УДК 517.55

В. Н. ЛОГВИНЕНКО

О ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЯХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА, МЕДЛЕННО РАСТУЩИХ ВДОЛЬ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ГИПЕРПЛОСКОСТИ

Через $\boldsymbol{C}^n$ обозначается, как обычно, n-мерное линейное комплексное пространство векторов $z=(z_1, \ldots, z_n)$, через $\boldsymbol{R}^n$ — вещественная гиперплоскость в $\boldsymbol{C}^n$. Пространство $\boldsymbol{C}^n$ наделяется метриками, порожденными нормами: $|z|_p=\{|z_1|^p+\cdots+|z_n|^p\}^{1/p}$, $1\leqslant p<\infty$; $|z|_\infty=\max\{|z_j|: j=1, \ldots, n\}$. Через $K(x, h)$, $x\in\boldsymbol{R}^n$, $h>0$ обозначается гиперкуб $\{y\in\boldsymbol{R}^n: |y-x|_\infty\leqslant h\}$, через $B(x, h)$ — гипершар $\{y\in\boldsymbol{R}^n: |y-x|_2\leqslant h\}$. Измеримое множество $E\subset\boldsymbol{R}^n$ называется плотным относительно $F\subset\boldsymbol{R}^n$, если для некоторых постоянных $L<\infty$ и $\delta>0$ $\inf\{|E\cap K(x, L)|: x\in F\}=\delta$. Здесь под $|A|$ понимается лебегова мера множества A. При $F=\boldsymbol{R}^n$ множество E называется относительно плотным. Множество $E\subset\boldsymbol{R}^n$ называется ε-сетью для $F\subset\boldsymbol{R}^n$, если $\sup\{\inf\{|y-x|_1: x\in E\}: y\in F\}=\varepsilon\,(<\infty)$.

Говорят, что целая функция $f(z)$, $z\in\boldsymbol{C}^n$, имеет экспоненциальный тип не выше σ, если величина $\sup\{|f(z)|\exp(-A|z|_1): z\in\boldsymbol{C}^n\}$ конечна при любом $A>\sigma$. Если, кроме того, эта величина бесконечна при любом $A<\sigma$, то экспоненциальный тип $f(z)$ равен σ. Классический результат М. Картрайт [1] описывает важное в приложениях свойство таких функций: для любой целой функции $f(z)$, $z\in \boldsymbol{C}$, экспоненциального типа $\sigma<\pi$ справедлива оценка $\sup\{|f(x)|: x\in \boldsymbol{R}\}\leqslant C\sup\{|f(n)|: n\in \boldsymbol{Z}\}$, где конечная величина $C=C_\sigma$ не зависит от f. Теорема Картрайт неоднократно уточнялась и обобщалась, но при этом до недавнего прошлого речь шла о функциях одного комплексного переменного. Простой многомерный аналог этой теоремы легко получить редукцией к одному переменному, если множество $E\subset \boldsymbol{R}^n$, на котором целая функция ограничена априори, является прямым произведением подмножеств вещественной оси. В начале семидесятых годов были получены следующие два многомерных аналога результата Картрайт, в которых это дополнительное условие отсутствует.

Теорема А *(Б. Я. Левин* [2]*). Пусть E — относительно плотное подмножество $\boldsymbol{R}^n$. Тогда для любой целой функции $f(z)$, $z\in \boldsymbol{C}^n$, экспоненциального типа не выше σ выполнено неравенство* $\sup\{|f(x)|: x\in \boldsymbol{R}^n\}\leqslant \Gamma\sup\{|f(x)|: x\in E\}$ **(1)**, *где конечная величина $\Gamma=\Gamma(\sigma, E)$ не зависит от f.*

В дальнейшем под $\Gamma(\sigma, E)$ понимается наименьшая из величин, для которых неравенство (1) выполнено для всех $f(z)$, удовлетворяющих условию теоремы.

Теорема Б [3]. *Пусть E — ε-сеть в $\boldsymbol{R}^n$, а для числа $\sigma\in(0, \infty)$ справедлива оценка $\sigma\varepsilon<(2([en]+1))^{-1}$. Тогда для любой целой функции $f(z)$, $z\in \boldsymbol{C}^n$, экспоненциального типа не выше σ выполняется неравенство* $\sup\{|f(x)|: x\in \boldsymbol{R}^n\}\leqslant(1-\sigma\varepsilon)^{-1}\sup\{|f(x)|: x\in E\}$.

Используя аппроксимационный метод, развитый в [3], нетрудно доказать теорему A и следующее утверждение, являющееся комбинацией теорем А и Б.

Теорема 1. *Пусть F — относительно плотное подмножество $\boldsymbol{R}^n$, а E — ε — сеть для F, причем $\Gamma(2([en]+1)\sigma, F)\varepsilon<(2([en]+1))^{-1}$. Тогда для любой целой функции $f(z)$, $z\in \boldsymbol{C}^n$, экспоненциального типа не выше σ справедлива оценка* $\sup\{|f(x)|: x\in \boldsymbol{R}^n\}\leqslant\Gamma(\sigma, F)\times(1-\Gamma(\sigma, F)\varepsilon)^{-1}\sup\{|f(x)|: x\in E\}$.

Тот же самый метод позволяет изучать поведение на вещественной гиперплоскости целых функций экспоненциального типа, ограниченных априори на подмножествах E, близких к плотным, но таковыми не являющихся. Такие функции не обязаны, вообще говоря, быть ограниченными на $\boldsymbol{R}^n$, но, как показывают следующие теоремы, они не могут быстро расти вдоль $\boldsymbol{R}^n$.

Теорема 2. *Пусть измеримое множество $F\subset \boldsymbol{R}^n$ таково, что при некотором $\alpha>0$*

$$\int\limits_{CF\setminus B(0,e)} (\ln|x|_2)^{-\alpha}dx<\infty, \tag{2}$$

E плотно относительно F. Любой паре положительных чисел σ и η отвечает такая конечная величина $\Delta=\Delta(F, E, \sigma, \eta)$, что для каждой целой функции $f(z)$, $z\in \boldsymbol{C}^n$, экспоненциального типа не выше σ при любом $x\in \boldsymbol{R}^n$ выполнено неравенство

$$|f(x)|\leqslant\Delta\exp\{\eta(\ln(1+|x|_2))^{\alpha/n}\}\sup\{|f(x)|: x\in E\}. \tag{3}$$