

К СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

1. Основным результатом статьи является построение функциональной модели и вычисление спектральных проекторов абсолютно непрерывного спектра широкого класса ограниченных операторов. Идея построения подобных проекторов возникла в теории несамосопряженных дифференциальных операторов, где исторически первым методом спектрального анализа был риссовский интеграл. Теория дилатаций и использование операторных моделей открыли новый путь, основанный на исследовании свойств характеристической функции оператора. С использованием этого подхода в работе [1] строились спектральные проекторы для диссипативного оператора Шредингера. Естественно было бы обобщить эти результаты на более общий случай, особенно в связи с результатами работ [2, 3].

Здесь эта задача решается для вполне неунитарного ограниченного оператора, характеристическая функция которого ограничена в единичном круге.

2. Предварительные сведения. Пусть T — линейный ограниченный вполне неунитарный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H . Положим

$$D_* = \left| I - TT^* \right|^{\frac{1}{2}}, \quad D = \left| I - T^*T \right|^{\frac{1}{2}}, \\ N_* = \overline{D_*H}, \quad N = \overline{DH}, \\ V_* = \text{sign}(I - TT^*), \quad V = \text{sign}(I - T^*T).$$

Образуем гильбертово пространство X из векторов вида

$$h = (\dots, h_{-1}, \boxed{h_0}, h_1, \dots),$$

где $h_0 \in H$, $h_{-n} \in N_*$, $h_n \in N$ ($n \geq 1$) и

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \|h_n\|^2 < \infty.$$

Определим в X операторы U и J :

$$Uh = (\dots, h_{-2}, \boxed{V_* D_* h_{-1} + T h_0}, -T^* h_{-1} + D h_0, h_1, \dots), \\ Jh = (\dots, V_* h_{-2}, V_* h_{-1}, \boxed{h_0}, V h_1, V h_2, \dots).$$

В [3] установлено, что $U - J$ -унитарная дилатация оператора T , т. е. $T^n = P U^n | H$, $[Uf, Ug] = [f, g]$, где $n \in N$, P — ортопроектор на H , $[f, g] = (Jf, g)$. Рассмотрим подпространства

$$M(L) = \underset{a}{V_-} U^n L, \quad L = \overline{(U - T)H}, \quad M(L_*) = \underset{n}{V} U^n L_*, \\ L_* = \overline{(I - UT^*)H}.$$

Известно, что эти подпространства являются проекционно полными [4]. Этот факт можно более просто получить опираясь на результаты работы [5].

3. Функциональная модель. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что характеристическая функция (см. [2]): $\theta_T(z) = -V_*T + zD_*(I - zT^*)^{-1}D : N \rightarrow N_*$, определена всюду и ограничена в единичном круге: $\sup \{ \|\theta_T(z)\| : |z| < 1 \} < \infty$.

Рассмотрим ограниченные отображения:

$$S(k, r) : H \rightarrow L_2(0, 2\pi; N), \quad S_*(k, r) : H \rightarrow L_2(0, 2\pi; N_*),$$

которые определяются равенствами

$$S(k, r)f = \sum_{n=0}^k r^n e^{-int} D T^n f, \quad S_*(k, r)f = \sum_{n=0}^k r^n e^{int} D_* T^{*n} f \quad (r \leq 1).$$

Лемма. *Существуют пределы*

$$S(r) = s - \lim_{k \rightarrow \infty} S(k, r), \quad S_*(r) = s - \lim_{k \rightarrow \infty} S_*(k, r).$$

Доказательство. Введем вспомогательный оператор:

$$G_r : L_2(0, 2\pi; H) \rightarrow L_2(0, 2\pi; H) \quad (l \in H, \lambda = e^{it}, 0 \leq r \leq 1),$$

$$G_r(\lambda^s l) = r^s T^s V_* D_* l + \sum_{m=1}^s r^{s-m+1} \lambda^m D T^{s-m} V_* D_* l - \lambda^{s+1} T^s l,$$

$$G_r\left(\sum_{s=1}^N \lambda^s l_s\right) = \sum_{s=0}^N G_r(\lambda^s l_s),$$

определенный вначале на конечных суммах. Непосредственными вычислениями можно показать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{N+1} \|f_m\|^2 &= (V_* \theta_T(r\lambda) \sum_{m=1}^{N+1} \lambda^{m-1} f_m, \sum_{s=0}^N \lambda^s l_s)_{L_2}, \\ (V_* \sum_{s=0}^N \lambda^s l_s, \sum_{s=0}^N \lambda^s l_s)_{L_2} &\geq \|f_0\|^2 + (V \sum_{k=1}^{N+1} \lambda^k f_k, \sum_{k=1}^{N+1} \lambda^k f_k)_{L_2}, \end{aligned}$$

где $\sum_{m=0}^{N+1} \lambda^m f_m = \sum_{s=0}^N G_r(\lambda^s l_s)$, с помощью которых несложно доказать ограниченность оператора G_r . Используя затем равенство

$$(G_r(\sum_{k=0}^N r^k \lambda^k V_* D_* T^{*k} g_0), g_0)_{L_2} = \left\| \sum_{k=0}^N r^k \lambda^k V_* D_* T^{*k} g_0 \right\|_{L_2}^2,$$

нетрудно видеть, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \|r^k V_* D_* T^{*k} g_0\|^2$ сходится, а из этого сразу следует требуемое утверждение относительно второго предела. Аналогично доказывается существование первого предела.

Введем отображение

$$\begin{aligned}\Phi_+ : X &\rightarrow L_2(0, 2\pi; N), \quad \Phi_- : X \rightarrow L_2(0, 2\pi; N_*), \\ \Phi_+ h &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-ikt} \theta_T^* V_* h_{-k} + e^{-it} S(1) h_0 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{i(k-1)t} h_k, \\ \Phi_- h &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-ikt} h_{-k} + S_*(1) h_0 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{i(k-1)t} \theta_T V h_k,\end{aligned}$$

где $\theta_T = s - \lim_{r \rightarrow 1-0} \theta_T(re^{it})$.

Справедливы следующие утверждения: 1) Φ_{\pm} — ограниченные операторы; 2) $\Phi_{\pm} U h = e^{it} \Phi_{\pm} h$ ($h \in X$), т. е. Φ_{\pm} — спектральны; 3) $\Phi_+ M \times \times (L) = L_2(0, 2\pi; N)$, $\Phi_- M(L_*) = L_2(0, 2\pi; N_*)$ и имеют место равенства $(V \Phi_+ h, \Phi_+ g) = [h, g]$ ($\forall h, g \in M(L)$), $(V_* \Phi_- \varphi, \Phi_- f) = [\varphi, f]$ ($\forall \varphi, f \in M(L_*)$); 4) $\tilde{R} = M(L)^{\perp 1} = \text{Ker } \Phi_+$, $R = M(L_*)^{\perp 1} = \text{Ker } \Phi_-$.

В дальнейшем будем предполагать, что $\dim N = \dim N_* < \infty$. Обозначим через $\{e_k\}$ и $\{\tilde{e}_k\}$ ортонормированные базисы из собственных векторов самосопряженных операторов $\Delta = V - V \theta_T^* V_* \theta_T V : N \rightarrow N$, $\Delta_* = V_* - V_* \theta_T V \theta_T^* V_* : N_* \rightarrow N_*$ и пусть $\delta_k, \tilde{\delta}_k$ — соответствующие собственные числа. Нетрудно показать, что операторы Δ, Δ_* неотрицательны.

Определим пространство $L_2(\Delta, N)$ как множество функций $f(t)$ со значениями в N :

$$\int_0^{2\pi} (\Delta f, f) dt < \infty, \quad \|f\|_{\Delta}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\Delta f, f) dt.$$

Это пространство становится полным после факторизации по $\text{Ker } \Delta$ (в бесконечномерном случае это не всегда верно). Аналогично вводится пространство $L_2(\Delta_*, N_*)$.

Преобразование $\Phi^< : X \rightarrow L_2(\Delta, N)$, определяемое равенством

$$\Phi^< h = \sum_{\delta_k > 0} \frac{1}{\delta_k} ((V \Phi_+ - V \theta_T^* V_* \Phi_-) h, e_k) e_k,$$

обладает следующими свойствами: 1) $\Phi^< X = L_2(\Delta, N)$; 2) $\Phi^<$ — спектральный; 3) $\forall f \in R[f, f] = \|\Phi^< f\|_{\Delta}^2$; 4) $M(L_*) = \text{Ker } \Phi^<$.

Аналогично оператор $\Phi^> : X \rightarrow L_2(\Delta_*, N_*)$, определяемый равенством

$$\Phi^> h = \sum_{\tilde{\delta}_k > 0} \frac{1}{\tilde{\delta}_k} ((V_* \Phi_- - V_* \theta_T V \Phi_+) h, \tilde{e}_k) \tilde{e}_k,$$

обладает следующими свойствами: 1) $\Phi^> X = L_2(\Delta_*, N_*)$; 2) $\Phi^>$ — спектральный; 3) $\forall f \in \tilde{R}[f, f] = \|\Phi^> f\|_{\Delta_*}^2$; 4) $M(L) = \text{Ker } \Phi^>$.

Введем теперь отображения

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_- + \Phi^< : X \rightarrow L_2(0, 2\pi, N_*) + L_2(\Delta, N), \\ \Phi_* &= \Phi_+ + \Phi^> : X \rightarrow L_2(0, 2\pi, N) + L_2(\Delta_*, N_*).\end{aligned}$$

Операторы Φ , Φ_* представляют собой те отображения, которые задают модельные представления. Отображение Φ_* переводит пространство X в пространство \hat{X} вектор-функций вида $f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$, где $f_1 \times \times (t) \in L_2(0, 2\pi; N)$, $f_2(t) \in L_2(\Delta_*, N_*)$. На X задается индефинитное скалярное произведение:

$$[f, g]_X = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & \Delta_* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \right\rangle dt,$$

где $\left\langle \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & \Delta_* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \right\rangle = (Vf_1, g_1) + (\Delta_* f_2, g_2)$. В такой метрике для оператора Φ_* справедливо равенство $[\Phi_* f, \Phi_* g]_{\hat{X}} = [f, g]$. Аналогичный результат нетрудно сформулировать для отображения Φ . Следует заметить, что подобная функциональная модель ранее несколько иными методами строилась в [4].

4. Спектральные проекторы. По аналогии со случаем сжимающих (диссипативных) операторов (см. [1]) назовем $N_e = \overline{P\hat{R}}$ абсолютно непрерывным подпространством.

Теорема 1. Если характеристическая функция оператора T ограничена в единичном круге, то оператор P как оператор из R в N_e обратим в широком смысле.

Доказательство. Рассмотрим оператор $\hat{P} = \Phi_* P \Phi_*^{-1}$. В пространстве \hat{X} этот оператор действует следующим образом:

$$\hat{P} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 - P_+ f_1 - \theta_T^* V_* \tilde{P}_- (\theta_T V f_1 + V_* \Delta_* f_2) \\ f_2 - \tilde{P}_- (\theta_T V f_1 + V_* \Delta_* f_2) \end{pmatrix},$$

где P_+ и \tilde{P}_- — ортопроекторы на $H_+^2(N)$ и $H_-^2(N_*)$ соответственно. При этом с точностью до факторизации по Керн Δ справедливо

$$\Phi_* h = \begin{pmatrix} V \Delta \Phi < h \\ -\theta_T V \Phi < h \end{pmatrix} \quad (\forall h \in R).$$

Таким образом, для всех $h \in R$ $\hat{P} \Phi_* h = \begin{pmatrix} P_- V \Delta \Phi < h \\ -\theta_T V \Phi < h \end{pmatrix}$, где P_- — ортопроектор на $H_-^2(N)$.

Рассмотрим теперь уравнение $Ph = 0$ ($h \in R$). Вследствие того что $R = M(L_*)^{[1]}$ нетрудно получить: $h_n = 0$ ($n \leq 0$). Так как $(\Delta \Phi < h, \Delta g) = (V \sum_{k=1}^{\infty} e^{i(k-1)t} h_k, \Delta g)$ ($\forall g \in L_2(0, 2\pi; N)$), то из равенства $\|Ph\|^2 = 0$ имеем $(\Delta_* \theta_T V \Phi < h, \theta_T V \Phi < h) = 0$, т. е. $V_* \theta_T \Delta \Phi < h = 0$.

Из условия ограниченности характеристической функции следует ее факторизация $\theta_T = \theta_i \tilde{\theta}_e$, где θ_i — внутренняя функция; $\tilde{\theta}_e$ — внешняя, что значит: $\tilde{\theta}_e$ обратим в широком смысле как оператор из $H_+^2(N)$ в $H_+^2(N_*)$ (см. [6]). Следовательно, $\Delta \Phi < h = 0$, т. е. $h_k = 0$ ($k > 0$). Таким образом, $h = 0$ и теорема доказана.

Этот результат аналогичен результату Б. С.-Надя, Ч. Фояша для сжатий (см. [6]).

Спектр σ_e оператора $T_e = T|_{N_e}$ назовем абсолютно непрерывным. Он совпадает с множеством чисел e^{it} , для которых оператор $\Delta(t) \neq 0$.

В модельном пространстве \hat{X} определим спектральные проекторы $B_\omega = \hat{P}\chi_\omega\hat{P}^{-1}: \hat{N}_e \rightarrow \hat{N}_e$, где $\hat{N}_e = \Phi_*N_e$ и χ_ω — оператор умножения на индикатор множества ω . В исходном же пространстве спектральные проекторы естественно ввести равенством $B_\omega = \Phi_*^{-1}\hat{B}_\omega\Phi_*$.

Пусть $e^{it} \in \sigma(T)$. Назовем точку e^{it} правильной, если существует окрестность $V_\varepsilon = \{z: |e^{it} - z| < \varepsilon, |z| < 1\}$, что $\bar{\theta}_\varepsilon$ обратима в ней и $\|\bar{\theta}_\varepsilon^{-1}(z)\| \leq \text{const}$ для всех $z \in V_\varepsilon$. В противном случае назовем ее спектральной особенностью.

Теорема 2. Пусть ω — множество таких точек $t \in [0, 2\pi]$, что e^{it} не является спектральной особенностью, B_ω — соответствующий проектор абсолютно непрерывного спектра. Если $\{f, g\} \subset R$ и $f_0 = Pf$, $g_0 = Pg$, то действие спектральных проекторов описывается следующим образом:

$$(B_\omega f_0, g_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_\omega (\theta_T^{-1} V_* \Delta_* \Phi^> f_0, \Phi^< g_0) dt. \quad (1)$$

Доказательство. Из определения проекторов B_ω имеем

$$[B_\omega \hat{P} \Phi_* f, \Phi_* g]_{\hat{X}} = \frac{1}{2\pi} \int_\omega (\Delta \Phi^< f, P_- V \Delta \Phi^< g + \theta_T^* V_* \theta_T V \Phi^< g) dt.$$

Так как с точностью до упоминавшейся факторизации справедливы соотношения $\Phi_* g_0 = P_- V \Delta \Phi^< g$, $\Phi^> g_0 = -\theta_T V \Phi^< g$, $\Phi^< g_0 = \Phi_* g_0 - \theta_T^* V_* \Phi^> g_0$, то, используя равенство $(B_\omega f_0, g_0) = [\hat{B}_\omega \hat{P} \Phi_* f, \Phi_* g]_{\hat{X}}$,

имеем $(B_\omega f_0, g_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_\omega (\Delta V \theta_T^{-1} \Phi^> f_0, \Phi^< g_0) dt$, что, как нетрудно видеть, совпадает с (1).

Для полноты изложения приведем следующую теорему о разложении (доказательство аналогично [1]).

Теорема 3. Если $f \in PR$, то $\|B_{\omega_\varepsilon} f - f\| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, где ω_ε — множество точек t из $(\varepsilon, 2\pi - \varepsilon): e^{it}$ не является спектральной особенностью.

В заключение отметим, что результаты этой работы справедливы также для широкого класса неограниченных операторов, для которых характеристическая функция определена и ограничена в одной из полуплоскостей.

Список литературы: 1. Павлов Б. С. Самосопряженная дилатация диссипативного оператора Шредингера и разложение по его собственным функциям // Мат. сб. — 1977. — 102. — С. 511—536. 2. Кужель А. В. Характеристическая оператор-функция произвольного ограниченного оператора // ДАН УССР. — 1968. — № 3. — С. 233—236. 3. Кужель А. В. /-самосопряженные и /-унитарные дилатации линейных операторов // Функцион. анализ и его прил. — 1983. — 17, вып. 1. — С. 83—84. 4. McEnnis B. W. Models for operators with

bounded characteristic function // Acta Sci. Math. — 1981. — 43. — P. 71 — 90.
5. Кужель А. В. Правильные расширения эрмитовых операторов в пространстве с индефинитной метрикой // ДАН СССР. — 1982. — 265, № 5. — С. 1059—1061.
6. Секефальви-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Мир, 1970. — С. 431.

Поступила в редколлегию 17.04.86