

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ОБЛАСТЯХ С РАЗРЕЗОМ

Задача Неймана в случае области с гладкой границей сводится, как известно, к интегральному уравнению с помощью представления решения в виде потенциала простого слоя. В областях с разрезом, например, в $R^3\Sigma$, где Σ — кусок гладкой поверхности, это, как легко видеть, невозможно. Ниже будет показано, что в этом случае решение представимо в виде потенциала двойного слоя на Σ .

В работе автора [1] изучен вопрос о представимости решения внешней краевой задачи Неймана с гладкой границей в виде потенциала двойного слоя. Там показано, что если S — гладкая граница односвязной конечной области $\Omega \subset R^3$ и $f(x) \in L^2(S)$ ортогональна константе на S , то граничное интегродифференциальное уравнение вида

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial n(x)} \int_S \frac{\partial}{\partial n(y)} \frac{1}{|x + \varepsilon n(x) - y|} \varphi(y) ds = f(x), \quad x \in S \quad (1)$$

к которому сводится задача в случае представления решения в виде потенциала двойного слоя, разрешимо, и

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} K(K_1^{*2} - I)^{-1}f + \text{const.} \quad (2)$$

Здесь K, K_1 — интегральные операторы вида

$$(Ku)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{u(y) ds}{|x - y|}, \quad x \in S,$$

$$(K_1^* u)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{(y - x, n(x))}{|x - y|^3} u(y) ds, \quad x \in S.$$

Как известно [2], оператор $I + K_1^*$, а вместе с ним и $K_1^{*2} - I$ не имеет обратного, так как

$$((I + K_1^*)e)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial n(x)} (Ke)(x - \varepsilon n(x)) = 0$$

для $e(x)$, равной плотности электростатически равновесного распределения заряда на S . Под $(K_1^{*2} - I)^{-1}f$ в (2) понимается одно из решений уравнения $(K_1^{*2} - I)u = f$, разрешимо о в силу условия $\int_S f(x) dx = 0$ с точностью до слагаемого $Ce(x)$.

В [1] показано, что уравнение (1) можно переписать в виде

$$\int_S (n(x), n(y)) \frac{(y - x, \nabla \varphi(y))}{|x - y|^3} ds + \int_S (n(x), \nabla \varphi(y)) \frac{\partial}{\partial n(y)} \frac{1}{|x - y|} ds = f(x). \quad (1')$$

Под $\nabla \varphi(y)$ следует понимать здесь $\nabla \hat{\varphi}(y) (y \in S)$, где $\hat{\varphi}(y)$ в окрестности S определяется равенством $\hat{\varphi}(y) = \varphi(\hat{y})$, где \hat{y} — точка, в которой пересекается с S опущенный на нее из y перпендикуляр.

В уравнении (1) на φ действует оператор $L_s = L_s^1 + L_s^2$ и L_s^1 представляет собой «суперпозицию» операторов ∇ и сингулярного интегрального оператора. Поэтому в область определения L_s входят все достаточно гладкие функции $\varphi(x)$. В частности, если $\varphi = K\mu$, $\mu \in L^2(S)$, то (1') переписывается в форме

$$L_s K\mu = 2\pi (K_1^{*2} - I)\mu = f.$$

Лемма 1. Сужение \tilde{L}_s оператора L_s на множество всех непрерывно дифференцируемых функций представляет собой положительно определенный оператор, причем

$$(\tilde{L}_s \varphi \psi) = \pi \int_{R^3} (\nabla \hat{K}_1 \varphi, \nabla \hat{K}_1 \psi) d^3 x, \quad (3)$$

где

$$(\hat{K}_1 \varphi)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \varphi(y) \frac{\partial}{\partial n(y)} \frac{1}{|x-y|} ds -$$

потенциал двойного слоя.

Равенство (3), а с ним и положительность оператора \tilde{L}_s непосредственно вытекает из соотношения

$$\frac{1}{|x|} = \frac{1}{4\pi} \int_{R^3} \left(\nabla \frac{1}{|x-y|}, \nabla \frac{1}{|y|} \right) d^3 y.$$

Достаточно только заметить, что для непрерывно дифференцируемой $\varphi(x)$ векторное поле $\nabla(\hat{K}_1 \varphi)(x)$ непрерывно во всем R^3 и для больших $|x|$ $|\nabla(\hat{K}_1 \varphi)(x)| = O\left(\frac{1}{|x|^3}\right)$.

Лемма 2. L_s — неотрицательный самосопряженный неограниченный оператор с дискретным спектром, причем нулевому собственному значению отвечает единственная собственная функция — константа.

Из равенства (3) вытекает, что L_s переводит в нуль только константу. Тем самым L_s , имеющий, как это видно из (2), вполне непрерывный обратный оператор в $H_1 \subset L^2(S)$ -ортогональном дополнении константы, является самосопряженным расширением \tilde{L}_s , полученным простым замыканием. Из неотрицательности \tilde{L}_s и равенства (2) вытекают, таким образом, все утверждения леммы.

Рассмотрим теперь уравнение (1) в случае, когда интеграл слева берется по множеству Σ , представляющему собой часть гладкой замкнутой поверхности S и открытому в топологии на S . Определим оператор L_Σ как самосопряженное положительное расширение оператора $\chi_\Sigma L_s \chi_\Sigma$ с областью определения, состоящей из функций на S вида $\chi_\Sigma \varphi$, где χ_Σ — характеристическая функция Σ , таких, что $\chi_\Sigma \varphi \in D_{L_s}$.

Теорема 1. Если $\Sigma \neq S$ и удовлетворяет перечисленным выше требованиям, то уравнение

$$(L_{\Sigma}\varphi)(x) = f(x), \quad x \in \Sigma,$$

имеет единственное решение при любой $f \in L^2(\Sigma)$.

Доказательство. Покажем прежде всего, что для $\varphi = \chi_{\Sigma}\varphi$ по области определения оператора L_{Σ}

$$(L_{\Sigma}\varphi\varphi) \geq K_{\Sigma}^2(\varphi, \varphi) > 0 \quad (4).$$

Действительно, поскольку $(L_{\Sigma}\varphi, \varphi) = (L_{\Sigma}\varphi, \varphi)$, $(L_{\Sigma}\varphi, \varphi) = (L_{\Sigma}\varphi_1, \varphi_1)$, где $\varphi_1(x) = \varphi(x) - \frac{1}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} \varphi(x) ds$. Легко показать, что $\inf_{\|\varphi\|=1} \|\varphi_1\| = a > 0$.

В противном случае найдется слабо сходящаяся последовательность φ^n , $\|\varphi^n\| = 1$, такая, что $\varphi_1^n \rightarrow 0$. Но тогда φ^n будет сходиться к отличной от нуля константе на S , что абсурдно. Поэтому если λ_1 — наименьшее отличное от нуля собственное значение L_{Σ} , то $(L_{\Sigma}\varphi_1, \varphi_1) \geq \lambda_1 \|\varphi_1\|^2 \geq \lambda_1 a^2 \|\varphi\|^2$, что и доказывает неравенство (4).

Теперь доказательство теоремы завершается с помощью стандартного приема. А именно, построим гильбертово пространство H_{Σ} , представляющее собой замыкание области определения оператора L_{Σ} на норме $\|\cdot\|_1$, порожденной скалярным произведением $(\varphi, \psi)_1 = (L_{\Sigma}\varphi, \psi)$. В силу неравенства (4) оно обладает всеми необходимыми свойствами. Функционал $l(\varphi) = (f, \varphi)$ для произвольной $f \in L^2(\Sigma)$ допускает в H_{Σ} оценку

$$|(f, \varphi)| \leq \|f\| \|\varphi\| \leq \frac{\|f\|}{k_{\Sigma}} \|\varphi\|_1$$

и в силу теоремы Рисса $(f, \varphi) = l(\varphi) = (\hat{f}, \varphi)_1 = (L_{\Sigma}\hat{f}, \varphi)$. Поскольку H_{Σ} плотно в $L^2(\Sigma)$, то $L_{\Sigma}\hat{f} = f$, что и доказывает теорему.

Рассмотрим теперь задачу Неймана для области $\Omega \setminus \Sigma$, где Ω — односвязная ограниченная область с гладкой границей S , а разрез Σ обладает перечисленными выше свойствами и находится на конечном расстоянии от S .

Справедлива следующая

Теорема 2. Задача Неймана

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega \setminus \Sigma, \quad \frac{\partial u(x)}{\partial n} = f_1(x), \quad x \in \Sigma, \quad \frac{du(x)}{\partial n} = f_2(x), \quad x \in S$$

при произвольной $f_1 \in z^2(\Sigma)$ и $f_2 \in L^2(S)$, $\int_{\Sigma} f_2(x) ds = 0$, имеет решение, представимое в виде суммы потенциалов двойного слоя по Σ и S .

Доказательство. Из сказанного ранее вытекает, что система уравнений

$$\begin{cases} (L_{\Sigma}\varphi_1)(x) + \frac{\partial}{\partial n}(\hat{K}_1^s\varphi_2)(x) = f_1(x), & x \in \Sigma, \\ \frac{\partial}{\partial n}(\hat{K}_1^s\varphi_1)(x) + (L_S\varphi_2)(x) = f_2(x), & x \in S \end{cases}$$

сводится к системе уравнений Фредгольма второго рода после обращения диагональной части матрицы, стоящей в левой части. Таким образом, оператор в левой части системы имеет дискретный неотрицательный спектр и для доказательства теоремы достаточно проверить, что однородная система имеет лишь тривиальное решение в пространстве векторов $\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$, ортогональных вектору $\begin{pmatrix} 0 \\ \text{const} \end{pmatrix}$. Но если φ_1^0, φ_2^0 — решение однородной системы, то функция $(K_1^\Sigma \varphi_1^0)(x) + (K_1^S \varphi_2^0)(x)$ равна нулю вне Ω и константе внутри Ω . В силу обратимости L_Σ сразу получаем, что $\varphi_1^0 = 0$, а в силу (2) $\varphi_2^0 = \text{const}$. Тем самым теорема полностью доказана.

Список литературы: 1. Щербина В. А. Граничные операторы и один вариант метода дискретных вихрей в задаче Неймана// Теория функций, функцион. анализ и их прил. — 1984. — Вып. 43. — С. 136—143. 2. Смирнов В. И. Курс Высшей математики, IV. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1951. — 804 с.

Поступила в редколлегию 16.09.85