

ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ, СВЯЗАННЫЕ С НЕРАСТЯГИВАЮЩИМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ

Пусть X — выпуклый компакт в банаховом пространстве, $V: X \rightarrow X$ — нестягивающее отображение, т. е. $\|Vx - Vy\| \leq \|x - y\|$ ($x, y \in X$). Рассмотрим семейство разностных уравнений $x_{n+1} = \alpha x_n + (1 - \alpha)Vx_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$; $0 \leq \alpha < 1$) (1), являющихся приближениями для дифференциального уравнения: $\dot{x} = Vx - x$ (2). При $\alpha = 0$ система (1) задает последовательность итераций отображения V . Эти итерации могут расходиться. Примером служит поворот V_θ двумерного диска на угол θ ($0 < \theta < 2\pi$).

В настоящей работе рассматривается итерационный процесс (1) при фиксированном α ($0 < \alpha < 1$). Устанавливается, что при любой начальной точке x_0 процесс (1) сходится к некоторой неподвижной точке отображения V . Таким образом, итерации (1) при $0 < \alpha < 1$ можно рассматривать как вычислительный метод нахождения неподвижной точки любого нестягивающего отображения в выпуклом компакте. Впрочем, сходимость этого процесса, по-видимому, может быть весьма медленной (см. ниже оценку (3)).

Заметим прежде всего, что если $\{x_n^{(1)}\}$, $\{x_n^{(2)}\}$ — любые две итерационные последовательности вида (1), то $\|x_n^{(1)} - x_n^{(2)}\|$ не возрастает. Действительно, $\|x_{n+1}^{(1)} - x_{n+1}^{(2)}\| \leq \alpha \|x_n^{(1)} - x_n^{(2)}\| + (1 - \alpha) \|Vx_n^{(1)} - Vx_n^{(2)}\| \leq \|x_n^{(1)} - x_n^{(2)}\|$. Поэтому существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n^{(1)} - x_n^{(2)}\|$. В частности, если $\{x_n\}$ — траектория, а \bar{x} — неподвижная точка отображения V , то существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \bar{x}\|$.

Теорема. Если V — нестягивающее отображение, то каждая итерационная последовательность $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ вида (1) сходится, причем имеет место оценка $\|x_{n+1} - x_n\| = O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$ (3).

Доказательство. Покажем вначале, что из оценки (3) следует сходимость. Пусть \bar{x} — предельная точка последовательности, $\bar{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$ ($n_k \nearrow \infty$). Тогда $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k+1} = \alpha \bar{x} + (1 - \alpha)V\bar{x}$. Из (3) следует, что $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$, т. е. \bar{x} — неподвижная точка системы (1). Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \bar{x}\| = 0$.

Положим $x_{n+1} - x_n = z_n$. Выше было показано, что $\|z_n\|$ не возрастает. Если $z_n = 0$ при некотором n , то итерационная последовательность сходится к неподвижной точке за n шагов. Пусть $z_n \neq 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Требуется доказать, что

$$\|z_n\| \leq \frac{Q}{\ln n} \quad (Q = \text{const}), \quad (4)$$

начиная с некоторого n .

Для любых $m \geq 0, n > 0$

$$\frac{z_{m+n}}{\alpha^{m+n}} - \frac{z_m}{\alpha^m} = \sum_{k=m}^{m+n-1} \frac{z_{k+1} - \alpha z_k}{\alpha^{k+1}}$$

Оценим z_{m+n} с помощью соотношения

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\alpha^n} - 1\right) z_{m+n} &= z_m - z_{m+n} + \sum_{k=m}^{m+n-1} (z_{k+1} - \alpha z_k) + \\ &+ \sum_{k=m}^{m+n-1} \left(\frac{1}{\alpha^{k-m+1}} - 1\right) (z_{k+1} - \alpha z_k). \end{aligned} \quad (5)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \left\| z_m - z_{m+n} + \sum_{k=m}^{m+n-1} (z_{k+1} - \alpha z_k) \right\| &= \left\| (1 - \alpha) \sum_{k=m}^{m+n-1} z_k \right\| = \\ &= \|(1 - \alpha)(x_{m+n} - x_m)\| \leq (1 - \alpha)c, \end{aligned} \quad (6)$$

где $c = \text{const}$ не зависит от m и n . Далее $\|z_{k+1} - \alpha z_k\| = \|(1 - \alpha) \times \times (Vx_{k+1} - Vx_k)\| \leq (1 - \alpha) \|z_k\|$ (7). Из (5)–(7) следует, что

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\alpha^n} - 1\right) \|z_{m+n}\| &\leq (1 - \alpha)c + (1 - \alpha) \|z_m\| \sum_{k=m}^{m+n-1} \left(\frac{1}{\alpha^{k-m+1}} - 1\right) = \\ &= \left(\frac{1}{\alpha^n} - 1\right) \|z_m\| - (1 - \alpha)(n \|z_m\| - c). \end{aligned}$$

Отсюда $\|z_{m+n}\| < \|z_m\| - \alpha^n(1 - \alpha)(n \|z_m\| - c)$ (8). Определим последовательность $\{N_i\}_{i=0}^{\infty}$ рекуррентно: $N_0 = 0$; $N_{i+1} = N_i + n_i$, где $n_i = [b_i]$, $b_i = \frac{c}{a_i} + \frac{1}{1 - \alpha} + 1$, $a_i = \|z_{N_i}\|$. Поскольку последовательность $\{a_i\}$ монотонно убывает, то последовательность $\{b_i\}$ монотонно возрастает. В силу (8) $a_{i+1} < a_i - \alpha^{n_i}(1 - \alpha)(n_i a_i - c)$. Поскольку $n_i > \frac{c}{a_i} + \frac{1}{1 - \alpha}$, то $a_{i+1} < a_i(1 - \alpha^{n_i})$. Отсюда

$$\begin{aligned} n_i < n_i \frac{a_i - a_{i+1}}{a_i \alpha^{n_i}} < b_i \frac{b_{i+1} - b_i}{b_{i+1} - \frac{1}{1 - \alpha} - 1} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{b_i} < A \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{b_i} (b_{i+1} - b_i) \\ (A = \text{const}). \end{aligned}$$

Суммируя эти оценки, получаем для любого натурального k

$$\begin{aligned} N_k &= \sum_{i=0}^{k-1} n_i < A \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{b_i} (b_{i+1} - b_i) < A \int_{b_0}^{b_k} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^x dx = \\ &= \frac{A}{\ln \alpha^{-1}} \left[\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{b_k} - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{b_0} \right] = B \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{c}{a_k}} + C \quad (B, C = \text{const}). \end{aligned}$$

Следовательно, последовательность $\{a_k \ln N_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена сверху некоторой константой Q_1 .

Возьмем произвольное $Q > Q_1$ и покажем, что оценка (4) выполняется при всех достаточно больших n . Имеем

$$\|z_n\| \leq \frac{Q_1}{\ln N_k} (n \geq N_k).$$

Далее $\frac{Q_1}{\ln N_k} \leq \frac{Q}{\ln n}$ при $n \leq N_k^{\frac{Q}{Q_1}}$. Таким образом, при $N_k \leq n \leq N_k^{\frac{Q}{Q_1}}$ выполняется (4). Поэтому, если $N_{k+1} \leq N_k^{\frac{Q}{Q_1}}$, то для всех натуральных n из промежутка $[N_k, N_{k+1}]$ выполняется (4).

Пусть $N_{k+1} > N_k^{\frac{Q}{Q_1}}$, т. е. $n_k > N_k^{\frac{Q}{Q_1}} - N_k$, тогда

$$\frac{c}{a_k} > N_k^{\frac{Q}{Q_1}} - N_k - \frac{1}{1-\alpha} - 1.$$

Для любой постоянной $c_1 > c$ найдется $M > 0$ такое, что при $N > M$ выполняется неравенство

$$N_k^{\frac{Q}{Q_1}} - N - \frac{1}{1-\alpha} - 1 > \frac{c}{c_1} N_k^{\frac{Q}{Q_1}}. \quad (9)$$

Таким образом,

$$a_k < c_1 N_k^{\frac{-Q}{Q_1}} = (N_k > M).$$

Зафиксируем k такое, что $N_k > M$ и положим $\lambda = \frac{Q}{c_1}$, $f(\xi) = e^{\lambda \xi}$. Можно считать $\lambda > 1$ ввиду произвола в выборе Q .

Неравенство

$$c_1 N_k^{\frac{-Q}{Q_1}} \leq \frac{Q}{\ln n}$$

выполняется при $n \leq f(N_k^{\frac{Q}{Q_1}})$, следовательно, при $N_k \leq n \leq f(N_k^{\frac{Q}{Q_1}})$ выполняется (4). Покажем, что (4) выполняется для всех натуральных n из промежутка $[N_k, N_{k+1}]$. В случае, когда $N_{k+1} \leq f(N_k^{\frac{Q}{Q_1}})$ требуемое утверждение доказано.

Пусть $N_{k+1} > f(N_k^{\frac{Q}{Q_1}})$. Рассмотрим итерации $f^{p+1}(\xi) = f(f^p(\xi))$ ($p = 1, 2, \dots$). Очевидно, что $f^p(\xi) \nearrow \infty$ при $p \rightarrow \infty$ равномерно по $\xi \in [0, \infty)$. Поэтому существует такое p , что

$$f^p(N_k^{\frac{Q}{Q_1}}) < N_{k+1} \leq f^{p+1}(N_k^{\frac{Q}{Q_1}}).$$

