УДК 517.38

В. А. ЗОЛОТАРЕВ, А. А. ЯНЦЕВИЧ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕСАМОСОПРЯЖЕННОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

В работе [1] рассматривалась абстрактная задача Коши (АЗК) в гильбертовом пространстве H:

$$\frac{dz_t}{dt} = A(t) z_t, \ z_t|_{t=0} = z_0, \ A(t) \in [H, H], \tag{1}$$

причем на $K(t, s) = \langle z_t, z_s \rangle_H$ налагались определенные условия (например, в виде дифференциальных уравнений в частных производных), которые приводили к нелинейным операторным уравнениям для $A(t)$, и, следовательно, выделялись определенные разновидности кривых в гильбертовых пространствах. Такой подход с вероятностной точки зрения позволил ввести новые классы нестационарных процессов и построить спектральный анализ таких процессов по корреляционной функции (КФ).

В данной статье продолжается анализ операторных уравнений, начатый в работе [1], в случае, когда $A(t)$ несамосопряжен.

1. Пусть КФ, удовлетворяет уравнению

$$(\partial_t^2 - \partial_s^2) K(t, s) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{r} \varphi_\alpha(t) I_{\alpha\beta} \overline{\varphi_\beta(s)}. \tag{2}$$

Из (1), (2) следует, что

$$\langle (B(t) - B^*(s)) z_t, z_s \rangle = \sum_{\alpha, \beta=1}^{r} \varphi_\alpha(t) I_{\alpha\beta} \overline{\varphi_\beta(s)}, \tag{3}$$

где через $B(t)$ обозначено выражение $\frac{dA}{dt} + A^2(t)$. Если $B(t)$ не зависит от t, то для $A(t)$ получается уравнение Риккати

$$\frac{dA}{dt} + A^2(t) = B, \tag{4}$$

где $B - B^* = \sum_{\alpha, \beta=1}^{r} \langle \cdot, e_\alpha \rangle I_{\alpha\beta} e_\beta$, e_α — каналовые элементы, $(I_{\alpha\beta})$ — инволюция [2].

В случае $B = B^*$ анализ уравнения (4), а также вид $K(t, s)$ изучен в [1].

II. Конкретизируя вид B и решая уравнение (4), можно изучать разные классы нестационарных кривых в H.

1. Пусть $H = L^2(R_1)$, а оператор B имеет вид

$$B = \int_0^x G(x - y)\, dy. \tag{5}$$

Заранее не будем предполагать, что $\overline{(B - B^*) L^2(R_1)}$ конечномерно. Решение (4) будем искать в виде $A(t) = \int_0^x K(x - y, t) \cdot dy$. Тогда для ядра $K(x - y, t)$ получаем уравнение

$$\frac{\partial K(x - y, t)}{\partial t} + \int_0^{x-y} K(x - y - \eta, t) K(\eta, t)\, d\eta = G(x - y),$$

полагая $x - y = \xi$, получаем нелинейное интегродифференциальное уравнение

$$\frac{\partial K(\xi, t)}{\partial t} + \int_0^{\xi} K(\xi - \eta) K(\eta, t)\, d\eta = G(\xi). \tag{6}$$

После преобразования Фурье приходим к уравнению Риккати

$$\frac{\partial \hat{K}(\lambda, t)}{\partial t} + \hat{K}^2(\lambda, t) = \hat{G}(\lambda), \tag{7}$$

решение которого, удовлетворяющее условию $\hat{K}(\lambda, 0) = 0$, имеет вид

$$\hat{K}(\lambda, t) = \sqrt{\hat{G}(\lambda)}\,\frac{1 - e^{-2\sqrt{\hat{G}(\lambda)}\,t}}{1 + e^{-2\sqrt{\hat{G}(\lambda)}\,t}}.$$

Следовательно, для $K(\xi, t)$ окончательно получаем

$$K(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{R_1} e^{-i\xi\lambda} \sqrt{\hat{G}(\lambda)}\,\frac{1 - e^{-2\sqrt{\hat{G}(\lambda)}\,t}}{1 + e^{-2\sqrt{\hat{G}(\lambda)}\,t}}\, d\lambda. \tag{8}$$

Пример 1. Пусть $G(\xi) \equiv G_0(\xi) = j\chi_{[-a,\, a]}(\xi)$, где $\chi_{[-a,\, a]}(\xi)$ — характеристическая функция интервала $[-a, a]$, тогда

$$\hat{G}_0(\lambda) = \frac{i}{\lambda\sqrt{2\pi}} \sin \lambda a;$$

$$K(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{R_1} e^{i\lambda\xi} \sqrt{\frac{i \sin \lambda a}{\lambda\sqrt{2\pi}}}\; th \sqrt{\frac{ia \sin \lambda a}{\lambda\sqrt{2\pi}}}\, d\lambda.$$

Пример 2. Пусть $G(\xi) = \xi^n \chi_{[-a,\, a]}(\xi)$, тогда $\hat{G}(\lambda) = i^n \dfrac{d^n}{d\lambda^n} \hat{G}_0(\lambda)$ и нахождение $K(\xi, t)$ сводится к квадратуре.

2. Пусть $H = L^2_{[0,1]}$ и $B = \int\limits_0^1 G(x, y) \cdot dy$, тогда $K(x, y, t)$ удовлетворяет

$$\frac{\partial K(x, y, t)}{\partial t} + \int\limits_0^1 K(x, z, t)\, K(z, y, t)\, dz = G(x, y).$$

Если $G(x, y) = \vartheta(x)\,\psi(y)$, то, полагая $K(x, y, t) = K(x, t)\,\psi(y)$, получаем для $K(x, t)$ уравнение

$$\frac{\partial K(x, t)}{\partial t} + K(x, t) \int\limits_0^1 \psi(z)\, K(z, t)\, dz = \vartheta(x). \tag{9}$$

Обозначая $\chi(t) = \int\limits_0^1 \psi(z)\, K(z, t)\, dz$, из (9) имеем $\dfrac{d\chi}{dt} + \chi^2(t) = \int\limits_0^1 \vartheta(x)\,\psi(x)\, dx$, а для $K(x, t)$ линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$\frac{\partial K(x, t)}{\partial t} + \chi(t)\, K(x, t) = \vartheta(x);\quad K(x, t)|_{t=0} = K_0(x).$$

Аналогично к квадратурам сводится случай, когда $G(x, y) = \sum_{l=1}^{n} \vartheta_l(x)\,\psi_l(y)$.

3. Пусть $B \in [L^2_{[-a,\,a]}, L^2_{[-a,\,a]}]$ имеет вид $Bf = \alpha(x) f(x) + i \int\limits_{-a}^{x} f(\xi)\, d\xi$. Будем искать решение уравнения (4) в виде

$$Af = \beta(x, t) f(x) + i \int\limits_{-a}^{x} K(x, \xi, t) f(\xi)\, d\xi. \tag{10}$$

Тогда из (5), (10) получаем

$$\left(\frac{\partial\beta}{\partial t} + \beta^2\right) f(x) + i \int\limits_{-a}^{x} \Big\{[\beta(x, t) + \beta(\xi, t)]\, K(x, \xi, t) + \frac{\partial K(x, \xi, t)}{\partial t} +$$

$$+ i \int\limits_{\xi}^{x} K(x, s, t)\, K(s, \xi, t)\, ds\Big\} f(\xi)\, d\xi = \alpha(x) f(x) + i \int\limits_{-a}^{x} f(\xi)\, d\xi. \tag{11}$$

Для того, чтобы удовлетворялось соотношение (11), достаточно

$$\frac{\partial\beta}{\partial t} + \beta^2 = \alpha(x); \tag{12}$$

$$\frac{\partial K(x, \xi, t)}{\partial t} + [\beta(x, t| + \beta(\xi, t|]\, K(x, \xi, t) + i \int\limits_{\xi}^{x} K(x, s, t)\, K(s, \xi, t)\, ds = 1. \tag{13}$$

Выражение (13) является стандартным уравнением Риккати, решение которого находится в явном виде, а (13) после нахождения $\beta(x, t)$ можно решать методом последовательных приближений. В случае, когда $\alpha|x| = \alpha_0 = \mathrm{const}$, задача (12), (13) упрощается, так как решение интегродифференциального уравнения (13) можно искать в виде

$$K(x, \xi, t) = K(x - \xi, t);$$

$$\frac{\partial K(x - \xi, t)}{\partial t} + 2\beta(t)\, K(x - \xi, t) + i \int\limits_{0}^{x-\xi} K(x - \xi - s, t)\, K(s, t)\, ds = 1.$$

Продолжая соответствующие функции нулем вне интервала $[-a, a]$ и применяя преобразование Фурье, получаем скалярное уравнение Риккати

$$\frac{\partial \hat{K}(\lambda, t)}{\partial t} + 2\beta(t) \hat{K}(\lambda, t) + i \hat{K}^2(\lambda, t) = \frac{\sin \lambda a}{\lambda a \sqrt{2\pi}}. \tag{14}$$