УДК 519+517.46

В. Я. ГОЛОДЕЦ, А. И. ДАНИЛЕНКО

ЭРГОДИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП И СВОЙСТВА ИХ СОВМЕСТНЫХ ДЕЙСТВИЙ

Ранее было доказано, что совместный поток двух эргодических сохраняющих меру потоков на пространствах Лебега с конечными мерами имеет чисто точечный спектр. Это утверждение применяется в эргодической теории при вычислении так называемых ассоциированных потоков [1, 2]. Цель настоящей заметки — обобщить его на случай действия произвольной локально-компактной сепарабельной абеле-

вой группы G. Доказательство утверждения в работах [1, 2] использует индивидуальную эргодическую теорему Биркгофа — Хинчина. Ее аналог для произвольной абелевой группы в настоящее время неизвестен. В предлагаемом доказательстве G представляется в виде объединения последовательности специальных подгрупп, для которых такой аналог имеет место.

Всюду в дальнейшем (X, μ), (Y, ν) обозначают пространства Лебега [3], $\mu(X) = \nu(Y) = 1$, G — сепарабельную локально-компактную абелеву группу, $\hat{G}$ — двойственную к ней группу, $\{U_s\}_{s \in G}$ и $\{V_s\}_{s \in G}$ — эргодические действия G несингулярными автоморфизмами на X и Y соответственно, $\{U'_s\}_{s \in G}$ и $\{V'_s\}_{s \in G}$ — непрерывные унитарные представления в $L^2(X, \mu)$ и $L^2(Y, \nu)$ соответственно, порожденные этими действиями.

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}\{U'_s\} = \{t \in \hat{G} : \exists\, a_t \in L^2(X, \mu),\ a_t \neq 0;\\ U'_s a_t = t(s) a_t, \quad \forall\, s \in G\}; \\ \mathrm{Sp}\{V'_s\} = \{t \in \hat{G} : \exists\, b_t \in L^2(Y, \nu),\ b_t \neq 0;\\ V'_s b_t = t(s) b_t, \quad \forall\, s \in G\}. \end{aligned}$$

Говорят, что $\{U_s\}_{s \in G}$ имеет чисто точечный спектр, если U_s сохраняет меру для любого s из G и собственные функции $\{U'_s\}_{s \in G}$ образуют базис в $L^2(X, \mu)$.

Рассмотрим $\{U_s \times V_s\}_{s \in G}$ и $\{U_s \times e\}_{s \in G}$ действия G на $(X \times Y, \mu \times \nu)$, определенные по формулам $U_s \times V_{-s}(x, y) = (U_s x, V_{-s} y)$ и $U_s \times e(x, y) = (U_s x, y)$.

Пусть $\varphi : X \times Y \to Z$ — фактор-отображение в смысле пространств с мерой, определенное измеримым разбиением $X \times Y$, порожденным σ-алгеброй $\{U_s \times V_{-s}\}_{s \in G}$-инвариантных (mod 0) подмножеств. Тогда, так как $\{U_s \times V_{-s}\}_{s \in G}$ коммутирует с $\{U_s \times e)_{s \in G}$, корректно определено $\{(U, V)_s\}_{s \in G}$-действие G на Z по формуле $(U, V)_s \varphi(x, y) = \varphi(U_s x, y)$. $\{(U, V)_s\}_{s \in G}$ называют совместным действием $\{U_s\}_{s \in G}$ и $\{V_s\}_{s \in G}$ [1, 2].

Теорема. $\{(U, V)_s\}_{s \in G}$ *является эргодическим действием с чисто точечным спектром и* $\mathrm{Sp}\{(U, V)_s\} = \mathrm{Sp}\{U_s\} \cap \mathrm{Sp}\{V_s\}$.

Доказательству теоремы предпошлем

Предложение. *Линейная оболочка системы* $\{a_t(x)\, b_t(y)\}_{t \in \mathrm{Sp}\{U_s\} \cap \mathrm{Sp}\{V_s\}}$ *плотна в* $M = \{c \in L^2(X \times Y, \mu \times \nu) : c(U_s x, V_{-s} y) = c(x, y)$ *п. в.* $(x, y) \in X \times Y,\ \forall\, s \in G\}$.

Доказательство. Зафиксируем произвольный $f \in M \cap L^\infty(X \times Y, \mu \times \nu)$. Пусть $\xi \in L^2(X, \mu)$ и ортогонален всем собственным функциям $a_t(x)$ семейства $\{U_s\}_{s \in G}$. Для доказательства предложения достаточно показать, что

$$f_\xi(y) = (f(\cdot, y), \xi(\cdot))_{L^2(X, \mu)} = 0 \tag{1}$$

для почти всех $y \in Y$.

Известно [4], что произвольная локально-компактная абелева группа G топологически изоморфна $\boldsymbol{R}^m \oplus G'$, где G' — некоторая локально-компактная абелева группа, содержащая открытую компактную подгруппу K, а $m \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$. Из сепарабельности G следует, что группа $D = G'/K$ счетна. $D = \{g_n\}_{n=1}^{\infty}$. Рассмотрим ее подгруппы Γ_n, порожденные n первыми элементами $\Gamma_n = \{\lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_n g_n \in D: (\lambda_1, \dots \lambda_n) \in \boldsymbol{Z}_n\}$. Тогда из основной теоремы абелевых групп [4] следует, что Γ_n изоморфны $\boldsymbol{Z}^{p(n)} \oplus L_n$, где $p(n)$ — неотрицательное целое число, а L_n — прямая сумма конечного числа циклических подгрупп конечного порядка. Если обозначить через $G_n = \boldsymbol{R}^m \oplus (\Gamma_n + K)$, то $G_n \subset G_l$ при $n < l$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n = G$. Здесь под $\Gamma_n + K$ подразумевается подгруппа G', содержащая K, такая, что $(\Gamma_n + K)/K = \Gamma_n$.

Обозначим через $H_n(H)$ подпространство $L^2(X, \mu)$, натянутое на собственные функции $\{U'_s\}_{s \in G_n} (\{U'_s\}_{s \in G})$, а через $P_n(P)$ — проектор на него. Легко видеть, что H_n, а значит, и $L^2(X, \mu) \ominus H_n$ инвариантно относительно $\{U'_s\}_{s \in G_n}$. Таким образом, $\{U'_s\}_{s \in G_n}$ — непрерывное унитарное представление G_n в $(I - P_n) L^2(X, \mu)$. Тогда справедлива теорема СНАГ [4]: $U'_s = \int\limits_{\widehat{G}} (t, s)\, dB(t)$, где $dB(t)$ — операторная м ра, а (t, s) — значение характера t в точке $s \in G$.

Представим s и t в виде $s = (s_1, s_2, s_3, s_4) \in (\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{Z}^{p(n)}, L_n, K)$, $t = (t_1, t_2, t_3, t_4) \in (\boldsymbol{R}^m, Tor^{p(n)}, L_n, \widehat{K})$. Тогда

$$U'_s = \int\limits_{\widehat{G}} e^{i(t_1, s_1)} e^{i(t_2, s_2)} (t_3, s_3)(t_4, s_4)\, dB(t). \tag{2}$$

Применяя (2) к (1), получаем

$$f_{(I-P_n)\xi}(V_s y) = \int\limits_{\widehat{G}} e^{i(t_1, s_1)} e^{i(t_2, s_2)} (t_3, s_3)(t_4, s_4)\, dF_y(t), \tag{3}$$

где $dF_y(t) = d(f(., y), B(t)(I - P_n)\xi(.))_{L^2(X,\mu)}$. Рассмотрим в G_n последовательность подмножеств $S_k = I_k \oplus (J_k \oplus L_n + K)$, где $I_k = \{s_1 = (s_{11}, \dots, s_{1m}) \in \boldsymbol{R}^m : |s_{1i}| \leqslant k,\ i = \overline{1, m}\}$, $J_k = \{s_2 = (s_{21}, \dots, s_{2p(n)}) \in \boldsymbol{Z}^{p(n)} : |s_{2j}| \leqslant k,\ j = 1, p(n)\}$. Тогда а) S_k компактны, $S_k \subset S_q$ при $k < q$, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} S_k = G_n$

$$\text{б)}\ \forall g \in G_n \frac{\tau(gS_k \Delta S_k)}{\tau(S_k)} \to 0\ (k \to \infty);$$

$$\text{в)}\ \tau(S_k S_k^{-1}) \leqslant C\tau(S_k),$$

τ означает левоинвариантную меру Хаара на G_n. В качестве C можно выбрать $2^{m+p(n)}$. Другими словами, выполнены все условия индивиду-

альной эргодической теоремы для аменабельных групп [5]. Следовательно, для почти всех $y \in Y$ существует

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{\tau(S_k)} \int_{S_k} |f_{(I-P_n)\xi}(V_s y)|^2 d\tau(s) = M_n(|f_{(I-P_n)\xi}|^2)(y), \tag{4}$$

где M_n — условное математическое ожидание относительно σ-алгебры G_n-инвариантных (mod 0) подмножеств.

С другой стороны, из (3) получаем

$$\frac{1}{\tau(S_k)} \int_{S_k} |f_{(I-P_n)\xi}(V_s y)|^2 d\tau(s) =$$

$$= \int_t \int_{t'} \prod_{j=1}^{m} \frac{\sin\{k(t_{2j} - t'_{2j})\}}{k(t_{2j} - t'_{2j})} \prod_{j=1}^{p(n)} \frac{\sin\{k(t_{2j} - t'_{2j})\}}{k(t_{2j} - t'_{2j})} \times$$

$$\times \delta(t_3, t'_3)\,\delta(t_4, t'_4)\,dF_y(t)\,\overline{dF_y(t')}; \tag{5}$$

$$\delta(t_i, t'_i) = \begin{cases} 1 & : \quad t_i = t'_i\ ; \\ 0 & : \quad t_i \neq t'_i\ . \end{cases}$$

Так как $(I - P_n)\xi$ ортогонален всем собственным функциям $\{U'_s\}_{s \in G_n}$, мера $dF_y(t)$ неатомическая. Следовательно, применяя к (5) теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получаем из (4): $M_n(|f_{(I-P_n)\xi}|^2) = 0$ для почти всех $y \in Y$, а значит, $(f(\cdot, y), (I - P_n) \times \xi(\cdot))_{L^2(X,\mu)} = 0$ для п. в. y. Несложно заметить, что $P_n \to P$ $(n \to \infty)$ или, что то же, $\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n = H$.

Действительно, пусть $d \in \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$, $d \neq 0$. Тогда для

$$\forall k \in N\ \exists \chi_k \in \hat{G}_k : U'_s d = \chi_k(s) d, \ \forall s \in G_k.$$

При $l > k$ $\chi_l | G_k = \chi_k$ и, следовательно, корректно определен $\chi \in \hat{G}$: $\chi | G_k = \chi_k$ для любого k, такой, что $U'_s d = \chi(s) d$, $\forall s \in G$. Таким образом, $\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n \subset H$, обратное включение очевидно. $(f(\cdot, y), \xi(\cdot))_{L^2(X,\mu)} =$

$$= (f(\cdot, y), (I - P)\xi(\cdot))_{L^2(X,\mu)} = \lim_{n \to \infty} (f(\cdot, y), (I - P_n)\xi(\cdot))_{L^2(X,\mu)} = 0$$

и доказательство закончено.

Доказательство теоремы.

Достаточно заметить, что $\varphi(\mu \times \nu)$ — образ $(\mu \times \nu)$ при фактор-отображении φ является $\{(U, V)_s\}_{s \in G}$-инвариантной мерой, и что $L^2(Z, \varphi(\mu \times \nu)) = M$.

Список литературы: 1. *Hamachi T. end all.* Flows, associated with ergodic non singular frans-formation groups / У. Oka, M. Osikawa, T. Hamachi // Publ· RIMS. Kyoto univ.—1975.— **11.**— P. 31—50. 2. *Hamachi T.*, *Osikawa M.* Ergodic groups of aufomorphisms and Krieger's theorems // Seminar on Math. Sci. Keio univ.— 1981.— **3.** — 111 p. 3. *Рохлин В. А.* Основные понятия теории меры//

Мат. сб. — 1949. — **25** (67). — С. 107—150. 4. *Хьюит Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ, I.—М.: Наука, 1975.—654 с. 5. *Браттели У., Робинсон Д.* Операторные алгебры и квантовая статистическая механика.— М.:Мир, 1982. — 511 с. 6. *Emerson F.* The pointwice ergodic theorem for amenable groups // Amer. J. Math.— 1974. —**96**. — P. 472—487.

Поступила в редколлегию 08.10.86