УДК 517.53

А. М. РУССАКОВСКИЙ

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В КЛАССЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ, ИМЕЮЩИХ ИНДИКАТОР НЕ ВЫШЕ ДАННОГО

Приведем некоторые результаты, относящиеся к интерполяции в классе $[\rho(r), H(\theta)]$ целых функций, имеющих при уточненном порядке $\rho(r)$ индикатор, не превышающий $H(\theta)$*. При этом предполагается, что $\lim\limits_{r\to\infty}\rho(r)=\rho\in(0, \infty)$.

Сходные задачи рассматривались ранее в работах [1, 2, 3, 4, 5].

Пусть $f(z)$ — целая функция с простыми корнями $\{s_k\}$, имеющая не более чем нормальный тип при уточненном порядке $\rho(r)$. Известно [1], что в этом случае множество $\{s_k\}$ имеет конечную верхнюю плотность при уточненном порядке $\rho(r)$, т. е. $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\times r^{-\rho(r)}\sum\limits_{k,\ |s_k|<r} 1<\infty$ **(1)**, и, кроме того, при целом ρ для некоторого c выполняется неравенство:

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{\rho-\rho(r)}\cdot\left|c+\rho^{-1}\sum_{|s_k|<r} s_k^{-\rho}\right|<\infty. \tag{2}$$

Обратно, если $\{s_k\}$ — последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условиям (1), (2), то существует целая функция $f(z)$ не более чем нормального типа при порядке $\rho(r)$, множество корней которой совпадает с $\{s_k\}$.

В рассматриваемой ситуации получена следующая **Теорема 1.** *Пусть множество* $\{s_k\}$ *удовлетворяет условиям* (1), (2), *а последовательность* $\{\lambda_k\}$ — *условию* $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\,|s_k|^{-\rho(|s_k|)}\cdot\ln(|f'(s_k)|^{-1}\times\times|\lambda_k|)\leqslant 0$, (3) *где* $f(z)$ — *целая функция с корнями* $\{s\}$.

Тогда в классе $[\rho(r), H(\theta)]$, *где* $H(\theta)$ — *индикатор* $f(z)$, *найдется функция* $F(z)$ *со свойством* $F(s_k)=\lambda_k$, $k=1, 2, \ldots$

Из этой теоремы следует, что достаточные условия соответствующей теоремы О. С. Фирсаковой могут быть ослаблены, а именно, можно отбросить фигурирующее в [4] требование правильной распределенности узлов интерполяции**. Кроме того, вместо условия (3) в [4] фигурировали два условия:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\,[|s_k|^{-\rho(|s_k|)}\cdot\ln|\lambda_k|-H(\psi_k)]\leqslant 0\ (\psi_k=\arg s_k)$$

$$\text{и}\ \overline{\lim_{k\to\infty}}\,[|s_k|^{-\rho(|s_k|)}\cdot\ln(|f'(s_k)|)^{-1}+H(\psi_k)]\leqslant 0,$$

---

* Эти материалы докладывались на XIV Воронежской зимней математической школе в феврале 1980 года.

** Определение и свойства правильно распределенных мн жеств см. в [1].

выполнение которых, очевидно, влечет за собой выполнение условия (3). Отметим еще, что у О. С. Фирсаковой, как и у большинства других авторов, решение $F(z)$ интерполяционной задачи строится в виде соответствующего ряда Лагранжа. Используемые нами методы позволяют доказать только факт существования решения.

Приведем схему доказательства. Само доказательство опускаем ввиду ограниченности объема статьи.

Сначала комплексная плоскость разбивается на некоторые кольца G_j (G_0 — круг) с центром в начале координат. При этом кольца с нечетными номерами отделены от точек последовательности $\{s_k\}$. Для каждого j строится функция $S_j(z)$, интерполирующая в кольце $G_{2\cdot j}: S_j(z) = f(z) \cdot \sum\limits_{s_k \in G_{2\cdot j}} \lambda_k \cdot (f'(s_k) \cdot (z - s_k))^{-1}$. Далее производится «склейка» этих функций в одну функцию $S(z)$. Для этого используются «шапочки», $\alpha_j(z)$, т. е. бесконечно дифференцируемые финитные функции, носитель каждой из которых кольцо, причем для различных j внутренности соответствующих колец не пересекаются. Функции $\alpha_j(z)$ обладают также свойствами: $\alpha_j(z) \equiv 1$ при $z \in G_{2\cdot j}$, $0 \leqslant \alpha_j(z) \leqslant 1$ при всех z, $\operatorname{supp} \alpha_j \subset G_{2\cdot j} \cup G_{2\cdot j-1} \cup G_{2\cdot j+1}$.

Функцию $S(z)$ определим теперь равенством $S(z) = \sum\limits_j \alpha_j(z) \times S_j(z)$. Эта функция, очевидно, принимает в точках s_k значения λ_k. Остается, не изменяя значений $S(z)$ в точках s_k, «подправить» ее так, чтобы она стала аналитической.

Из этих соображений решение $F(z)$ ищется в виде $F(z) = S(z) - \beta(z) \cdot f(z)$, где $\beta(z)$ — неизвестная функция, удовлетворяющая уравнению $\bar{\partial}\beta = f^{-1} \cdot \bar{\partial} S$ (4).

Требуется найти такое решение $\beta(z)$ уравнения (4), чтобы индикатор функции $F(z)$ при порядке $\rho(r)$ не превышал $H(\theta)$.

Это оказывается возможным при помощи теоремы Хермандера об оценках решений $\bar{\partial}$-уравнения в L_2 с весом $e^{-\varphi(z)} \cdot d\lambda(z)$, где φ — строго субгармоническая функция, а $d\lambda$ — мера Лебега в C. Согласно этой теореме существует такое решение $\beta(z)$ уравнения (4), когда величина $\int\limits_C |\beta|^2 \cdot e^{-\varphi} \cdot d\lambda$ оказывается конечной величиной для некоторой строго субгармонической функции $\varphi(z)$ минимального типа при порядке $\rho(r)$.

Оценка роста функции $F(z)$ получается стандартным методом из интегральной оценки $\int\limits_C |F|^2 \cdot e^{-w} \cdot d\lambda < \infty$, где $w(z)$ — субгармоническая функция с индикатором $2 \cdot H(\theta)$ при порядке $\rho(r)$, которая строится в виде суммы $w(z) = \varphi(z) + \psi(z)$, где φ — функция, уже выбранная ранее при решении $\bar{\partial}$-уравнения, а ψ — функция, которая строится с помощью теоремы П. З. Агранович [6] о существовании субгармонической функции $v(z)$ с заданным индикатором $h(\theta)$ при уточненном порядке $\rho(r)$, такой, что $\lim\limits_{r\to\infty} r^{-\rho(r)}\cdot v(re^{i\theta}) = h(\theta)$.

По этой же схеме проводится доказательство теорем о кратной интерполяции в классе $[\rho(r), H(\theta)]$.

Пусть $f(z)$ — целая функция с корнями s_k кратностей q_k, имеющая не выше чем нормальный тип при уточненном порядке $\rho(r)$. В этом случае [1] множество $\{s_k;\ q_k\}$ точек s_k, каждая из которых взята q_k раз, имеет конечную верхнюю плотность при порядке $\rho(r)$, т. е.

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-\rho(r)}\cdot\sum_{|s_k|<r} q_k < \infty \tag{5}$$

и, кроме того, при целом ρ для некоторого c выполнено неравенство

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{\rho-\rho(r)}\cdot \Big|c+\rho^{-1}\cdot\sum_{|s_k|\leqslant r} q_k\cdot s_k^{-\rho}\Big| < \infty. \tag{6}$$

Обратно, если $\{s_k;\ q_k\}$ — последовательность, удовлетворяющая приведенным выше свойствам, то существует целая функция $f(z)$ не выше чем нормального типа при порядке $\rho(r)$, множество корней которой совпадает с $\{s_k;\ q_k\}$.

Обозначим через $\gamma_{k,j}$ величину $\dfrac{1}{(j-1)!}\left(\dfrac{d}{dz}\right)^{j-1}\dfrac{(z-s_k)^{q_k}}{f(z)}\Bigg|_{z=s_k}$.

Теорема 2. *Пусть $\{s_k;\ q_k\}$ — правильно распределенное множество при порядке $\rho(r)$, удовлетворяющее условию*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\,[\,|s_k|^{-\rho(|s_k|)}\cdot\ln\max_{1\leqslant j\leqslant q_k}|\gamma_{k,j}| + H(\psi_k)] \leqslant 0, \tag{7}$$

где $H(\theta)$ — индикатор функции $f(z)$, множество корней которой совпадает с $\{s_k;\ q_k\}$, а последовательность $\{\lambda_{k,j}\}$ удовлетворяет условию

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left[\,|s_k|^{-\rho(|s_k|)}\cdot\ln\max_{1\leqslant j\leqslant q_k}\frac{|\lambda_{k,j}|}{(j-1)!} - H(\psi_k)\right] \leqslant 0. \tag{8}$$

Тогда в классе $[\rho(r), H(\theta)]$ найдется функция $F(z)$ со свойством $F^{(j-1)}(s_k)=\lambda_{k,j}$, $j=1,\ldots q_k$, $k=1, 2, \ldots$

Если наложить некоторые ограничения на рост кратностей q_k, то от множества $\{s_k;\ q_k\}$ можно не требовать правильной распределенности. Точнее, верна следующая

Теорема 3. *Пусть множество $\{s_k;\ q_k\}$ удовлетворяет условиям (5) — (7) и условию $\lim\limits_{k\to\infty}|s_k|^{-\rho(|s_k|)}\cdot q_k\cdot\ln|s_k| = 0$, и пусть последовательность $\{\lambda_{k,j}\}$ удовлетворяет условию (8). Тогда в классе $[\rho(r), H(\theta)]$ существует функция $F(z)$ со свойством $F^{(j-1)}(s_k) = \lambda_{k,j}$, $j=1,\ldots q_k$, $k=1, 2\ldots$*

Доказательства теорем 2 и 3 отличаются от случая простых узлов выбором функции $S_j(z)$.

Список литературы: 1. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. — М.: ГИТТЛ, 1956. — 632 с. 2. *Леонтьев А. Ф.* Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка нормального типа. — Докл. АН СССР, 1949, 66, № 2, с. 153—156. 3. *Фирсакова О. С.* Некоторые вопросы интерполирования с помощью целых функций. — Докл. АН СССР, 1958, **120**, № 3, с 477—480. 4. *Братищев А. В., Коробейник Ю. Ф.* Интерполяционная задача в пространствах целых функций конечного порядка. Изв. АН СССР, сер. мат., 1976, 40, № 5, с. 1102—1127. 5. *Berenstein C., Taylor B.* A new look at interpolation theory for entire functions of one variable. — Adv. Math, 1979, **33**, № 2, p. 109—143. 6. *Агранович П. З.* Существование голоморфной в угле функции с заданным индикатором. — Препринт ФТИНТ АН УССР, 1977. — 24 с.

Поступила в редколлегию 16.06.80