УДК 517.53

В. С. БОЙЧУК

ПРОСТОЕ ПОСТРОЕНИЕ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ С ЗАДАННЫМ ИНДИКАТОРОМ ОТНОСИТЕЛЬНО ЗАДАННОГО ЦЕЛОГО УТОЧНЕННОГО ПОРЯДКА

Задача, сформулированная в названии заметки, впервые решена В. Н. Логвиненко в [1]. Мы приведем более простое решение этой задачи другим, чем использованный в [1], методом, который, возможно, может быть использован для решения иных задач.

Пусть $\rho(r)$ — уточненный порядок,

$$\lim_{r\to\infty}\rho(r)=\rho,\ \rho\in N,$$

и $h(\theta)$ — ρ-тригонометрически выпуклая 2π-периодическая функция. Для построения целой функции с индикатором $h(\theta)$ относительно уточненного порядка $\rho(r)$ достаточно построить ([2], с. 156) не более чем счетное множество комплексных чисел $\{a_n\}$, удовлетворяющее при заданном комплексном числе $a\neq 0$ условиям

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{L(r)}\sum_{|a_n|\leqslant r}a_n^{-\rho}=a, \tag{1}$$

$$n(r)=o(r^{\rho(r)}),\ r\to\infty, \tag{2}$$

где $L(r)=r^{\rho(r)-\rho}$, а $n(r)$ — считающая функция множества $\{a_n\}$.

Пусть $r_n=2^n$, $n=1,\ 2,\ \dots$. В силу известных свойств уточненного порядка:

$$\lim_{r\to\infty}\frac{L(r)}{L(\nu r)}=1 \tag{3}$$

равномерно относительно ν, $0<\alpha\leqslant\nu\leqslant\beta<\infty$, и

$$\frac{r^{\rho(r)}}{t^{\rho(t)}}\leqslant\left(\frac{r}{t}\right)^{\lambda}, \tag{4}$$

где $0<\lambda<\rho$, $t\geqslant r\geqslant r_0(\lambda)$. Положим $L(r_0)=0$ и определим последовательность целых чисел q_n и последовательность неотрицательных чисел $p_n<r_n^{-\rho}$ из условий $L(r_n)-L(r_{n-1})=q_nr_n^{-\rho}+p_n$, $n=1,$ $2,\ \dots$ (5). Для каждого $n\in N$ положим

$$b_{n1}=r_n\exp\left\{\frac{\pi i}{2\rho}(\operatorname{sign}q_n-1)\right\},$$

если $q_n\neq 0$, и

$$b_{n2}=r_n\exp\left\{\frac{i}{\rho}\arccos\frac{1}{2}p_nr_n^{\rho}\right\},\ b_{n3}=\bar{b}_{n2},$$

если $p_n\neq 0$. Припишем каждой точке b_{n1} соответствующую кратность $|q_n|$. Тогда, складывая равенства (5) по n, $1\leqslant n\leqslant k$, и учитывая выбор точек b_{nm}, получим

$$\sum_{|b_{nm}|<r_k}b_{nm}^{-\rho}=L(r_k),\ k=1,\ 2,\ \dots. \tag{6}$$

Занумеровав точки b_{nm} (с учетом их кратности) в порядке неубывания их модулей, получим не более чем счетное множество $\{b_n\}$. Из (3) и (6) видно, что множество $\{b_n\}$ удовлетворяет условию (1) при $a=1$.

Пусть $n_1(r)$ — считающая функция этого множества. Используя (3) — (5) и учитывая монотонность $r^{\rho(r)}$, получим

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n_1(r)}{r^{\rho(r)}}=\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{n_1(r_k)}{r_k^{\rho(r_k)}}\leqslant\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\sum\limits_{n=1}^{k}(|q_n|+2)}{r_k^{\rho(r_k)}}\leqslant$$

$$\leqslant\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\sum\limits_{n=1}^{k}(r_n^{\rho}|L(r_n)-L(r_{n-1})|+3}{r_k^{\rho(r_k)}}\leqslant$$

$$\leqslant\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\sum\limits_{n=1}^{k}r_n^{\rho(r_n)}\left|1-\frac{L(r_{n-1})}{L(r_n)}\right|}{r_k^{\rho(r_k)}}+3\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{k}{r_k^{\rho(r_k)}}=$$

$$=\overline{\lim_{k\to\infty}}\sum_{n=1}^{k}\frac{r_n^{\rho(r_n)}}{r_k^{\rho(r_k)}}\left|1-\frac{L(r_{n-1})}{L(r_n)}\right|+3\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\log_2 r_k}{r_k^{\rho(r_k)}}\leqslant$$

$$\leqslant\overline{\lim_{k\to\infty}}\sum_{n=1}^{k}2^{-\lambda(k-n)}\left|1-\frac{L(r_{n-1})}{L(r_n)}\right|=0.$$

Таким образом, множество $\{b_n\}$ также удовле воряет условию (2). Наконец, учитывая (3) и (4), легко видеть, что множество $\{a^{-1/\rho}b_n\}$ — искомое.

Список литературы: 1. *Логвиненко В. Н.* Построение целой функции с заданным индикатором при заданном целом уточненном порядке//Функцион. анализ и его прил.—1972.—**6**, вып. 4.—С. 87—88. 2. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.—М.: ГИТТЛ, 1956.—632 с.

Поступила в редколлегию 06.04.86