УДК 517.547.2

*И. В. ОСТРОВСКИЙ*

# О НУЛЕВЫХ МНОЖЕСТВАХ ЦЕЛЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЭРМИТОВО-ПОЗИТИВНЫХ ФУНКЦИЙ

1°. В [1] получен ряд результатов, относящихся к проблеме описания нулевых множеств целых эрмитово-позитивных функций, поставленной в монографии [2, с. 398]. Цель настоящей работы — получить более точные результаты при дополнительном предположении периодичности функций. Такие функции являются, с точностью до постоянного множителя, характеристическими решетчатых вероятностных распределений в $R^n$, достаточно быстро убывающих на бесконечности.

Будем придерживаться следующих обозначений: $t=(t_1, \cdots, t_n)$, $x=(x_1, \cdots, x_n)$, $\cdots$ — точки пространства $C^n$, $\langle t, x\rangle = \sum_{\nu=1}^{n} t_\nu x_\nu$, $\|t\| = \max_{1\leqslant\nu\leqslant n} |t_\nu|$. Пусть $B_\pi$ — класс целых функций вида $f(t)=\sum_{k\in Z^n} c_k e^{i\langle k, t\rangle}$, $t\in C^n$ (1), удовлетворяющих условию $f(i\eta) > 0$, $\eta\in R^n$ (2), причем ряд в (1) сходится абсолютно. Заметим, что из (2) следует, что все коэффициенты в (1) действительны. Обозначим через $B_\pi^+$ подкласс в $B_\pi$, состоящий из функций (1) с неотрицательными коэффициентами $c_k$.

Основным результатом работы является следующая теорема, показывающая, что нулевые множества функций класса $B_\pi^+$ те же самые, что у функций класса $B_\pi$.

**Теорема 1.** Для любой целой функции $f\in B_\pi$ существует функция $f_1\in B_\pi^+$, не имеющая нулей и такая, что $ff_1\in B_\pi^+$.

Из этой теоремы легко получается следующий результат, дающий полное описание нулевых множеств функций класса $B_\pi^+$ в случае $n=1$.

**Теорема 2.** *Пусть $A$ — счетное множество в $C$ (среди точек $A$ могут быть кратные), не имеющие конечной предельной точки. Для того, чтобы $A$ являлось нулевым множеством функции класса $B_\pi^+$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:* 1) $A\cap\{t\colon \operatorname{Re} t=0\}=\varnothing$; 2) $t\in A \leftrightarrow -\bar{t}$, $t+2\pi\in A$, *причем кратности точек $t$, $-\bar{t}$, $\bar{t}+2\pi$ одинаковы.*

Замена переменной $(\exp(it_1), \ldots, \exp(it_n)) \to (z_1, \ldots, z_n)$ переводит класс $B_\pi$ в класс $F$ функций $g$, аналитических в области $\{z: 0<|z_\nu|<\infty,\ \nu=1, \ldots, n\}$, представимых там рядами Лорана $g(z)=\sum_{k\in Z^n} a_k z^k$ $(z^k = z_1^{k_1}\cdots z_n^{k_n})$ и удовлетворяющих условию $g(x)>0$, $x\in R_+^n$. Обозначая через $F^+$ подкласс в $F$, состоящий из функций с неотрицательными коэффициентами $a_k$, можем переформулировать теорему 1 в виде: для любой функции $g \in F$ существует функция $g_1 \in F^+$, не имеющая нулей и такая, что $gg_1 \in F^+$. Возникает вопрос, сохранит ли силу это утверждение, если вместо рядов Лорана рассматривать обычные степенные ряды. В случае $n = 1$ ответ на этот вопрос утвердителен.

**Теорема 3.** *Пусть $g$ — целая функция в $C$, положительная на полуоси $\{z\colon z \geqslant 0\}$. Существует целая функция $g_1$ с положительными коэффициентами, не имеющая нулей и такая, что все коэффициенты функции $gg_1$ положительны.*

*Замечание.* Как известно [3, с. 83], для всякого полинома $g$, положительного при $z \geqslant 0$, существует полином $g_1$ с положительными коэффициентами такой, что все коэффициенты $gg_1$ положительны. В работе [4] имеются результаты, относящиеся к оценке $\deg g_1$ в зависимости от расположения корней $g$. Представляется интересным вопрос об оценке минимального возможного роста целой функции $g_1$, фигурирующей в теореме 3.

Распространяется ли теорема 3 на случай $n > 1$, выяснить не удалось, но имеет место следующая теорема.

**Теорема 4.** *Пусть $g$ — целая функция в $C^n$, положительная при $z \in R^n_+$ и допускающая в $C^n$ оценку $\ln^+\ln^+|g(z)| = o(\sqrt{\|z\|})$, $\|z\| \to \infty$* **(3)**. *Существует целая функция $g_1$ с положительными коэффициентами, не имеющая нулей и такая, что все коэффициенты функции $gg_1$ положительны.*

2°. Для доказательства теоремы 1 понадобится следующая

**Лемма 1.** *Пусть $q(r) > 1$ — непрерывная функция на полуоси $[0, \infty)$, а $\beta$ — положительное число. Существует целая функция $h$ вида*

$$h(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \exp(m \operatorname{ch} z), \quad a_m \geqslant 0, \tag{4}$$

*удовлетворяющая условиям $h(r) \geqslant q(r)$, $r \geqslant 0$* **(5)**, *$h(r + h^{-\beta} \times (r)) \leqslant Ch(r)$, $r \geqslant 0$* **(6)**, *где $C > 1$ — постоянная.*

Пусть $f$ — функция класса $B_\pi$. В силу (2) существует непрерывная на полуоси $[0, \infty)$ функция $\delta(r) > 0$ такая, что в полидиске $\{t : \|t - i\eta\| < \delta(\|\eta\|)\}$, $\eta \in R^n$, имеем $f(t) \neq 0$. Введем непрерывную на полуоси $[0, \infty)$ функцию

$$G(r) = \max_{\xi \in \mathrm{R}^n, \|\eta\| \leqslant r} \{\ln^+|f(\xi + i\eta)| + |\ln f(i\eta)| + 2n \times \\ \times \sum_{\mu, \nu=1}^{n} \left| \frac{\partial^2}{\partial\eta_\mu \partial\eta_\nu} \ln f(i\eta) \right| + 1\}. \tag{7}$$

Согласно лемме 1 существует целая функция $h$ вида (4), удовлетворяющая условиям $h(r) \geqslant \max\{\delta^{-7}(r), 2G^{22}(r)\}$, $r \geqslant 0$ **(8)**; $h(r + h^{-1/8}(r)) \leqslant Ch(r)$, $r \geqslant 0$ **(9)**, где $C > 1$ — постоянная. Положим $H(z) = \prod_{\nu=1}^{n} h(z_\nu)$, $z = (z_1, \ldots, z_n) \in C^n$.

Функция $H$ удовлетворяет условиям $H(\eta) \geqslant \max\{\delta^{-7}(\|\eta\|), 2G^{22}(\|\eta\|)\}$, $\eta \in R^n$ **(10)**; $H(\eta+\tau) \leqslant DH(\eta)$, $\|\tau\| \leqslant H^{-1/8}(\eta)$; $\tau, \eta \in R^n$ **(11)**, где $D > 1$ — постоянная. Неравенство (10) следует из (8), поскольку $h(x) \geqslant 1$, $x \in R$, и, следовательно, $H(\eta) \geqslant \max\limits_{1 \leqslant \nu \leqslant n} h(|\eta_\nu|) = h(\|\eta\|)$. Чтобы получить (11), заметим, что так как $H(\eta) \geqslant h(|\eta_\nu|)$, то $|\tau_\nu| \leqslant \|\tau\| \leqslant H^{-1/8}(\eta) \leqslant h^{-1/8}(|\eta_\nu|)$ и

$$H(\eta+\tau) = \prod_{\nu=1}^{n} h(\eta_\nu + \tau_\nu) \leqslant \prod_{\nu=1}^{n} h(|\eta_\nu| + |\tau_\nu|) \leqslant \prod_{\nu=1}^{n} h(|\eta_\nu| +$$

$$+ h^{-1/8}(|\eta_\nu|)) \leqslant C^n \prod_{\nu=1}^{n} h(|\eta_\nu|) = C^n H(\eta).$$

Положим $\psi(t) = \exp H(it)$, $\varphi(t) = f(t)\psi(t)$ **(12)**.

Очевидно, $\psi \in B_\pi^+$ и не имеет нулей, а $\varphi \in B_\pi$ и поэтому $\varphi(t) = \sum\limits_{k \in Z^n} c_k e^{i\langle k, t\rangle}$ **(13)**, где коэффициенты $c_k$ действительны. Покажем, что все эти коэффициенты, за исключением конечного числа, положительны.

Так как $\varphi$ — целая, $2\pi$ — периодическая по каждой из переменных $t_\nu$, то из равенства $c_k = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\|\xi\| \leqslant \pi} e^{-i\langle k, \xi\rangle} \varphi(\xi)\, d\xi$ следует, что при любом $\eta \in R^n$ имеем

$$c_k = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\|\xi\| \leqslant \pi} e^{\langle k, \eta\rangle} e^{-i\langle k, \xi\rangle} \varphi(\xi + i\eta) d\xi,$$

откуда, учитывая, что $c_k \in R$, $\varphi(i\eta) > 0$, получаем

$$\frac{(2\pi)^n c_k}{e^{\langle k, \eta\rangle}\varphi(i\eta)} = \int\limits_{\|\xi\| \leqslant \pi} Re\left\{e^{-i\langle k, \xi\rangle} \frac{\varphi(\xi + i\eta)}{\varphi(i\eta)}\right\} d\xi = \int\limits_{\|\xi\| \leqslant \varepsilon} +$$

$$+ \int\limits_{\varepsilon \leqslant \|\xi\| \leqslant \pi} = I_1 + I_2, \tag{14}$$

где $\varepsilon = \varepsilon(\|\eta\|) > 0$ будет выбрано позднее.

3°. Чтобы оценить снизу интеграл $I_1$, нам понадобятся некоторые свойства функции $b(\eta) = \ln \varphi(i\eta)$, $\eta \in R^n$. Положим $\varkappa(\eta) = \min\{\delta(\|\eta\|), H^{-1/8}(\eta)\}$ **(15)**.

***Лемма 2.*** *Справедливы неравенства*

$$b(\eta) \geqslant \frac{2}{1} H(\eta), \quad \eta \in R^n; \tag{16}$$

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 b(\eta)}{\partial\eta_\mu \partial\eta_\nu} \xi_\mu \xi_\nu \geqslant \frac{1}{2} H(\eta)\langle\xi, \xi\rangle, \xi, \eta \in R^n; \tag{17}$$

$$|(d/dz)^k b(\eta + z\xi)|_{z=0} \leqslant Ak!\, H(\eta)(\|\xi\|/\varkappa(\eta))^k, \tag{18}$$

$$k = 1, 2, \ldots;\ \eta, \xi \in R^n, \|\xi\| < \varkappa(\eta),$$

*где $A > 0$ — не зависящая от $k$, $\xi$, $\eta$ постоянная.*

Доказательство. В силу (12), (7) и (10) имеем $b(\eta) = \ln f(i\eta) + \ln \psi(i\eta) = \ln f(i\eta) + H(\eta) \geqslant -G(\|\eta\|) + H(\eta) \geqslant \geqslant \frac{1}{2} H(\eta)$.

Это доказывает справедливость (16). Чтобы получить (17), заметим, что $h''(x)h(x) - (h'(x))^2 \geqslant (h(x))^2$, $x \in \boldsymbol{R}$, поскольку $(h'(x))^2 =$

$$= \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m m \operatorname{sh} x \exp(m \operatorname{ch} x)\right)^2 \leqslant \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m m^2 \operatorname{sh}^2 x \exp(m \operatorname{ch} x)\right) \times$$

$$\times \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m \exp(m \operatorname{ch} x)\right) \leqslant (h''(x) - h(x))\, h(x).$$

Используя (12), (7) и (10), получаем

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 b(\eta)}{\partial\eta_\mu \partial\eta_\nu} \xi_\mu \xi_\nu = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 \ln f(i\eta)}{\partial\eta_\mu \partial\eta_\nu} \xi_\mu \xi_\nu + \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 H(\eta)}{\partial\eta_\mu \partial\eta_\nu} \xi_\mu \xi_\nu \geqslant$$

$$\geqslant -G(\|\eta\|)\langle \xi, \xi\rangle + H(\eta) \sum_{\nu=1}^{n} \frac{h''(\eta_\nu)}{h(\eta_\nu)} \xi_\nu^2 + H(\eta) \sum_{\mu \neq \nu} \frac{h'(\eta_\mu)\, h'(\eta_\nu)}{h(\eta_\mu)\, h(\eta_\nu)} \times$$

$$\times \xi_\mu \xi_\nu = -G(\eta)\langle \xi, \xi\rangle + H(\eta) \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{h''(\eta_\nu)}{h(\eta_\nu)} - \left(\frac{h'(\eta_\nu)}{h(\eta_\nu)}\right)^2\right) \xi_\nu^2 + H(\eta) \times$$

$$\times \left(\sum_{\mu=1}^{n} \frac{h'(\eta_\mu)}{h(\eta_\mu)} \xi_\mu\right)^2 \geqslant -G(\|\eta\|)\langle \xi, \xi\rangle + H(\eta)\langle \xi, \xi\rangle \geqslant \frac{1}{2} H(\eta)\langle \xi, \xi\rangle.$$

Для доказательства (18) применим известную формулу Шварца [2, с. 178] к функции $\ln \varphi(i(\eta + z\xi))$, аналитической по $z$ в круге $\{z : |z| < \rho = \varkappa(\eta)/\|\xi\|\}$,

$$\ln \varphi(i(\eta + z\xi)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |\varphi(i(\eta + \rho e^{i\theta}\xi))| \frac{\rho e^{i\theta} + z}{\rho e^{i\theta} - z} d\theta + c,$$

де $c$ не зависит от $z$. Дифференцируя по $z$ и подставляя затем $z = 0$, получаем

$$(d/dz)^k b(\eta + z\xi)|_{z=0} = (k!\, \rho^{-k}/\pi) \int_0^{2\pi} \ln |\varphi(i(\eta + \rho e^{i\theta}\xi))|\, e^{-ik\theta} d\theta,$$

откуда $|(d/dz)^k b(\eta + z\xi)|_{z=0} \leqslant (k!\, \rho^{-k}/\pi) \int_0^{2\pi} |\ln |\varphi(i(\eta + \rho e^{i\theta}\xi))|| d\theta =$

$$= 2k!\, \rho^{-k} \{(1/\pi) \int_0^{2\pi} \ln^+ |\varphi(i(\eta + \rho e^{i\theta}\xi))| d\theta - \ln \varphi(i\eta)\}.$$

Согласно (16) имеем $\ln\varphi(i\eta)\geqslant 0$, с помощью (12) получаем

$$|(d/dz)^k b(\eta+z\xi)|_{z=0}\leqslant 2k!\rho^{-k}\left\{(1/\pi)\int_0^{2\pi}\ln^+|f(i(\eta+\rho e^{i\theta}\xi))|\,d\theta+\right.$$
$$\left.+(1/\pi)\int_0^{2\pi}\ln^+|\psi(i(\eta+\rho e^{i\theta}\xi))|\,d\theta\right\}.$$

В силу соотношений (7), (10) найдем $\ln^+|f(i(\eta+\rho e^{i\theta}\xi))|\leqslant G\times\times(\|\eta+(\rho\cos\theta)\xi\|)\leqslant H(\eta+(\rho\cos\theta)\xi)$, а на основании (12) и неравенства $|H(z)|\leqslant H(\mathrm{Re}z)$ имеем $\ln^+|\psi(i(\eta+\rho e^{i\theta}\xi))|\leqslant H(-(\eta+\rho e^{i\theta}\xi))\leqslant H(\eta+(\rho\cos\theta)\xi)$. Из (15) следует, что $\|(\rho\cos\theta)\xi\|\leqslant\leqslant\varkappa(\eta)\leqslant H^{-1/8}(\eta)$, поэтому из (11) вытекает, что $H(\eta+(\rho\cos\theta)\xi)\leqslant\leqslant DH(\eta)$. Тем самым справедливость (18) доказана.

4°. Получим оценку снизу для интеграла $I_1$. В полидиске $\{t:\|t-i\eta\|\leqslant\varkappa(\eta)\}$ функция $\varphi$ не обращается в нуль, поэтому при $\|\xi\|\leqslant\varkappa(\eta)$ имеем разложение

$$\ln\{e^{-i\langle k,\xi\rangle}\varphi(\xi+i\eta)/\varphi(i\eta)\}=-i\langle k,\ \xi\rangle+\sum_{|j|=1}^{\infty}\frac{i^{-|j|}\xi^j}{j!}\frac{\partial^{|j|}b(\eta)}{\partial\eta^j},\quad(19)$$

где $j=(j_1,\ldots,j_n)\in Z_+^n$, $|j|=j_1+\cdots+j_n$, $j!=j_1!\cdots j_n!$, $\partial^{|j|}/\partial\eta^j=\partial^{|j|}/(\partial\eta_1^{j_1}\cdots\partial\eta_n^{j_n})$. Воспользуемся следующей теоремой о выпуклых функциях [5, с. 276, теорема 26. 6]. Если $\Phi$ — строго выпуклая функция в $R^n$, надграфик которой не содержит невертикальных полупрямых, то $\operatorname{grad}\Phi$ дает взаимно-однозначное отображение $R^n$ на себя. В силу (16), (17) функция $b$ удовлетворяет условиям этой теоремы, поэтому уравнение $\operatorname{grad}b(\eta)=-k$ **(20)** имеет единственное решение $\eta=\eta(k)$, причем, очевидно, что $\|\eta(k)\|\to\infty$ при $\|k\|\to\infty$. Далее будем считать $\eta$ равным $\eta(k)$, а величину $\|\eta\|$ достаточно большой. Такой выбор $\eta$ позволяет записать равенство (19) в виде

$$\ln\{e^{-i\langle k,\xi\rangle}\varphi(\xi+i\eta)/\varphi(i\eta)\}=-\frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{n}\frac{\partial^2 b(\eta)}{\partial\eta_\mu\partial\eta_\nu}\xi_\mu\xi_\nu+\tau(\xi,\ \eta),$$

где $\tau(\xi,\ \eta)=\sum_{|j|=3}^{\infty}\frac{i^{-|j|}\xi^j}{j!}\frac{\partial^{|j|}b(\eta)}{\partial\eta^j}$.

Очевидно, $\tau(\xi,\ \eta)=\sum_{m=3}^{\infty}\frac{i^{-m}}{m!}\left(\frac{d}{dz}\right)^m b(\eta+z\xi)|_{z=0}$, поэтому, используя оценку (18), получаем $|\tau(\xi,\ \eta)|\leqslant AH(\eta)(\|\xi\|/\varkappa(\eta))^3\{1-(\|\xi\|/\varkappa(\eta))\}^{-1}$, откуда при $\|\xi\|\leqslant\frac{1}{2}\varkappa(\eta)$ следует $|\tau(\xi,\eta)|\leqslant\leqslant 2AH(\eta)(\|\xi\|/\varkappa(\eta))^3$.

Выберем величину $\varepsilon=\varepsilon(\eta)$ следующим образом:
$\varepsilon(\eta)=\frac{1}{2}\varkappa(\eta)(AH(\eta))^{-1/3}$ **(21)**.
Тогда при $\|\xi\|\leqslant\varepsilon(\eta)$ будем иметь $|\tau(\xi,\ \eta)|\leqslant 1/4$, и поэтому $\mathrm{Re}\{\exp\tau(\xi,\ \eta)\}\geqslant L$, где $L>0$ — абсолютная постоянная.
Так как в силу (18)

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n}\frac{\partial^2 b(\eta)}{\partial\eta_\mu\partial\eta_\nu}\xi_\mu\xi_\nu=(d/dz)^2 b(\eta+z\xi)|_{z=0}\leqslant 2AH(\eta)(\|\xi\|/\varkappa(\eta))^2,$$

то при $\|\xi\|<\varepsilon(\eta)$ имеем

$$\mathrm{Re}\{e^{-i\langle k,\xi\rangle}\varphi(\xi+i\eta)/\varphi(i\eta)\}\geqslant L\exp\{-AH(\eta)(\|\xi\|/\varkappa(\eta))^2\}.$$

Следовательно, $I_1\geqslant L\int\limits_{\|\xi\|<\varepsilon}\exp\{-AH(\eta)(\|\xi\|/\varkappa(\eta))^2\}\,d\xi\geqslant L\times$
$\int\limits_{\|\xi\|<\varepsilon}\exp\{-AH(\eta)\langle\xi,\ \xi\rangle(\varkappa(\eta))^{-2}\}d\xi=L\{\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\exp\{-AH(\eta)(x/\varkappa(\eta))^{-2}\}\times$

$$\times\,dx\}^n=L\left(\frac{\varkappa(\eta)}{\sqrt{2AH(\eta)}}\right)^n\left\{\int\limits_{-\varepsilon\sqrt{2AH(\eta)}/\varkappa(\eta)}^{\varepsilon\sqrt{2AH(\eta)}/\varkappa(\eta)}\exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right)du\right\}^n$$

Так как $\varepsilon(\eta)\sqrt{2AH(\eta)}/\varkappa(\eta)=(AH(\eta))^{1/6}/\sqrt{2}\to\infty$ при $\|\eta\|\to\infty$, то при достаточно большом $\|\eta\|$ имеем (учитывая (15) и (10)) $I_1\geqslant L\left(\frac{\varkappa(\eta)}{\sqrt{2AH(\eta)}}\right)^n(\sqrt{\pi})^n\geqslant L_1(H(\eta))^{-9n/14}$ **(22)**, где $L_1$ — положительная постоянная.

5°. Оценим сверху интеграл $I_2$. Нам понадобится неравенство $|H(x+iy)|\leqslant H(x)\exp(-2\pi^{-2}\langle y,\ y\rangle)$, $\|y\|\leqslant\pi$ (23). Для доказательства достаточно заметить, что при $x\in R$, $y\in[-\pi,\ \pi]$ имеем $|h(x+iy)|\leqslant\sum\limits_{m=1}^{\infty}a_m\exp\{m\,\mathrm{ch}\,x\cos y\}=\sum\limits_{m=1}^{\infty}a_m\exp\{m\mathrm{ch}x\}\times$
$\times\exp\{m\,\mathrm{ch}\,x(\cos y-1)\}\leqslant\exp\{\mathrm{ch}\,x(\cos y-1)\}\sum\limits_{m=1}^{\infty}a_m\exp\{m\mathrm{ch}x\}\leqslant$
$\leqslant\exp\{-2y^2/\pi^2\}h(x)$.
Из (12), (23) следует, что при $\varepsilon\leqslant\|\xi\|\leqslant\pi$ выполняется $|\psi(\xi+$ $+i\eta)/\psi(i\eta)|=\exp\{\mathrm{Re}\,H(i\xi-\eta)-H(-\eta)\}\leqslant\exp\{|H(i\xi-\eta)|-$ $-H(-\eta)\}\leqslant\exp\{-H(\eta)(1-\exp(-2\pi^{-2}\langle\xi,\ \xi\rangle))\}\leqslant\exp\{-BH\times$ $\times(\eta)\langle\xi,\ \xi\rangle\}\leqslant\exp\{-BH(\eta)\varepsilon^2\}$, где $B>0$ — абсолютная постоянная. Поэтому $|I_2|\leqslant\int\limits_{\varepsilon<\|\xi\|<\pi}|\varphi(\xi+i\eta)/\varphi(i\eta)|d\xi=\int\limits_{\varepsilon<\|\xi\|<\pi}|f(\xi+$ $+i\eta)/f(i\eta)\|\psi(\xi+i\eta)/\psi(i\eta)|d\xi\leqslant\exp\{-BH(\eta)\varepsilon^2\}\int\limits_{\|\varepsilon\|<\pi}|f(\xi+$ $+i\eta)/f(i\eta)|d\xi$. Согласно (7), (10) имеем $|f(\xi+i\eta)|\leqslant\exp\{G(\|\eta\|)\}\leqslant$ $\leqslant\exp\{(\frac{1}{2}H(\eta))^{1/22}\}$, $|f(i\eta)|\geqslant\exp\{-G(\|\eta\|)\}\geqslant\exp\{-(\frac{1}{2}\times$

$\times H(\eta))^{1/22}\}$, и, следовательно, $|I_2| \leqslant \exp\{-BH(\eta)\varepsilon^2 + 2 \times \times (H(\eta))^{1/22}\}$.

Так как в силу (21), (15) и (10) $\varepsilon \geqslant \frac{1}{2}(H(\eta))^{-1/7}(AH(\eta))^{-1/3} = (A^{-1/3}/2)(H(\eta))^{-10/21}$, то получаем оценку $|I_2| \leqslant \exp\{-C \times \times (H(\eta))^{1/21}\}$ **(24)**, где $C$ — положительная постоянная.

6°. Из оценок (22), (24) и соотношения (14) следует, что коэффициенты $c_k$ в разложении (13) функции $\varphi$ все, за исключением, возможно, конечного числа, положительны. Чтобы завершить доказательство теоремы 1, нужно установить, что существует функция $\vartheta \in B_\pi^+$, не имеющая нулей и такая, что $\varphi\vartheta \in B_\pi^+$. Покажем, что существование функции $\vartheta$ вытекает из теоремы 4.

Пусть $N$ — натуральное число, положим

$$\varphi^{(1)}(t, N) = \sum_{\|k\| < N} c_k e^{i\langle k, t\rangle}, \quad \varphi^{(2)}(t, N) = \sum_{\|k\| \geqslant N} c_k e^{i\langle k, t\rangle}.$$

Выберем $N$ настолько большим, чтобы при $\|k\| > N$ выполнялось $c_k > 0$. Очевидно, найдется $S > 0$ такое, что при $\|\eta\| > S$ будем иметь $\varphi^1(i\eta, N+1) > 0$. При любом $M \geqslant N+1$ будем и подавно иметь $\varphi^{(1)}(i\eta, M) > 0$ при $\|\eta\| > S$. Так как $\varphi(i\eta) > 0$ при всех $\eta \in R^n$, а $\varphi^{(1)}(i\eta, M)$ равномерно на любом компакте в $R^n$ стремится к $\varphi(i\eta)$ при $M \to \infty$, то $M$ можно выбрать настолько большим, что будет $\varphi^{(1)}(i\eta, M) > 0$ при $\|\eta\| \leqslant S$, и, следовательно, $\varphi^{(1)}(i\eta, M) > 0$ при всех $\eta \in R^n$. Фиксируем после этого $M$ и выбираем $Q \in Z_+^n$ таким, чтобы функция $g(z) = z^Q \sum_{\|k\| < M} \times \times c_k z^k$ была полиномом от $z \in C^n$. Из того, что $\varphi^{(1)}(i\eta, M) > 0$, $\eta \in R^n$, следует, что $g(z) > 0$ при $z \in R_+^n$. По теореме 4 существует целая функция $g_1$ с положительными коэффициентами, не имеющая нулей, и такая, что все коэффициенты функции $gg_1$ положительны. Положим $\vartheta(t) = g_1(\exp(it_1), \ldots, \exp(it_n)) \times \times \exp(i\langle Q, t\rangle)$.

Очевидно, $\vartheta \in B_\pi^+$, $\vartheta(t) \neq 0$ и $\varphi(t)\vartheta(t) = \varphi^{(1)}(t, M)\vartheta(t) + \varphi^{(2)} \times \times (t, M)\vartheta(t) = g(\exp(it_1), \ldots, \exp(it_n))\ g_1(\exp(it_1), \ldots, \exp \times \times (it_n)) + \varphi^{(2)}(t, M)\vartheta(t) \in B_\pi^+$, что и требовалось доказать.

7°. Докажем теорему 4. Будем пользоваться следующим результатом работы [1]. Пусть $f$ — целая функция в $C^n$ с нормировкой $f(0) = 1$, удовлетворяющая условиям $\alpha$) $f(i\eta) > 0$, $\eta \in R^n$, $\beta$) $\ln^+\ln^+|f(t)| = o(\|t\|)$, $\|t\| \to \infty$. Тогда существует целая эрмитово-позитивная функция $\varphi$ без нулей такая, что $f\varphi$ является эрмитово-позитивной.

Предположим, что функция $g$ удовлетворяет условиям теоремы 4. Не уменьшая общности, можно считать, что $g(0) = 1$. Тогда функция $f(t) = g(-t_1^2, \ldots, -t_n^2)$ удовлетворяет условиям цитированной теоремы из [1], и поэтому существует целая эрмитово-позитивная функция $\varphi(t) \neq 0$ такая, что функция $f\varphi$ эрмитово-позитивная. Полагая $\varphi_1(t) = \Pi\varphi(\pm t_1, \ldots, \pm t_n)$, где произведение берется по всем $2^n$ наборам знаков, видим, что функции

$\varphi_1$ и $f\varphi_1$ являются эрмитово-позитивными и четными по каждой из переменных $t_1, \ldots, t_n$, причем $\varphi_1(t) \neq 0$. Из представлений

$$\varphi_1(t) = \int\limits_{R^n} e^{i\langle t, x\rangle} P_1(dx) = \sum_{k \in Z_+^n} \frac{(-1)^{|k|} t^{2k}}{(2k)!} \int\limits_{R^n} x^{2k} P_1(dx), \quad f(t)\varphi_1(t) =$$

$$= \int\limits_{R^n} e^{i\langle t, x\rangle} P_2(dx) = \sum_{k \in Z_+^n} \frac{(-1)^{|k|} t^{2k}}{(2k)!} \int\limits_{R^n} x^{2k} P_2(dx),$$

где $P_1$ и $P_2$ — вероятностные меры, следует, что целые функции $\varphi_1(i\sqrt{z_1}, \ldots, i\sqrt{z_n})$ и $f(i\sqrt{z_1}, \ldots, i\sqrt{z_n})\,\varphi_1(i\sqrt{z_1}, \ldots, i\sqrt{z_n}) = g(z)\,\varphi_1(i\sqrt{z_1}, \ldots, i\sqrt{z_n})$ обладают положительными тейлоровскими коэффициентами. Тем самым теорема 4 доказана.

8°. Для доказательства теоремы 2 достаточно, в силу теоремы 1, доказать существование целой функции класса $B_\pi$, для которой множество $A$, удовлетворяющее условиям теоремы, является нулевым. Такую функцию $f$ можно построить так. При отображении $z = \exp(it)$ множество $A$ переходит во множество $z(A) \subset \{0 < |z| < \infty\}$, симметричное относительно действительной оси и не пересекающееся с положительным лучом. Положим $g(z) = g_1(z)\,g_2(1/z)$, где $g_1$ — произведение Вейерштрасса с нулевым множеством $z(A) \cap \{z : |z| \geqslant 1\}$, а $g_2$ — произведение Вейерштрасса с нулевым множеством $\{\zeta : 1/\zeta \in z(A) \cap \{z : |z| < 1\}\}$. Функция $f(t) = g(\exp(it))$ является искомой.

9°. Доказательство теоремы 3 проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 1. Обозначим через $B_{\pi+}$ ($B_{\pi+}^{+}$) подкласс в $B_\pi$ (в $B_\pi^{+}$), состоящий из целых функций вида (1) с $n = 1$ и $c_k = 0$ при $k \leqslant 0$. Нужно доказать, что для любой функции $f \in B_{\pi+}$ найдется функция $f_1 \in B_{\pi+}^{+}$, не имеющая нулей и такая, что $ff_1 \in B_{\pi+}^{+}$.

Лемма 1 сохраняет силу (см. замечание в конце 10°) в случае, когда представление (4) заменено на $h(z) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m \exp(me^z)$ (25). Определим функцию $G(r)$ равенством

$$G(r) = \max_{\xi \in R,\ 0 > \eta > -r} \{\ln^+ |f(\xi + i\eta)| + |\ln f(i\eta)| + 2|(\ln f(i\eta))''| + 1\}$$

и выберем функцию $h$ вида (25) так, чтобы выполнялись условия (8), (9). Вместо (12) положим $\psi(t) = \exp h(it)$; $\varphi(t) = f(t)\,\psi(t)$. Тогда $\psi \in B_{\pi+}^{+}$ и $\varphi \in B_{\pi+}$, $\varphi(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt}$, где коэффициенты $c_k$ действительны. Формула (14) приобретает вид

$$\frac{2\pi c_k}{e^{k\eta}\varphi(i\eta)} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re}\{e^{-ik\xi}\,\varphi(\xi + i\eta)/\varphi(i\eta)\}\,d\xi = \int\limits_{|\xi| < \varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon < |\xi| < \pi} = I_1 + I_2.$$

Легко видеть, что лемма 2 сохранит силу, если в ее формулировке $n=1$, $\eta<0$ и $H(\eta)$ заменим на $h(-\eta)$. Другими словами, справедливы неравенства $b(\eta)\geqslant\frac{1}{2}h(-\eta)$, $b''(\eta)>\frac{1}{2}h(-\eta)$, $\eta<0$; $|b^{(k)}(\eta)|\leqslant Ak!\,(\varkappa(\eta))^{-k}h(-\eta)$, $k=1, 2, \ldots$; $\eta<0$, $\varkappa(\eta)=\min\{\delta(|\eta|),\ h^{-1/8}(-\eta)\}$. **(26)**
Разложение (19) запишем в форме

$$\ln\{e^{-ik\xi}\varphi(\xi+i\eta)/\varphi(i\eta)\}=-ik\xi+\sum_{j=1}^{\infty}(i^{-j}\xi^j/j!)\,b^{(j)}(\eta),\quad |\xi|<\varkappa(\eta).$$

В силу (26) функция $b'(\eta)$ строго монотонна при $\eta<0$, причем $b'(\eta)\to-\infty$ при $\eta\to-\infty$. Поэтому при всех достаточно больших $k>0$ уравнение $b'(\eta)=-k$ имеет единственное решение $\eta=\eta(k)<0$, причем $\eta(k)\to-\infty$ при $k\to+\infty$. Выбираем $\eta=\eta(k)$, считая $k$ достаточно большим, и рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 1, далее проходят без изменений.

10°. Приведем доказательство леммы 1. Будем опираться на следующий результат работы [1].

***Лемма 1'***. *Пусть $q(r)>1$ — непрерывная функция на полуоси $[0, \infty)$. Для любых $\alpha>0$ и $D>1$ существует целая функция $f$ с неотрицательными тейлоровскими коэффициентами такая, что $f(r)\geqslant q(r)$, $r\geqslant0$, $f(r+f^{-\alpha}(r))\leqslant Df(r)$, $r\geqslant r_D>0$* **(27).**

Не уменьшая общности, можно считать, что $q(r)\geqslant\{\mathrm{sh}(r+1)[\exp(\mathrm{ch}(r+1))]\}^{2/\beta}$, $r\geqslant0$ **(28)**. Пусть $f$ — функция, существование которой утверждается в лемме 1', $\alpha=\beta/2$. Положим $h(z)=f(\exp(\mathrm{ch}z))$. Очевидно, неравенство (5) будет иметь место. В силу теоремы о конечных приращениях и неравенств (5), (28) имеем $\exp\{\mathrm{ch}(r+h^{-\beta}(r))\}-\exp\{\mathrm{ch}r\}\leqslant\mathrm{sh}(r+1)[\exp(\mathrm{ch}(r+1))]\times h^{-\beta}(r)\leqslant\mathrm{sh}(r+1)[\exp(\mathrm{ch}(r+1))]\,q^{-\beta/2}(r)\,h^{-\beta/2}\leqslant h^{-\beta/2}(r)$. С помощью (27) получаем, что при достаточно больших $r$ выполняется $h(r+h^{-\beta}(r))=f(\exp\{\mathrm{ch}(r+h^{-\beta}(r))\})\leqslant f(\exp\{\mathrm{ch}r\}+h^{-\beta/2}(r))\leqslant Df(\exp\{\mathrm{ch}r\})=Dh(r)$. Увеличивая, в случае надобности, постоянную $D$, приходим к (6).

*Замечание.* Пусть $f$ — целая функция, существование которой обеспечено леммой 1', $\alpha=\beta/2$, $q(r)\geqslant\{\exp(r+1)(\exp\exp(r+1))\}^{2/\beta}$. Полагая $h(z)=f(\exp\exp z)$, убеждаемся, что лемма 1 сохранит силу при замене в ее формулировке представления (4) на (25).

**Список литературы:** *1. Камынин И. П., Островский И. В.* О нулевых множествах целых эрмитово-положительных функций. — Сиб. мат. журн., 1982, 23, № 3, с. 124—153. *2. Линник Ю, В., Островский И. В.* Разложения случайных величин и векторов. — *М.*: Наука, 1972. — 480 с. *3. Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. т. 2. — *М.*: Наука, 1978. — 432 с. *4. Poincaré H.* Sur les équations algébriques. — Comptes rendus, 1883, 97, p. 1418. *5. Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. — *М.*: Мир, 1973. — 470 с.

***Поступила** в редколлегию 02.07.80.*