УДК 517.521.8

В. Ф. ВЛАСЕНКО

ОДНА ТЕОРЕМА МЕРСЕРОВА ТИПА

В данной работе дается одно обобщение теоремы Мерсера. Справедлива

Теорема. *Пусть положительные последовательности* (p_n), $(b_n^{(q)})$ *и неотрицательные последовательности* $(b_n^{(i)})$, $i = 1, 2, \ldots, q-1$, *удовлетворяют условиям:*

$$P_n = p_0 + \ldots + p_n \to +\infty \quad (n \to \infty); \tag{1}$$

$$\varliminf_{n\to\infty} \left(b_n^{(q)} - \sum_{i=1}^{q-1} b_n^{(i)}\right) = b > 0, \qquad \sum_{i=1}^{q} b_n^{(i)} \leqslant H \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{2}$$

где H *не зависит от* n,

$$\frac{b_n^{(q)}}{p_n} \geqslant \frac{b_n^{(q-1)}}{p_{n-1}} \geqslant \frac{b_n^{(q-2)}}{p_{n-2}} \geqslant \cdots \geqslant \frac{b_n^{(2)}}{p_{n-q+2}} \geqslant \frac{b_n^{(1)}}{p_{n-q+1}}. \tag{3}$$

Тогда преобразование

$$t_n = \frac{1 - \sum\limits_{i=1}^{q} b_n^{(i)}}{P_n} \cdot \sum_{k=0}^{n} p_k S_k + \sum_{i=1}^{q} b_n^{(i)} S_{n-q+i} \tag{4}$$

вполне неэффективно.

Доказательство. Из условий, наложенных на (p_n), $(b_n^{(i)})$, $i = 1, \ldots, q$, следует, что матрица A преобразования (4) является нижней треугольной T-матрицей. Поэтому в силу теоремы Мазура—Орлича [1, стр. 375] достаточно установить, что матрица A не суммирует ни одной неограниченной последовательности.

Обозначим $\frac{1}{P_n}\sum\limits_{k=0}^{n} p_k S_k$ через ω_n $(n = 0, 1, \ldots)$. Тогда

$$S_n = \frac{1}{p_n}(\omega_n P_n - \omega_{n-1} P_{n-1});$$

$$t_n = \left(1 - \sum_{i=1}^{q} b_n^{(i)} + b_n^{(q)} \frac{P_n}{p_n}\right)\omega_n + \left(\frac{b_n^{(q-1)}}{p_{n-1}} - \frac{b_n^{(q)}}{p_n}\right) P_{n-1}\omega_{n-1} +$$

$$+ \left(\frac{b_n^{(q-2)}}{p_{n-2}} - \frac{b_n^{(q-1)}}{p_{n-1}}\right) P_{n-2}\omega_{n-2} + \ldots +$$

$$+ \left(\frac{b_n^{(1)}}{p_{n-q+1}} - \frac{b_n^{(2)}}{p_{n-q+2}}\right) P_{n-q+1}\omega_{n-q+1} - \frac{b_n^{(1)}}{p_{n-q+1}} P_{n-q}\omega_{n-q},$$

откуда

$$\left(1-\sum_{i=1}^{q} b_n^{(i)}+b_n^{(q)}\frac{P_n}{p_n}\right)\omega_n=\left(\frac{b_n^{(q)}}{p_n}-\frac{b_n^{(q-1)}}{p_{n-1}}\right)P_{n-1}\omega_{n-1}+$$

$$+\left(\frac{b_n^{(q-1)}}{p_{n-1}}-\frac{b_n^{(q-2)}}{p_{n-2}}\right)P_{n-2}\omega_{n-2}+\ldots+$$

$$+\left(\frac{b_n^{(2)}}{p_{n-q+2}}-\frac{b_n^{(1)}}{p_{n-q+1}}\right)P_{n-q+1}\omega_{n-q+1}+\frac{b_n^{(1)}}{p_{n-q+1}}P_{n-q}\,\omega_{n-q}+t_n. \qquad (5)$$

Из неравенств (3) следует, что коэффициенты при ω_k в правой части равенства (5) неотрицательны. Убедимся, что коэффициент при ω_n положителен. Действительно, используя (3), неотрицательность $(b_n^{(i)})$, $i=1,\ \ldots,\ q$, получим

$$b_n^{(q)}\frac{P_n}{p_n}-(b_n^{(q)}+b_n^{(q-1)}+\ldots+b_n^{(1)})=$$

$$=b_n^{(q)}\frac{P_n}{p_n}-b_n^{(q)}-(b_n^{(q-1)}+\ldots+b_n^{(1)})=b_n^{(q)}\frac{P_{n-1}}{p_n}-$$

$$-(b_n^{(q-1)}+\ldots+b_n^{(1)})\geqslant b_n^{(q-1)}\frac{P_{n-1}}{p_{n-1}}-(b_n^{(q-1)}+\ldots+b_n^{(1)})\geqslant\ldots$$

$$\ldots\geqslant b_n^{(2)}\frac{P_{n-q+2}}{p_{n-q+2}}-(b_n^{(2)}+b_n^{(1)})=b_n^{(2)}\frac{P_{n-q+1}}{p_{n-q+2}}-b_n^{(1)}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{b_n^{(1)}}{p_{n-q+1}}P_{n-q+1}-b_n^{(1)}=b_n^{(1)}\frac{P_{n-q}}{p_{n-q+1}}\geqslant 0.$$

Не умаляя общности, последовательность (S_n) можно считать действительной.

Пусть действительная неограниченная последовательность (S_n) суммируется матрицей A к числу $S\neq\infty$. Тогда последовательность (ω_n) ограничена. Действительно, предполагая противное, выделим возрастающую последовательность (n_k) натуральных чисел такую, что $|\omega_n|\leqslant|\omega_{n_k}|$, $\forall n\leqslant n_k$; $|\omega_{n_k}|\to+\infty$ $(k\to\infty)$.

Полагая в (5) $n=n_k$, используя неотрицательность коэффициентов при ω_i, теорему о модуле суммы и деля обе части (5) на $|\omega_{n_k}|$, получим

$$1-\sum_{i=1}^{q} b_{n_k}^{(i)}+b_{n_k}^{(q)}\frac{P_{n_k}}{p_{n_k}}\leqslant\left(\frac{b_{n_k}^{(q)}}{p_{n_k}}-\frac{b_{n_k}^{(q-1)}}{p_{n_k-1}}\right)P_{n_k-1}+$$

$$+\left(\frac{b_{n_k}^{(q-1)}}{p_{n_k-1}}-\frac{b_{n_k}^{(q-2)}}{p_{n_k-2}}\right)P_{n_k-2}+\ldots+\left(\frac{b_{n_k}^{(2)}}{p_{n_k-q+2}}-\frac{b_{n_k}^{(1)}}{p_{n_k-q+1}}\right)P_{n_k-q+1}+$$

$$+\frac{b_{n_k}^{(1)}}{p_{n_k-q+1}}P_{n_k-q}+\frac{|t_{n_k}|}{|\omega_{n_k}|}.$$

Группируя слагаемые при $b_{n_k}^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, q)$ и приводя подобные члены, имеем $1 \leqslant \frac{|t_{n_k}|}{|\omega_{n_k}|}$, что для достаточно больших k невозможно в силу ограниченности (t_{n_k}) и неограниченности (ω_{n_k}).

Из ограниченности (t_n), (ω_n) и из (4) следует ограниченность $\sum_{i=1}^{q} b_n^{(i)} S_{n-q+i} \equiv \gamma_n$, откуда в силу условия (2) вытекает ограниченность (S_n). Действительно, предполагая противное, возьмем возрастающую последовательность (m_k) натуральных чисел такую, что $|S_n| \leqslant |S_{m_k}|$, $\forall n \leqslant m_k$, $|S_{m_k}| \to +\infty$ $(k \to \infty)$. Тогда для всех достаточно больших k запишем

$$|\gamma_{m_k}| = |\sum_{i=1}^{q} b_{m_k}^{(i)} S_{m_k-q+i}| \geqslant b_{m_k}^{(q)} |S_{m_k}| - |S_{m_k}| \sum_{i=1}^{q-1} b_{m_k}^{(i)} =$$

$$= |S_{m_k}| (b_{m_k}^{(q)} - \sum_{i=1}^{q-1} b_{m_k}^{(i)}) > \frac{b}{2} |S_{m_k}| \to +\infty \quad (k \to +\infty),$$

что противоречит ограниченности (γ_n).

Значит, матрица A не суммирует ни одной неограниченной (и ни одной ограниченной расходящейся) последовательности.

Теорема доказана. При $q = 1$ из нее получаем один результат Н. А. Давыдова [2].

Замечание. Условие (2) существенно для справедливости теоремы. Так, взяв $q = 2$, $b_n^{(1)} = b_n^{(2)} = 1$, $p_n = 1$ $(n = 0, 1, \ldots)$, получим

$$t_n = \frac{1-2}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k + (S_{n-1} + S_n) =$$

$$= -\frac{(S_0 + \cdots + S_{n-2})}{n+1} + S_{n-1} - \frac{S_{n-1}}{n+1} + S_n - \frac{S_n}{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

для $S_n = (-1)^n$ $(n = 0, 1, \ldots)$.

Условия (1), (3) для $(b_n^{(1)})$, $(b_n^{(2)})$ и (p_n) выполнены, а условие (2) не выполнено, так как $\varliminf_{n \to \infty} (b_n^{(2)} - b_n^{(1)}) = 0$.

В заключение благодарю Г. А. Михалина за ценные советы.

Список литературы: 1. *Кук Р.* Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. М., 1960. 471 с. 2. *Давыдов Н. А.* Обобщение мерсеровой теоремы Кноппа—Белинфанте//Теория функций, функциональный анализ и их прил. 1966. Вып. 3. С. 73—77.

Поступила в редколлегию 01.09.89