gamma(R, \alpha) \frac{\sin\alpha\cos^2\theta_2}{\cos^2(\theta_2+\alpha)(1-R\cos\alpha)^2}\, dR. \tag{4}$$

Далее в силу (3) имеем

$$\int_{R_k}^{v_k} \left\{ \frac{R}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} V_\gamma(r, \theta_1)\cos(\theta_1+\alpha_1) - \lambda W_\gamma(R, \alpha)\sin\lambda\alpha - \right.$$

$$- \lambda W_\gamma(R, \alpha)\operatorname{tg}(\theta_2+\alpha)\cos\lambda\alpha - W_\gamma(R, \alpha)\frac{\sin\alpha\cos\lambda\alpha\cos^2\theta_2}{\cos^2(\theta_2+\alpha)(1-R\cos\alpha)^2} -$$

$$\left. - \frac{R}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} V_\gamma(r, \theta_2)\frac{\cos\lambda\alpha}{\cos(\theta_2+\alpha)} \right\} R^{\lambda-1}\, dR \leqslant$$

$$\leqslant R^{\lambda+1}\sigma'_\gamma(R)\Big|_{R_k}^{v_k} - \lambda R^\lambda\sigma_\gamma(R)\Big|_{R_k}^{v_k} - W_\gamma(R, \alpha) R^\lambda\cos\lambda\alpha\operatorname{tg}(\theta_2+\alpha)\Big|_{R_k}^{v_k}. \tag{5}$$

Аналогично, как и в доказательстве теоремы 1 [9], используя лемму 4 [9] и делая предельный переход при $\gamma\to 0$ и $\alpha_1\to 0$, получим при $k\to\infty$

$$\int_{R_k}^{v_k} \left\{ \frac{R}{1-R}\frac{u^*(1-R, 0)}{\pi} - \frac{R}{r}\frac{u^*(1-Re^{-i\alpha})}{\pi}\cdot\frac{\cos\lambda\alpha}{\cos(\theta_2+\alpha)} - \right.$$

$$- \lambda T^*(1-Re^{-i\alpha})\sin\lambda\alpha - \lambda T^*(1-Re^{-i\alpha})\operatorname{tg}(\theta_2+\alpha)\cos\lambda\alpha -$$

$$\left. - T^*(1-Re^{-i\alpha}) R\frac{\sin\alpha\cos\lambda\alpha\cos^2\theta_2}{\cos^2(\theta_2+\alpha)(1-R\cos\alpha)^2} \right\} R^{\lambda-1}\, dR \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_2 \int_{R_k}^{v_k} T(1-R, f) R^{\lambda-1} dR. \tag{6}$$

Теорему 1 достаточно доказать для $\omega_1(t, f) < \min\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2\lambda}\right\}$. Выберем α так, чтобы $\omega_1(t, f) < \alpha < \min\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2\lambda}\right\}$. В силу определения $\omega_1(t, f)$ следует

$$\overline{\lim_{R\to 0}}\left\{u^*(1-Re^{-i\alpha}) - \frac{t}{1-|1-Re^{-i\alpha}|}T(|1-Re^{-i\alpha}|, f)\right\} \leqslant 0.$$

Поэтому

$$\int_{R_k}^{v_k}\left\{\frac{R}{1-R}\cdot\frac{u^*(1-R)}{\pi} - t\frac{R}{r}\frac{T(|1-Re^{-i\alpha}|, f)\cos\lambda\alpha}{\pi\cos(\theta_2+\alpha)(1-|1-Re^{-i\alpha}|)} - \right.$$

$$-\lambda T(|1-Re^{-i\alpha}|, f)\frac{\sin((\lambda+1)\alpha+\theta_2)}{\cos(\theta_2+\alpha)} -$$

$$\left. - RT(|1-Re^{-i\alpha}|, f)\frac{\sin\alpha\cos\lambda\alpha\cos^2\theta_2}{\cos^2(\theta_2+\alpha)(1-R\cos\alpha)^2}\right\}R^{\lambda+1}dR \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_2\int_{R_k}^{v_k}T(1-R, f)R^{\lambda-1}dR.$$

Так как $|1-Re^{-i\alpha}| = 1-R\cos\alpha + o(R)$ и $\theta_2(R)\to 0$ при $R\to 0$, то

$$\int_{R_k}^{v_k}\left\{\frac{R}{1-R}\frac{u^*(1-R)}{\pi} - T(|1-Re^{-i\alpha}|, f)\left[\frac{t\cos\lambda\alpha}{\pi\cos^2\alpha}(1+o(1)) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \lambda\frac{\sin(1+\lambda)\alpha}{\cos\alpha}(1+o(1))\right]\right\}R^{\lambda+1}dR \leqslant \varepsilon_2\int_{R_k}^{v_k}T(1-R, f)R^{\lambda-1}dR,\ k\to\infty.$$

Далее, используя лемму 5 [9], имеем

$$\int_{R_k}^{v_k}\left\{\frac{R}{1-R}\frac{u^*(1-R)}{T(1-R, f)} - \frac{\pi}{\cos^\lambda\alpha}\left[\frac{t\cos\lambda\alpha}{\pi\cos^2\alpha}(1+o(1)) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \lambda\frac{\sin(1+\lambda)\alpha}{\cos\alpha}(1+o(1))\right] - \varepsilon_3\right\}R^{\lambda-1}dR \leqslant 0\ \ (k\to\infty,\ \varepsilon_3 > 0).$$

Отсюда

$$\hat{\beta}(\infty, f) \leqslant t\frac{\cos\lambda\alpha}{\cos^{\lambda+2}\alpha} + \pi\lambda\frac{\sin(\lambda+1)\alpha}{\cos^{\lambda+1}\alpha}. \tag{7}$$

Правая часть неравенства (7) является непрерывной функцией от α, $\alpha\in\left[0, \frac{\pi}{2(\lambda+1)}\right]$. Обозначим ее через $\varphi(\alpha)$. В силу теоремы 1 [9] и ограничений, наложенных на постоянную в теореме 1, имеем

$$0 < \varphi(0) = t < \hat{\beta}(\infty, f) \leqslant \varphi\left(\frac{\pi}{2(\lambda+1)}\right).$$

Переходя к пределу при $\alpha \to \omega_1(t, f)$ в неравенстве (6), приходим к неравенству $\beta(\infty, f) \leqslant \varphi(\omega_1(t, f))$. Отсюда следует, что существует наименьший корень x_0 уравнения $\beta(\infty, f) = \varphi(x)$, который удовлетворяет неравенству $\omega_1(t, f) \geqslant x_0$. Итак, теорема 1 доказана для $\lambda > 0$. В случае $\lambda = 0$ доказательство теоремы 1 аналогично предыдущему случаю.

Докажем теорему 2. Вначале рассмотрим случай $\lambda > 0$. Полагая в формуле (2.2) [9] $\psi = -\frac{\pi}{2\lambda}$ и используя формулу (4), получим

$$\int_{R_k}^{v_k} \left\{ \frac{R}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} V_\gamma(r, \theta_1) \cos(\theta_1 + \alpha_1) \sin\lambda\alpha_1 + \lambda W_\gamma(R, \alpha) \cos\lambda\alpha - \right.$$

$$- \lambda W_\gamma(R, \alpha_1) \cos\lambda\alpha_1 - \frac{R}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} V_\gamma(r, \theta_2) \frac{\sin\lambda\alpha}{\cos(\theta_2 + \alpha)} -$$

$$- \lambda W_\gamma(R, \alpha) \operatorname{tg}(\theta_2 + \alpha) \sin\lambda\alpha -$$

$$\left. - R W_\gamma(R, \alpha) \frac{\sin\alpha \sin\lambda\alpha \cos^2\theta_2}{\cos^2(\theta_2 + \alpha)(1 - R\cos\alpha)^2} \right\} R^{\lambda-1} dR \leqslant R^{\lambda-1} \sigma_\gamma'(R) \Big|_{R_k}^{v_k} -$$

$$- \lambda R^\lambda \sigma_\gamma(R) \Big|_{R_k}^{v_k} - W_\gamma(R, \alpha) R^\lambda \operatorname{tg}(\theta_2 + \alpha) \sin\lambda\alpha \Big|_{R_k}^{v_k}.$$

Далее, используя лемму 4 [9] и устремляя $\gamma \to 0$, $\alpha_1 \to 0$, получим

$$\int_{R_k}^{v_k} \left\{ \lambda T^*(1 - Re^{-i\alpha}) \cos\lambda\alpha - \lambda T^*(1 - Re^{-i\alpha}) \operatorname{tg}(\theta_2 + \alpha) \sin\lambda\alpha - \right.$$

$$- \lambda N(1 - R, \infty, f) - \frac{R}{r} \frac{u^*(1 - Re^{-i\alpha})}{\pi} \frac{\sin\lambda\alpha}{\cos(\theta_2 + \alpha)} -$$

$$\left. - R T^*(1 - Re^{-i\alpha}) \frac{\sin\alpha \sin\lambda\alpha \cos^2\theta_2}{\cos^2(\theta_2 + \alpha)(1 - R\cos\alpha)^2} \right\} R^{\lambda-1} dR \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_1 \int_{R_k}^{v_k} T(1 - R, f) R^{\lambda-1} dR, \quad k \to \infty.$$

Теорему 2 достаточно доказать для $\omega_2(t, f) = \frac{\pi}{2(\lambda + 1)}$. Выберем α так, чтобы $\omega_2(t, f) < \alpha < \frac{\pi}{2(\lambda + 1)}$. В силу определения величины $\omega_2(t, f)$ имеем

$$\varlimsup_{R \to 0} \{ u^*(1 - Re^{-i\alpha}) - tT(|1 - Re^{-i\alpha}|, f) \} \geqslant 0.$$

Поэтому

$$\int_{R_k}^{v_k} \left\{ T^*(1 - Re^{-i\alpha}) \frac{\cos((\lambda + 1)\alpha + \theta_2)}{\cos(\theta_2 + \alpha)} - N(1 - R, \infty, f) R^{\lambda-1} dR \leqslant \right.$$

$$\leqslant \varepsilon_5 \int_{R_k}^{v_k} T(1 - R, f) R^{\lambda-1} dR, \quad k \geqslant k_0(\varepsilon_5).$$

Так как

$$m^*(|1-Re^{-i\alpha}|, f)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\theta_2} u^*(re^{i\varphi})\,d\varphi+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\theta_2}^{\pi} u^*(re^{i\varphi})\,d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant m^*(r,\theta_2,f)+\frac{\pi-\theta_2}{\pi}tT(r,f)\leqslant m^*(r,\theta_2,f)+tT(|1-$$

$$-Re^{-i\alpha}|, f)\ (r=|1-Re^{-i\alpha}|),\ \text{то}\ T^*(1-Re^{-i\alpha})\geqslant$$

$$\geqslant(1-t)\,T(|1-Re^{-i\alpha}|, f).$$

Таким образом,

$$\int\limits_{R_k}^{v_k}\left\{(1-t)\,T(|1-Re^{-i\alpha}|, f)\frac{\cos((\lambda+1)\alpha+\theta_2)}{\cos(\theta_2+\alpha)}-N(1-\right.$$

$$\left.-R,\infty,f)\right\}R^{\lambda-1}dR\leqslant\varepsilon_5\int\limits_{R_k}^{v_k}T(1-R,f)\,R^{\lambda-1}dR.$$

Далее, используя лемму 5 [9], имеем

$$\int\limits_{R_k}^{v_k}\left\{T(1-R,f)\frac{\cos(\lambda+1)\alpha}{\cos^{\lambda+1}\alpha}(1-t)-N(1-R,\infty,f)\right\}R^{\lambda-1}dR\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon_6\int\limits_{R_k}^{v_k}T(1-R,f)\,R^{\lambda-1}dR,\ k\geqslant k_0(\varepsilon_6).$$

Отсюда $(1-t)\frac{\cos(\lambda+1)\alpha}{\cos^{\lambda+1}\alpha}\leqslant 1-\delta(\infty,f)$.

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\alpha\to\omega_2(t,f)$, получим утверждение теоремы 2 в случае $\lambda>0$. Рассмотрим случай $\lambda=0$. Предположим, что утверждение теоремы 2 неверно, т. е. существует число $t\in[0,\delta(\infty,f))$ такое, что $\omega_2(t,f)<\frac{\pi}{2}$. Выберем в соотношении (2.10) [9] $\psi=-\frac{\pi}{2\mu}$. Далее, проводя аналогичные рассуждения как и при $\lambda>0$, получим

$$\int\limits_{R_k}^{v_k}\left\{T(1-R,f)\frac{\cos(1+\mu)\alpha}{\cos^{1+\mu}\alpha}(1-t)-N(1-R,\infty,f)\right\}\frac{dR}{R}\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\int\limits_{R_k}^{v_k}T(1-R,f)\frac{dR}{R}.$$

Отсюда

$$(1-t)\frac{\cos(1+\mu)\alpha}{\cos^{1+\mu}\alpha}\leqslant 1-\delta(\infty,f).$$

этом неравенстве перейдем к пределу при $\mu\to 0$: $t\geqslant\delta(\infty,f)$. Это противоречит условию теоремы 2. Таким образом, теорема 2 доказана полностью.

Докажем теорему 3. Вначале докажем ее для $\lambda>0$. Выберем α так, чтобы $\omega_3(t,f)<\alpha<\frac{\pi}{2\lambda}$. Из определения величины $\omega_3(t,f)$ следует

$$\overline{\lim_{R\to 0}}\{u^*(1-Re^{-i\alpha})-tu^*(|1-Re^{-i\alpha}|)\}\leqslant 0.$$

Далее, используя соотношение (6), получим

$$\int\limits_{R_k}^{v_k}\Bigg\{\frac{R}{1-R}\frac{u^*(1-R)}{\pi}-t\frac{\cos\lambda\alpha\, u^*(|1-Re^{-i\alpha}|)}{\pi r\cos(\alpha+\theta_2)}-$$

$$-\lambda T^*(1-Re^{-i\alpha})\frac{\sin((\lambda+1)\alpha+\theta_2)}{\cos(\alpha+\theta_2)}-R\frac{\sin\alpha\cos\lambda\alpha\cos^2\theta_2}{\cos^2(\theta_2+\alpha)(1-R\cos\alpha)^2}T^*(1-$$

$$-Re^{-i\alpha})\Bigg\}R^{\lambda-1}dR\leqslant\varepsilon_2\int\limits_{R_k}^{v_k}T(1-R,f)R^{\lambda-1}dR,\ k\to\infty. \qquad (8)$$

Положим

$$(1-2R\cos\alpha+R^2)^{\frac{1}{2}}=1-l. \qquad (9)$$

Легко видеть, что

$$R=\frac{l}{\cos\alpha}(1+o(1)),\ dR=\frac{dl}{\cos\alpha}(1+o(1)),\ R\to 0.$$

Делая замену переменных (9), имеем

$$\int\limits_{R_k}^{v_k}\frac{R^\lambda}{r}u^*(|1-Re^{-i\alpha}|)\,dR=\frac{1+o(1)}{\cos^{\lambda+1}\alpha}\int\limits_{R_k(1+o(1))\cos\alpha}^{v_k(1+o(1))\cos\alpha}l^\lambda u^*(1-$$

$$-l)\,dl,\ k\to\infty.$$

Выберем в формуле (2.8) [9] $\alpha=\frac{\pi}{2(\lambda+1)}$

$$\int\limits_{R_k}^{v_k}\left\{\frac{R}{1-R}\frac{u^*(1-R)}{\pi}-\frac{\lambda T(1-R,f)}{\cos^{\lambda+1}\dfrac{\pi}{2(\lambda+1)}}\right\}R^{\lambda-1}dR\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon_3\int\limits_{R_k}^{v_k}T(1-R,f)R^{\lambda-1}dR. \qquad (10)$$

Далее отметим, что если проинтегрировать соотношение (2.1) [9] по R от $R_k(1+o(1))\cos\alpha$ до $v_k(1+o(1))\cos\alpha$ и провести все последующие рассуждения, то получим следующий аналог формулы (10):

$$\int\limits_{R_k(1+o(1))\cos\alpha}^{v_k(1+o(1))\cos\alpha} \left\{\frac{l}{1-l}u^*(1-l) - \frac{\pi\lambda T(1-l,f)}{\cos^{1+\lambda}\frac{\pi}{2(\lambda+1)}}\right\} l^{\lambda-1}dl \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_4 \int\limits_{R_k(1+o(1))\cos\alpha}^{v_k(1+o(1))\cos\alpha} T(1-l,f)\, l^{\lambda-1}dl.$$

Из этого неравенства и леммы 1 [9] следует

$$\cos^{\lambda+1}\frac{\pi}{2(\lambda+1)}/(\pi\lambda) \int\limits_{R_k(1+o(1))\cos\alpha}^{v_k(1+o(1))\cos\alpha} \frac{l^\lambda}{1-l}u^*(1-l)\,dl \leqslant$$

$$\leqslant (1+o(1)) \int\limits_{R_k(1+0(1))\cos\alpha}^{v_k(1+o(1))\cos\alpha} T(1-l,f)\, l^{\lambda-1}dl \leqslant$$

$$\leqslant (1+o(1)) \left\{\int\limits_{R_k}^{v_k} T(1-l,f)\, l^{\lambda-1}dl + \int\limits_{R_k(1+0(1))\cos\alpha}^{R_k} T(1-\right.$$

$$\left.-l,f)\, l^{\lambda-1}dl\right\} \leqslant (1+o(1)) \left\{\int\limits_{R_k}^{v_k} T(1-l,f)\, l^{\lambda-1}dl + \frac{1}{\lambda}R_k^\lambda T(1-\right.$$

$$\left.-R_k,f)\right\} \leqslant (1+o(1)) \int\limits_{R_k}^{v_k} T(1-l,f)\, l^{\lambda-1}dl.$$

Поэтому в силу (8)

$$\int\limits_{R_k}^{v_k} \left\{\frac{R}{1-R}\frac{u^*(1-R)}{\pi} - t\lambda\frac{T(1-R,f)\cos\lambda\alpha}{\cos^{\lambda+1}\frac{\pi}{2(\lambda+1)}\cos^{2+\lambda}\alpha} - \right.$$

$$-\lambda T^*(1-Re^{-i\alpha})\frac{\sin((\lambda+1)\alpha+\theta_2)}{\cos(\alpha+\theta_2)} - T^*(1-Re^{-i\alpha})R\times$$

$$\left.\times\frac{\sin\alpha\cos\lambda\alpha\cos^2\theta_2}{\cos^2(\theta_2+\alpha)(1-R\cos\alpha)^2}\right\} R^{\lambda-1}dR \leqslant \varepsilon_5 \int\limits_{R_k}^{v_k} T(1-$$

$$-R,f)\, R^{\lambda-1}dR,\ \ k\to\infty.$$

Из этого неравенства и леммы 5 вытекает

$$\int\limits_{R_k}^{v_k} \left\{\frac{R}{1-R}u^*(1-R) - \frac{\pi\lambda T(1-R,f)}{\cos^{\lambda+1}\alpha}\left[\sin(\lambda+1)\alpha + \right.\right.$$

$$\left.\left.+t\frac{\cos\lambda\alpha}{\cos\alpha\cos^{1+\lambda}\frac{\pi}{2(1+\lambda)}}\right]\right\} R^{\lambda-1}dR \leqslant \varepsilon_6 \int\limits_{R_k}^{v_k} T(1-R,f)\, R^{\lambda-1}dR.$$

Отсюда

$$\hat{\beta}(\infty, f) \leqslant \frac{\pi\lambda}{\cos^{\lambda+1}\alpha}\left[\sin(\lambda+1)\alpha + \frac{t\cos\lambda\alpha}{\cos\alpha\cos^{1+\lambda}\frac{\pi}{2(1+\lambda)}}\right].$$

Устремляя $\alpha \to \omega_3(t, f)$, получим утверждение теоремы 3 для $\lambda > 0$. Для $\lambda = 0$ теорема 3 доказывается совершенно аналогично, только в качестве λ будет выступать произвольное положительное число.

Список литературы: *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции. М., 1941. С. 8—148. 2. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. М., 1970. С. 12—145. 3. *Edrei A.* Sums of dificiencies of meromorphic functions // J. Anal. Math. 1965. 14. P. 79—104. 4. *Baernstein A.* Proof of Edrei's conjecture // Proc. London Math. Soc. 1973. 26 (3). P. 418—434. 5. *Anderson J. M., Baernstein A.* The size of the set on which a meromorphic function is large // Proc. London Math. Soc. 1978. 35 (3). P. 518—539. 6. *Петренко В. П.* Целые кривые. Х., 1984. С. 1—215. 7. *Марченко И. И.* О росте мероморфных функций конечного нижнего порядка // Докл. АН СССР. 1982. **264**, № 5. С. 1077—1080. 8. *Крытов А. В.* О росте мероморфных функций и аналитических кривых в единичном круге. М., 1981. 52 с. Деп. ВИНИТИ 20.07.81. № 1657—81. 9. *Марченко И. И., Щерба А. И.* О величинах отклонений мероморфных функций // Мат. сборник. 1990. С. 53—60. 10. *Крутинь В. И.* О величинах дефектов Р. Неванлинна для мероморфных при $|z| < 1$ функций // Изв. АН Арм. ССР. Сер. мат. 1973. № 5. С. 347—358. 11. *Марченко И. И., Щерба А. И.* О росте мероморфных в целом функций конечного нижнего порядка // Докл. АН СССР. 1987. **295**, № 4. С. 805—808.

Поступила в редколлегию 07.10.89