

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИОНАЛЬ- НЫЙ АНАЛИЗ

50 |



МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

ХАРЬКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО
КРАСНОГО ЗНАМЕНИ И ОРДЕНА ДРУЖБЫ НАРОДОВ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. А. М. ГОРЬКОГО

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Республиканский
межведомственный
научный
сборник

Основан в 1965 г.

В Ы П У С К 50

ХАРЬКОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ
«ВИЩА ШКОЛА»
1988

Сборник содержит статьи по теории целых функций, теории операторов в гильбертовых и банаховых пространствах, геометрии банаховых пространств, теории динамических систем, аналитическим вопросам теории вероятностей.

Для научных работников и специалистов.

Редакционная коллегия: В. А. Марченко (отв. ред.), В. К. Дзядык (зам. отв. ред.), И. В. Островский (отв. секр.), Ю. М. Березанский, М. С. Бродский, Н. А. Давыдов, Л. Е. Дундученко, М. Г. Крейн, А. В. Кушель, Б. Я. Левин, Н. И. Симонов, И. Г. Соколов

Адрес редакционной коллегии: 310077 Харьков, пл. Дзержинского, 4, университет, механико-математический факультет, тел. 45-73-27

Редакция литературы по естественным наукам и филологии
Зав. редакцией *Е. П. Иващенко*

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Выпуск 50

Редактор *Н. С. Калинина*
Художественный редактор *Т. П. Короленко*
Технический редактор *Л. Т. Ена*
Корректор *Е. В. Сергина*

ИБ № 12211

Сдано в набор 24.09.87. Подп. в печать 12.04.88. БЦ 16310. Формат 60×90/16. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Печ. л. 9. Кр.-отт. 9,25. Уч.-изд. л. 10. Тираж 800 экз. Изд. № 1650. Зак. 7-414. Цена 1 р. 40 к.

Издательство при Харьковском государственном университете издательского объединения «Вища школа». 310003 Харьков, ул. Университетская, 16.

Отпечатано с матриц Харьковской книжной фабрики им. М. В. Фрунзе. 3100057 Харьков, Донец-Захаржевского, 6/8 в Харьковской городской типографии № 16, г. Харьков-3, ул. Университетская, 16. Зак. 1028.

Т 1702050000—035
М226(04)—88 КУ—2—38—88

© Издательское объединение
«Вища школа», 1988

О. А. АНОЩЕНКО

**О РАЗЛОЖЕНИИ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ
УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ПОТЕНЦИАЛОМ,
ИМЕЮЩИМ ПЕРИОДИЧЕСКУЮ АСИМПТОТИКУ**

Ранее в [1] была доказана теорема разложения по собственным функциям оператора $H = -\frac{d^2}{dx^2} + q_0(x)$ с вещественным потенциалом $q_0(x)$, таким, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) |q_0(x) - p(x)| dx < \infty, \quad p(x+1) = p(x), \\ p(x) \in L^2(0, 1).$$

Рассмотрим обобщение этой теоремы для оператора $L = -d^2/dx^2 + q(x)$, где $q(x)$ — вещественная функция, удовлетворяющая условиям

$$\int_0^{\pm\infty} (1 + |x|^2) |q(x) - q_{\pm}(x)| dx < \infty. \quad (1)$$

Здесь $q_{\pm}(x)$ — вещественные потенциалы для уравнений Хилла

$$-y'' + q_{\pm}(x)y = \lambda y, \quad -\infty < x < \infty, \\ q_{\pm}(x + a_{\pm}) = q_{\pm}(x), \quad a_{\pm} > 0. \quad (2)$$

Эта теорема используется при решении обратной задачи рассеяния для соответствующего уравнения Шредингера:

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad -\infty < x < \infty. \quad (3)$$

Пусть $\theta_{\pm}(x, \lambda)$, $\varphi_{\pm}(x, \lambda)$ — фундаментальные системы решений уравнений (2), определенные начальными условиями:

$$\theta_{\pm}(0, \lambda) = \varphi'_{\pm}(0, \lambda) = 1, \quad \theta'_{\pm}(0, \lambda) = \varphi_{\pm}(0, \lambda) = 0.$$

Обозначим $\varphi_{\pm}(\lambda) = \varphi_{\pm}(a_{\pm}, \lambda)$, $\varphi'_{\pm}(\lambda) = \varphi'_{\pm}(a_{\pm}, \lambda)$, $\theta_{\pm}(\lambda) = \theta_{\pm}(a_{\pm}, \lambda)$; $F_{\pm}(\lambda)$ — дискриминант Хилла:

$$F_{\pm}(\lambda) = (\varphi'_{\pm}(\lambda) + \theta_{\pm}(\lambda))/2;$$

$\tilde{\Psi}_{1,2}(x, y)$ — функции Флоке для уравнения (2) с потенциалом $q_{-}(x)$:

$$\tilde{\Psi}_{1,2}(x, \lambda) = \theta_{-}(x, \lambda) + m_{1,2}^{-}(\lambda) \varphi_{-}(x, \lambda), \quad (4)$$

$$m_{1,2}^{-}(\lambda) = (\varphi'_{-}(\lambda) - \theta_{-}(\lambda))/2\varphi_{-}(\lambda) \pm \sqrt{F_{-}^2(\lambda) - 1}/\varphi_{-}(\lambda);$$

$\tilde{\Phi}_{1,2}(x, \lambda)$ — функции Флоке для уравнения (2) с потенциалом $q_{+}(x)$:

$$\tilde{\Phi}_{1,2}(x, \lambda) = \theta_{+}(x, \lambda) + m_{1,2}^{+}(\lambda) \varphi_{+}(x, \lambda), \quad (5)$$

$m_{1,2}^+(\lambda) = (\varphi_+(\lambda) - \theta_+(\lambda))/2\varphi_+(\lambda) \pm \sqrt{F_+^2(\lambda) - 1}/\varphi_+(\lambda)$ (верхний знак в формулах (4), (5) соответствует индексу 1, нижний — индексу 2). Известно [2], что спектр $\sigma^\pm = \sigma^\pm(q_\pm)$ оператора

$$L_\pm = -\frac{d^2}{dx^2} + q_\pm(x) \quad \sigma^\pm = \{\lambda : \operatorname{Im} \lambda = 0, |F_\pm(\lambda)| \leq 1\}$$

есть объединение отрезков (зон) $S_n^\pm = [S_{n1}^\pm, S_{n2}^\pm]$, $n = 0, 1, \dots$. Интервалы $\Delta_0^\pm = (-\infty, S_{01}^\pm)$, $\Delta_1^\pm = (S_{(n-1)2}^\pm, S_{n1}^\pm)$, $n = 1, 2, \dots$, разделяющие зоны, называются лакунами. Будем называть зоны (лакуны) спектров σ^+ и σ^- положительными и отрицательными зонами (лакунами) соответственно. Обозначим Δ_k^\pm , $k = 1, 2, \dots$ (Δ_k^\mp , $k = 1, 2, \dots$) интервалы, которые получаются в результате пересечения положительных (отрицательных) лакун с отрицательными (положительными) зонами; $\Delta^\pm = \bigcup_{n=0}^\infty \Delta_n^\pm$.

Ветвь радикала в формулах (4), (5) выбрана из условия $\sqrt{F_\pm^2(\lambda) - 1} > 0$ при $\lambda \in \Delta_0^\pm$.

При $\lambda \in \operatorname{Int} \sigma^-$ фундаментальную систему решений уравнения (3) образуют функции [3]:

$$\Psi_{1,2}(x, \lambda) = \tilde{\Psi}_{1,2}(x, \lambda) + \int_{-\infty}^x K^-(x, y) \tilde{\Psi}_{1,2}(y, \lambda) dy, \quad (6)$$

а при $\lambda \in \operatorname{Int} \sigma^+$ уравнение (3) имеет линейно независимые решения, представимые в виде

$$\varphi_{1,2}(x, \lambda) = \tilde{\varphi}_{1,2}(x, \lambda) + \int_x^\infty K^+(x, y) \tilde{\varphi}_{1,2}(y, \lambda) dy. \quad (7)$$

Из представлений (6), (7) следует, что функция $\Psi_1(x, \lambda)$ допускает аналитическое продолжение в комплексную λ плоскость с разрезами по спектру σ^- , а функция $\varphi_2(x, \lambda)$ — в комплексную плоскость λ с разрезами по спектру σ^+ . При $\lambda \in \sigma^-$ $\tilde{\Psi}_1(x, \lambda) \in L^2(-\infty, 0)$, а при $\lambda \in \sigma^+$ $\tilde{\varphi}_2(x, \lambda) \in L^2(0, +\infty)$ (см. [2]), поэтому теми же свойствами обладают и функции $\Psi_1(x, \lambda)$, $\varphi_2(x, \lambda)$.

Так как функции $\varphi_{1,2}$, $\Psi_{1,2}$ образуют фундаментальные системы решений уравнения (3), то они связаны равенствами

$$\Psi_1(x, \lambda) = c_{12}(\lambda) \varphi_1(x, \lambda) + c_{11}(\lambda) \varphi_2(x, \lambda), \quad \lambda \in \operatorname{Int} \sigma^+; \quad (8)$$

$$\varphi_2(x, \lambda) = c_{22}(\lambda) \Psi_1(x, \lambda) + c_{21}(\lambda) \Psi_2(x, \lambda), \quad \lambda \in \operatorname{Int} \sigma^-. \quad (9)$$

Таблица коэффициентов $C = \|c_{ij}(\lambda)\|_{i,j=1,2}$ называется матрицей перехода уравнения (3).

Используя равенства (8), (9), выразим коэффициенты через вронскианы:

$$\begin{aligned} c_{11}(\lambda) &= \frac{W\{\Psi_1, \Phi_1\}}{W\{\Phi_2, \Phi_1\}} = \frac{\Psi_1'(x, \lambda) \Phi_1(x, \lambda) - \Psi_1(x, \lambda) \Phi_1'(x, \lambda)}{m_2^+(\lambda) - m_1^+(\lambda)}; \\ c_{12}(\lambda) &= \frac{W\{\Phi_2, \Psi_1\}}{m_2^+(\lambda) - m_1^+(\lambda)}, \quad \lambda \in \text{Int } \sigma^+; \\ c_{21}(\lambda) &= \frac{W\{\Phi_2, \Psi_1\}}{m_2^-(\lambda) - m_1^-(\lambda)}; \\ c_{22}(\lambda) &= \frac{W\{\Psi_2, \Phi_2\}}{m_2^-(\lambda) - m_1^-(\lambda)}, \quad \lambda \in \text{Int } \sigma^-. \end{aligned} \quad (10)$$

Заметим, что из формул (4), (5) следует при $\lambda \in \text{Int } \sigma^\pm$

$$M^\pm(\lambda^b) = \overline{M^\pm(\lambda^a)} = -M^\pm(\lambda^a), \quad (11)$$

где $M^\pm(\lambda) = m_2^\pm(\lambda) - m_1^\pm(\lambda)$, а из представлений (6), (7) устанавливаем, что

$$\Phi_2(x, \lambda^b) = \overline{\Phi_1(x, \lambda^b)} = \overline{\Phi_2(x, \lambda^a)}, \quad \lambda \in \text{Int } \sigma^+, \quad (12)$$

$$\Psi_1(x, \lambda^b) = \overline{\Psi_2(x, \lambda^b)} = \overline{\Psi_1(x, \lambda^a)}, \quad \lambda \in \text{Int } \sigma^-. \quad (13)$$

Здесь и далее λ^b и λ^a — точки верхнего и нижнего берегов разрезов соответственно.

Из формул (6) — (13) непосредственной проверкой устанавливаются следующие свойства элементов $c_{ij}(\lambda)$ матрицы C :

1. При $\lambda \in \text{Int } \sigma^+ \cap \text{Int } \sigma^-$

$$c_{21}(\lambda) = c_{12}(\lambda) \frac{M^+(\lambda)}{M^-(\lambda)},$$

$$c_{11}(\lambda) = -\overline{c_{22}(\lambda)} \frac{M^-(\lambda)}{M^+(\lambda)},$$

$$|c_{12}(\lambda)|^2 - |c_{11}(\lambda)|^2 = \frac{M^-(\lambda)}{M^+(\lambda)},$$

$$|c_{21}(\lambda)|^2 - |c_{22}(\lambda)|^2 = \frac{M^-(\lambda)}{M^+(\lambda)};$$

$$c_{12}(\lambda) = \overline{c_{11}(\lambda)} \quad \text{при } \lambda \in \text{Int } \sigma^+ \cap \Delta^-,$$

$$c_{21}(\lambda) = \overline{c_{22}(\lambda)} \quad \text{при } \lambda \in \text{Int } \sigma^- \cap \Delta^+.$$

2. Функции $c_{12}(\lambda)$ и $c_{21}(\lambda)$ являются предельными значениями функций мероморфных в комплексной плоскости λ с разрезами по спектрам σ^+ и σ^- , причем $c_{12}(\lambda^b) = \overline{c_{12}(\lambda^a)}$, $c_{11}(\lambda^b) = \overline{c_{11}(\lambda^a)}$ при $\lambda \in \text{Int } \sigma^+$; $c_{21}(\lambda^b) = \overline{c_{21}(\lambda^a)}$ при $\lambda \in \text{Int } \sigma^-$.

3. Функции $\frac{\varphi_2(x, \lambda)}{c_{21}(\lambda)}$ и $\frac{\Psi_1(x, \lambda)}{c_{12}(\lambda)}$ (x фиксировано) ограничены на σ^- и $(\sigma^+ \cap \Delta^-) \cup \{S_{nj}^+\}_{n=0, j=1,2}$ соответственно.

4. Оператор L имеет собственные значения λ_n ($n = 1, 2, \dots$), лежащие в пересечении лакун спектров σ^+ и σ^- .

Как известно [4], ядро $R_\lambda(x, y)$ интегрального оператора резольвенты, соответствующего оператору L , имеет вид

$$R_\lambda(x, y) = \begin{cases} \frac{\varphi_2(x, \lambda) \Psi_1(y, \lambda)}{W\{\varphi_2, \Psi_1\}}, & y \leq x; \\ \frac{\Psi_1(x, \lambda) \varphi_2(y, \lambda)}{W\{\varphi_2, \Psi_1\}}, & y > x, \end{cases} \quad (14)$$

где с учетом (10) $W\{\varphi_2, \Psi_1\} = c_{12}(\lambda) M^+(\lambda) = c_{21}(\lambda) M^-(\lambda)$. Найдем ядро спектрального проектора оператора L , сосчитав скачок ядра резольвенты $R_\lambda(x, y)$ через разрез по зоне непрерывного спектра. При этом будем пользоваться формулами (8), (9), (11) -- (13) и свойствами 1, 2 матрицы перехода.

Пусть для определенности $y \leq x$, тогда при $\lambda \in \text{Int } \sigma^- \cap \text{Int } \sigma^+$

$$\begin{aligned} R_{\lambda^b}(x, y) - R_{\lambda^n}(x, y) &= \frac{\varphi_2(x, \lambda^b) \Psi_1(y, \lambda^b)}{c_{12}(\lambda^b) M^+(\lambda^b)} - \\ &- \frac{\varphi_2(x, \lambda^n) \Psi_1(y, \lambda^n)}{c_{12}(\lambda^n) M^+(\lambda^n)} = \frac{|c_{12}(\lambda)|^{-2}}{M^+(\lambda^b)} \times [\varphi_2(x, \lambda^b) \times \\ &\times (|c_{12}(\lambda)|^2 \varphi_1(y, \lambda^b) + c_{12}(\lambda^n) c_{11}(\lambda^b) \varphi_2(y, \lambda^b)) + \\ &+ \Psi_1(y, \lambda^n) (c_{12}(\lambda^b) c_{22}(\lambda^n) \Psi_1(x, \lambda^n) + \\ &+ c_{12}(\lambda^b) c_{21}(\lambda^n) \Psi_2(x, \lambda^n))] = \frac{|c_{12}(\lambda)|^{-2}}{M^+(\lambda^b)} \times \\ &\times \left[\frac{\varphi_2(x, \lambda^b) \varphi_2(y, \lambda^b) M^-(\lambda^b)}{M^+(\lambda^b)} + \varphi_2(x, \lambda^b) \times \right. \\ &\times (|c_{11}(\lambda)|^2 \varphi_1(y, \lambda^b) + c_{12}(\lambda^n) c_{11}(\lambda^b) \varphi_2(y, \lambda^b)) + \\ &+ \frac{\Psi_1(y, \lambda^b) \Psi_1(x, \lambda^b) |c_{21}(\lambda)|^2 M^-(\lambda^b)}{M^+(\lambda^b)} + \\ &+ c_{12}(\lambda^b) c_{22}(\lambda^n) \Psi_1(y, \lambda^n) \Psi_1(x, \lambda^n)] = \\ &= \frac{\varphi_2(x, \lambda^b) \varphi_2(y, \lambda^b)}{|c_{21}(\lambda)|^2 M^-(\lambda^b)} + \frac{|c_{12}(\lambda)|^{-2}}{M^+(\lambda^b)} \times \\ &\times [c_{11}(\lambda^b) \varphi_2(x, \lambda^b) \Psi_1(y, \lambda^n) + \Psi_1(x, \lambda^b) \times \\ &\times \frac{\Psi_1(y, \lambda^b) - c_{11}(\lambda^b) c_{22}(\lambda^b) \Psi_1(x, \lambda^b) \Psi_1(y, \lambda^b)}{M^+(\lambda^b)} + \\ &+ c_{12}(\lambda^b) c_{22}(\lambda^n) \Psi_1(y, \lambda^n) \Psi_1(x, \lambda^n)]. \end{aligned} \quad (15)$$

Последнее равенство мы получили, используя соотношения

$$|c_{21}(\lambda)|^2 \frac{M^-(\lambda^b)}{M^+(\lambda^b)} = 1 - c_{11}(\lambda^b) c_{22}(\lambda^b),$$

которое является следствием свойства 1 матрицы G .

Так как $c_{12}(\lambda^b) c_{22}(\lambda^h) = -c_{11}(\lambda^b) c_{21}(\lambda^b)$, а значит,

$$c_{11}(\lambda^b) c_{22}(\lambda^b) \psi_1(x, \lambda^b) - c_{12}(\lambda^b) c_{22}(\lambda^h) \times \\ \times \Psi_1(x, \lambda^h) = c_{11}(\lambda^b) \varphi_2(x, \lambda^b),$$

то сумма последних двух слагаемых в (15) равна

$$- \frac{\Psi_1(y, \lambda^h)}{|c_{12}(\lambda)|^2} c_{11}(\lambda^b) \varphi_2(x, \lambda^b)$$

и поэтому

$$R_{\lambda^b}(x, y) - R_{\lambda^h}(x, y) = \frac{\Psi_1(x, \lambda^b) \overline{\Psi_1(y, \lambda^b)}}{|c_{12}(\lambda)|^2 M^+(\lambda^b)} + \\ + \frac{\varphi_2(x, \lambda^b) \overline{\varphi_2(y, \lambda^h)}}{|c_{21}(\lambda)|^2 M^-(\lambda^b)}$$

при $\lambda \in \text{Int } \sigma^- \cap \text{Int } \sigma^+$.

Если $\lambda \in \text{Int } \sigma^+ \cap \Delta^-$, то

(16)

$$R_{\lambda^b}(x, y) - R_{\lambda^h}(x, y) = \frac{\Psi_1(x, \lambda^b)}{M^+(\lambda^b)} \times \\ \times \left[\frac{\varphi_2(y, \lambda^b)}{c_{12}(\lambda^b)} + \frac{\varphi_2(y, \lambda^h)}{c_{12}(\lambda^h)} \right] = \frac{\Psi_1(x, \lambda^b) c_{12}(\lambda^h) \varphi_1(y, \lambda^b)}{M^+(\lambda^b) |c_{12}(\lambda)|^2} + \\ + \frac{\Psi_1(x, \lambda^b) c_{11}(\lambda^h) \varphi_2(y, \lambda^h)}{M^+(\lambda^b) |c_{12}(\lambda)|^2} = \frac{\Psi_1(x, \lambda^b) \Psi_1(y, \lambda^h)}{|c_{12}(\lambda)|^2 M^+(\lambda^b)} = \\ = \frac{\Psi_1(x, \lambda) \Psi_1(y, \lambda)}{|c_{12}(\lambda)|^2 M^+(\lambda^b)}.$$

(17)

Аналогично при $\lambda \in \text{Int } \sigma^- \cap \Delta^+$ получаем

$$R_{\lambda^b}(x, y) - R_{\lambda^h}(x, y) = \frac{\varphi_2(x, \lambda) \varphi_2(y, \lambda)}{|c_{21}(\lambda)|^2 M^-(\lambda^b)}.$$

(18)

Непрерывный спектр оператора L состоит из объединения спектров σ^+ и σ^- . В силу спектральной теоремы оператор

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^+ + \sum_{k=0}^{\infty} P_k^-,$$

где P_n^\pm ($n = 0, 1, \dots$) — спектральные проекторы оператора L , отвечающие зонам S_n^\pm спектров σ^\pm , вместе с аналогичной суммой, отвечающей дискретному спектру, дает единичный оператор. Из соотношений (16) — (18) следует, что проекторы P_n^\pm ($n = 0, 1, \dots$) имеют ядра

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{S_{n1}^+}^{S_{n2}^+} \frac{\Psi_1(x, \lambda) \overline{\Psi_1(y, \lambda)}}{|c_{12}(\lambda)|^2 M^+(\lambda)} d\lambda$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{S_{n_1}^+}^{S_{n_2}^-} \frac{\varphi_2(x, \lambda) \overline{\varphi_2(y, \lambda)}}{|c_{21}(\lambda)|^2 M^-(\lambda)} d\lambda$$

соответственно.

Теорема. Для функции $f \in C_0^\infty(R)$ имеем

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{1}{2\pi} \left[\int_{\sigma^-} \frac{\varphi_2(x, \lambda)}{c_{21}(\lambda)} f_-(\lambda) \rho_-(\lambda) d\lambda + \right. \\ & \left. + \int_{\sigma^+} \frac{\varphi_1(x, \lambda)}{c_{12}(\lambda)} f_+(\lambda) \rho_+(\lambda) d\lambda + \sum_{k=1}^{\infty} f_k g_k(x), \right. \end{aligned} \quad (19)$$

где $g_k(x)$ — ортонормированные собственные функции дискретного спектра оператора L ;

$$\begin{aligned} \rho_{\pm}(\lambda) = & -i[M^{\pm}(\lambda)]^{-1}; \quad f_{\pm}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{\overline{\varphi_2(y, \lambda)}}{c_{21}(\lambda)} dy; \\ f_+(\lambda) = & \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{\overline{\varphi_1(y, \lambda)}}{c_{12}(\lambda)} dy; \quad f_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \overline{g_k(y)} dy, \quad k=1, 2, \dots \end{aligned} \quad (20)$$

Интегралы и ряд в (19) сходятся в $L^2(R)$. Соответствующее равенство Парсеваля имеет вид

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{\sigma^-} |f_-(\lambda)|^2 d\lambda + \int_{\sigma^+} |f_+(\lambda)|^2 d\lambda \right] + \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2$$

и справедливо уже для любых $f \in L^2(R)$, причем интегралы в (20) теперь также надо считать сходящимися в смысле $L^2(R)$.

Список литературы: 1. Фирсова Н. Е. Риманова поверхность квазиимпульса и теория рассеяния для возмущенного оператора Хилла // Мат. вопр. теории распространения волн. — 1974. — Вып. 7. — С. 51—62. 2. Титчмарш Э. Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. II. — М.: Иностран. лит., 1961. — 555 с. 3. Фирсова Н. Е. Обратная задача рассеяния для возмущенного оператора Хилла // Мат. заметки. — 1975. — 18:6. — С. 831—843. 4. Левитан Б. М., Саргсян Н. С. Введение в спектральную теорию. — М.: Наука, 1970. — 672 с.

Поступила в редколлегию 31.03.86

КВАЗИСАМОСПРЯЖЕННЫЕ СЖИМАЮЩИЕ РАСШИРЕНИЯ ЭРМИТОВА СЖАТИЯ

Пусть A — эрмитово сжатие в гильбертовом пространстве H , заданное на подпространстве D_A . Будем называть оператор $T \in [H, H]$ квазисамоспряженным сжимающим qsc -расширением A , если $T \supset A$, $T^* \supset A$, $\|T\| \leq 1$.

Оператор T , являющийся qsc -расширением A , будем относить к классу $C(\alpha)$ ($\alpha \in (0, \pi/2)$), если

$$\|\sin \alpha \cdot T \pm i \cos \alpha \cdot I\| \leq 1. \quad (1)$$

Условие (1), как легко видеть, эквивалентно условию $\|f\|^2 - \|Tf\|^2 \geq 2 \operatorname{ctg} \alpha |\operatorname{Im}(Tf, f)|$ ($\forall f \in H$) (2). Поэтому естественно, что $C(0)$ — множество всех самоспряженных сжимающих расширений (sc -расширений) оператора A , $C(\frac{\pi}{2})$ — множество всех qsc -расширений A .

Настоящая работа является подробным изложением кратких замечаний авторов [1–3]. Для нового класса операторов $C(\alpha)$ ($\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$) дано параметрическое представление и описание всех канонических резольвент. При этом при $\alpha = 0$ получаются результаты из [4]. При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ получаются (однако в менее общей форме) результаты работ [5–7].

П.1. Пусть A_μ и A_M ($A_\mu \leq A_M$) — «крайние» sc -расширения эрмитова сжатия A .

Теорема 1. *Не существует несамоспряженных qsc -расширений оператора A , реальные части которых совпадают с A_μ и A_M .*

Доказательство. Пусть $L_\mu = \overline{(I + A_\mu)H}$, P_μ — ортопроектор на L_μ в H .

Для любых $f, g \in L_\mu$ положим $(f, g)_\mu = ((I + A_\mu)f, g)$. Легко видеть, что $\|f\|_\mu \leq \sqrt{2} \|f\|$, $\|(I + A_\mu)f\| \leq \sqrt{2} \|f\|_\mu$.

Пусть T_μ — qsc -расширение A и $\operatorname{Re} T_\mu = A_\mu$, т. е. $T_\mu = A_\mu + iB$, где $B = B^*$, $\operatorname{Ker} B \supset D_A$.

Пусть $f \in H$, тогда $\|T_\mu f\|^2 = \|A_\mu f\|^2 + \|Bf\|^2 - 2\operatorname{Im}(Bf, A_\mu f) = \|A_\mu f\|^2 + \|Bf\|^2 - 2\operatorname{Im}(P_\mu Bf, (I + A_\mu)P_\mu f)$. Так как $\|T_\mu f\| \leq \|f\|$, то $\|Bf\|^2 - 2\operatorname{Im}(P_\mu Bf, P_\mu f)_\mu \leq (P_\mu(I - A_\mu)f, P_\mu f)_\mu \leq 2\|P_\mu f\|_\mu^2 + \|(I + A_\mu)f\|_\mu \|P_\mu f\|_\mu \leq 4\|P_\mu f\|_\mu^2$. Известно, что линейал $P_\mu D_A$ плотен в L_μ по норме $\|\cdot\|_\mu$, поэтому для вектора $f \in H \ominus D_A$ найдется последовательность $\{f_A^{(n)}\}_{n=1}^\infty \subset D_A$, такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_\mu f - P_\mu f_A^{(n)}\|_\mu = 0$.

Пусть $h^{(n)} = f - f_A^{(n)}$, тогда с учетом $Bh^{(n)} = Bf$ имеем $\|Bf\|^2 - 2\operatorname{Im}(P_\mu Bf, P_\mu h^{(n)})_\mu \leq 4\|P_\mu h^{(n)}\|_\mu^2$. Переходя к пределу в обеих частях этого неравенства, получим $Bf = 0$. Таким образом, $T_\mu = T_\mu^* = A_\mu$.

Если теперь воспользоваться тем, что $A_M = -(-A)_M$, то получим, что qsc -расширение A , реальная часть которого равна A_M , совпадает с A_M . Теорема доказана.

Следствие. Если $A_M = A_M$, то множество qsc -расширений оператора A состоит из одного элемента.

Пусть $A^* \in [H, D_A]$ — оператор, сопряженный к оператору A , рассматриваемому как элемент $[D_A, H]$. Обозначим $N = H \ominus D_A$, P_A , P_N — ортопроекторы в H на D_A и N соответственно. Из эрмитовости A следует, что $A^*/D_A = P_A A$.

Введем следующие обозначения:

$$L = \overline{(I - AA^*)^{1/2} H}, \quad L_A = \overline{(I - AA^*)^{1/2} D_A}, \\ L_0 = L \ominus L_A. \quad (3)$$

Пусть операторы P_0 и G_A — ортопроекторы в H на L_0 и L_A соответственно.

Определим оператор K_A равенством $K_A(I - AA^*)^{1/2} f_A = P_N A f_A$, $f_A \in D_A$ (4). Оператор K_A корректно определен и непрерывно продолжается на все L_A до сжимающего оператора из $[L_A, N]$. Это продолжение также обозначим K_A .

Пусть $K_A^* \in [N, L_A]$ — сопряженный оператор. Рассмотрим оператор $T_0 = AP_A + (I - AA^*)^{1/2} K_A^* P_N$ (5).

Лемма. 1) оператор T_0 является qsc -расширением оператора A ;

2) всякое qsc -расширение имеет вид $T = T_0 + (I - AA^*)^{1/2} \times \times K_T P_N$ (6), где для оператора $K_T \in [N, L_0]$ выполняются неравенства $\|K_T f\|^2 \leq \|f\|^2 - \|K_A^* f\|^2 \quad \forall f \in N$ (7).

3) qsc -расширение единственно, если и только если $(I - AA^*)^{1/2} H \cap N = \{0\}$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что оператор T является сжимающим расширением сжатия A в том и только в том случае, когда $T = AP_A + (I - AA^*)^{1/2} X_T P_N$ (8), где X_T — сжатие из N в L .

Если T — qsc -расширение эрмитова сжатия A , то $T^* \supset A$, поэтому $(A^* + X_T^*(I - AA^*)^{1/2})|D_A = A$. Отсюда $X_T^*(I - AA^*)^{1/2} f_A = P_N A f_A \quad \forall f_A \in D_A$. Следовательно, T , задаваемый (8), qsc -расширение тогда и только тогда, когда $X_T^*|L_A = K_A$.

Значит, X_T^* — сжимающее расширение сжатия K_A , тогда $X_T = K_A^* + + K_T$, где $K_T \in [N, L_0]$ и удовлетворяет неравенству (7). Отсюда и из (8) $T = AP_A + (I - AA^*)^{1/2} K_A^* P_N + (I - AA^*)^{1/2} K_T P_N = T_0 + (I - AA^*)^{1/2} K_T P_N$.

Если $K_T = 0$, то (7) выполняется и $T = T_0$ — qsc -расширение A .

Из определения L_0 имеем равенство $L_0 = [(I - AA^*)^{1/2}]^{-1} \{N\}$. Отсюда получаем третье утверждение леммы. Лемма доказана.

Отметим, что если $L_0 = \{0\}$, то $T_0 = T_0^* = A_M = A_M$.

Будем считать, что $L_0 \neq \{0\}$.

Пусть $K_T, K_T^* \in [N, L_0]$ определяют по формуле (6) взаимно сопряженные qsc -расширения T и T^* , тогда простым вычислением убеждаемся в равенстве $K_T^* P_0 (I - AA^*)^{1/2} = (I - AA^*)^{1/2} K_T P_N$ (9).

Обозначим $T_0 - T_0^* = M_0$. Ясно, что $R(M_0) \subseteq N$.

Теорема 2. Справедливы равенства

$$T_0 = T_0^* = (A_M + A_\mu)/2.$$

Доказательство. Пусть $K_\mu, K_M \in [N, L_0]$ определяют согласно (6) sc -расширения A_μ и A_M соответственно

$$A_\mu = T_0 + (I - AA^*)^{1/2} K_\mu P_N, \quad A_M = T_0 + (I - AA^*)^{1/2} K_M P_N.$$

При этом K_μ и K_M удовлетворяют (7).

Пусть

$X_\mu = [(I - AA^*)^{1/2} K_\mu + K_\mu^* P_0 (I - AA^*)^{1/2}] P_N/2$; $X_M = [(I - AA^*)^{1/2} \times \times K_M + K_M^* P_0 (I - AA^*)^{1/2}] P_N/2$. Так как $T_0 - M_0/2 = (T_0 + T_0^*)/2$ и A_μ, A_M — sc -расширения, то $A_\mu = T_0 + (X_\mu - M_0/2)$, $A_M = T_0 + (X_M - M_0/2)$. В силу того что $-K_\mu$ и $-K_M$ также удовлетворяют (7), то операторы

$$T_\mu = T_0 - (I - AA^*)^{1/2} K_\mu P_N, \quad T_M = T_0 - (I - AA^*)^{1/2} K_M P_N$$

являются qsc -расширениями оператора A , при этом

$$\operatorname{Re} T_\mu = T_0 + (-X_\mu - M_0/2), \quad \operatorname{Re} T_M = T_0 + (-X_M - M_0/2).$$

Поскольку операторы $\operatorname{Re} T_\mu$ и $\operatorname{Re} T_M$ являются sc -расширениями оператора A , то по теореме М. Г. Крейна [4] выполнены неравенства $A_M - \operatorname{Re} T_\mu \geq 0$ и $A_\mu - \operatorname{Re} T_M \leq 0$. А это означает, что $X_M + X_\mu \geq 0$ и $X_M + X_\mu \leq 0$. Отсюда $X_\mu = -X_M$. Поэтому $\operatorname{Re} T_M = A_\mu$. По теореме 1 отсюда следует, что $T_M = T_M^* = A_\mu$. Используя равенство (9) для оператора K_M , получаем $0 = T_M - T_M^* = 2M_0$. Отсюда, учитывая $X_\mu = -X_M$, получаем $T_0 = (A_M + A_\mu)/2$. Теорема доказана.

Отметим, что теперь соотношение (9) переходит в равенство $K_T^* P_0 (I - AA^*)^{1/2} = (I - AA^*)^{1/2} K_T P_N$ (10). Заметим также, что из (5) и теоремы 2 следует $T_0 = A^* + K_A G_A (I - AA^*)^{1/2}$ (11). Так как $(I - AA^*)^{1/2} L \subset N$, то линейное многообразие $P_0 (I - AA^*)^{1/2} N$ плотно в L_0 .

Так же, как и в случае сжатия в одном пространстве, доказываем справедливость равенств $(I - AA^*)^{1/2} A|D_A = A(I - A^*A)^{1/2}|D_A$; $(I - A^*A)^{1/2} A^* = A^*(I - AA^*)^{1/2}$ (12).

Отсюда $A^*L \subset (I - A^*A)^{1/2} D_A$ (13).

Теорема 3. Равенство $T = T_0 + (I - AA^*)^{1/2} Z_T P_0 (I - AA^*)^{1/2}$ (14) устанавливает взаимно однозначное соответствие между qsc -расширениями оператора A и сжатиями Z_T в пространстве L_0 .

Доказательство. Пусть T — qsc -расширение оператора A , тогда по лемме $T = T_0 + (I - AA^*)^{1/2} K_T P_N$, где $K_T \in [N, L_0]$ удовлетворяет неравенствам (7). Из (10) следует, что если $P_0 (I - AA^*)^{1/2} \times \times f_N = 0$, то $K_T \cdot f_N = 0$ ($f_N \in N$). Это означает, что оператор $Y_T \times \times P_0 (I - AA^*)^{1/2} f_N = K_T \cdot f_N \quad \forall f_N \in N$ корректно определен и плотно задан в L_0 .

Докажем, что Y_T — сжимающий оператор. Из (10) и (11) имеем $T^* = T_0 + K_T^* P_0 (I - AA^*)^{1/2} = A^* + K_A G_A (I - AA^*)^{1/2} + (I - AA^*)^{1/2} \times$

$\times K_T \cdot P_N$. Из определения оператора Y_T получаем $T^* = A^* + (K_A \times G_A + (I - AA^*)^{1/2} Y_T P_0) (I - AA^*)^{1/2}$. Так как $\|T^*\| \leq 1$, то

$$\|(K_A G_A + (I - AA^*)^{1/2} Y_T P_0) (I - AA^*)^{1/2} f\|^2 \leq \|(I - AA^*)^{1/2} f\|^2, \quad (15)$$

$\forall f \in H$

Отсюда следует, что оператор $M = K_A G_A + (I - AA^*)^{1/2} Y_T P_0$ является сжимающим из L в N .

Пусть $g = (I - AA^*)^{1/2} f_A + h$, где $f_A \in D_A$, $h \in P_0(I - AA^*)^{1/2} N$, тогда с учетом (12) имеем

$$\begin{aligned} Mg &= P_N A f_A + (I - AA^*)^{1/2} Y_T h; \\ \|Mg\|^2 &= 2\operatorname{Re}(A f_A, (I - AA^*)^{1/2} Y_T P_0 h) + \|P_N A f_A\|^2 + \\ &+ \|(I - AA^*)^{1/2} Y_T h\|^2 = 2\operatorname{Re}((I - A^* A)^{1/2} f_A, A^* Y_T h) + \\ &+ \|P_N A f_A\|^2 + \|Y_T h\|^2 - \|A^* Y_T h\|^2; \\ \|g\|^2 &= \|f_A\|^2 - \|P_A A f_A\|^2 + \|h\|^2. \end{aligned}$$

Поскольку M — сжатие, то $\|h\|^2 - \|Y_T h\|^2 + \|(I - A^* A)^{1/2} f_A - A^* \times Y_T h\|^2 \geq 0$ (16) при любых $f_A \in D_A$ и $h \in P_0(I - AA^*)^{1/2} N$.

Выберем теперь вследствие (13) последовательность $\{f_A^{(n)}\}_{n=1}^\infty \subset D_A$ так, чтобы $\lim_{n \rightarrow \infty} (I - A^* A)^{1/2} f_A^{(n)} = A^* Y_T h$, тогда из (16) имеем $\|h\|^2 - \|Y_T h\|^2 \geq 0 \quad \forall h \in P_0(I - AA^*)^{1/2} N$. В силу плотности $P_0(I - AA^*)^{1/2} N$ в L_0 получаем, что Y_T — сжатие в L_0 .

Поскольку $T^* = T_0 + (I - AA^*)^{1/2} Y_T P_0 (I - AA^*)^{1/2}$, то $T = T_0 + (I - AA^*)^{1/2} Z_T P_0 (I - AA^*)^{1/2}$, где $Z_T = Y_T^*$ — сжатие в L_0 .

Пусть наоборот Z_T — сжатие в L_0 , тогда справедливо неравенство (16), где $Y_T = Z_T^*$. Но (16) эквивалентно тому, что оператор $M = K_A G_A + (I - AA^*)^{1/2} Y_T P_0$ — сжатие из L в N . Значит, справедливо неравенство (15), которое означает, что $T^* = T_0 + (I - AA^*)^{1/2} \times Y_T P_0 (I - AA^*)^{1/2} = qsc$ -расширение A . Теорема доказана.

Следствие. *Справедливы равенства*

$$\begin{aligned} (A_M - A_\mu)/2 &= (I - AA^*)^{1/2} P_0 (I - AA^*)^{1/2}; \\ A_M &= A P_A + (I - AA^*)^{1/2} [K_A^* P_N + P_0 (I - AA^*)^{1/2}]; \\ A_\mu &= A P_A + (I - AA^*)^{1/2} [K_A^* P_N - P_0 (I - AA^*)^{1/2}]. \end{aligned} \quad (17)$$

Доказательство. По теореме 2 $T_0 = (A_M + A_\mu)/2$ — sc -расширение. Следовательно, исходя из (14), все sc -расширения описываются формулой $\tilde{A} = (A_M + A_\mu)/2 + (I - AA^*)^{1/2} \tilde{X} P_0 (I - AA^*)^{1/2}$, где \tilde{X} — самосопряженное сжатие в L_0 . С другой стороны, по теореме М. Г. Крейна, $\tilde{A} \in [A_\mu, A_M]$. Отсюда, учитывая (5), получаем равенства (17).

Теорема 4. *Для того чтобы qsc -расширение T эрмитова сжатия A принадлежало $C(\alpha)$, где $\alpha \in [0, \pi/2]$, необходимо и достаточно, чтобы соответствующее ему по форме (14) сжатие Z_T в подпространстве L_0 принадлежало классу $C(\alpha)$.*

Доказательство. Пусть $T = T_0 + (I - AA^*)^{1/2} Z_T P_0 (I - AA^*)^{1/2}$ — qsc -расширение A , тогда, учитывая (11), имеем $T = A^* + [K_A G_A + (I - AA^*) Z_T P_0] (I - AA^*)^{1/2}$. Далее, $\forall f \in H$ имеем $\|f\|^2 - \|Tf\|^2 = \|(I - AA^*)^{1/2} f\|^2 - \|(K_A G_A + (I - AA^*)^{1/2} Z_T P_0) (I - AA^*)^{1/2} f\|^2$, $\operatorname{Im}(Tf, f) = \operatorname{Im}(Z_T P_0 (I - AA^*)^{1/2} f, (I - AA^*)^{1/2} f)$. Поэтому, согласно

(2), условие $T \in C(\alpha)$ эквивалентно неравенству $\forall g \in L: \|g\|^2 - \|(K_A G_A + (I - AA^*)^{1/2} Z_T P_0) g\|^2 \geq 2 \operatorname{ctg} \alpha |\operatorname{Im}(Z_T P_0 g, P_0 g)|$, которое после преобразований, аналогичных проделанным при доказательстве теоремы 3, эквивалентно неравенству

$$\|h\|^2 - \|Z_T h\|^2 + \|(I - AA^*)^{1/2} f_A - A^* Z_T h\|^2 \geq 2 \operatorname{ctg} \alpha |\operatorname{Im}(Z_T h, h)|.$$

$\forall f_A \in D_A \quad \forall h \in L_0$

Выбирая последовательность $\{f_A^{(n)}\} \subset D_A$, такую, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (I - AA^*)^{1/2} \times \times f_A^{(n)} = A^* Z_T h$, получим отсюда неравенство $\|h\|^2 - \|Z_T h\|^2 \geq 2 \times \times \operatorname{ctg} \alpha |\operatorname{Im}(Z_T h, h)|$, означающее, что $Z_T \in C(\alpha)$. Теорема доказана.

Пусть $N_0 = (I - AA^*)^{1/2} L_0$. Из (17) следует $N_0 = (A_M - A_\mu) H$.
Теорема 5. Равенство $T = (A_M + A_\mu)/2 + (A_M - A_\mu)^{1/2} X (A_M - A_\mu)^{1/2}/2$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между qsc-расширениями T класса $C(\alpha)$ эрмитова сжатия A и операторами X класса $C(\alpha)$ в подпространстве N_0 .

Доказательство. Вследствие (17) $\|(A_M - A_\mu)^{1/2} f / \sqrt{2}\| = \|P_0 (I - AA^*)^{1/2} f\| \forall f \in H$. Отсюда и из плотности $P_0 (I - AA^*)^{1/2} \times \times H$ в L_0 следует существование изометрического оператора V_0 из L_0 на N_0 , такого, что $(A_M - A_\mu)^{1/2} f / \sqrt{2} = V_0 P_0 (I - AA^*)^{1/2} f \quad \forall f \in H$ (18). Пусть T — qsc-расширение класса $C(\alpha)$. Тогда по формуле (14) и теореме 4 $Z_T \in C(\alpha)$ в L_0 . Пусть $X = V_0 Z_T V_0^{-1}$, тогда $X \in C(\alpha)$ в N_0 и $Z_T = V_0^{-1} X V_0$, поэтому $T = (A_M + A_\mu)/2 + (I - AA^*)^{1/2} V_0^{-1} X V_0 \times \times P_0 (I - AA^*)^{1/2} = (A_M + A_\mu)/2 + (A_M - A_\mu)^{1/2} X (A_M - A_\mu)^{1/2}/2$. Наоборот, если $X \in C(\alpha)$ в N_0 , то $Z_T = V_0^{-1} X V_0 \in C(\alpha)$ в L_0 , поэтому оператор $T = (A_M + A_\mu)/2 + (A_M - A_\mu)^{1/2} X (A_M - A_\mu)^{1/2}/2 = (A_M + A_\mu)/2 + (I - AA^*)^{1/2} Z_T P_0 (I - AA^*)^{1/2}$ по теореме 4 является qsc-расширением класса $C(\alpha)$ оператора A . Теорема доказана.

П.2. Каждому неотрицательному оператору $F \in [H, H]$ и подпространству \tilde{H} поставим в соответствие оператор $M. Г. Крейна (F)_{\tilde{H}} = F^{1/2} \tilde{P} F^{1/2}$, где \tilde{P} — ортопроектор в H на подпространство $[F^{1/2}]^{-1} \times \times \{\tilde{H}\}$. Как известно [4], оператор $(F)_{\tilde{H}}$ является наибольшим среди тех самосопряженных операторов \tilde{F} , для которых $\tilde{F} \leq F, R(\tilde{F}) \subseteq \tilde{H}$.

Обозначим $C = A_M - A_\mu$, C — неотрицательный оператор $R(C) = N_0$. Отметим, что из (17) $(I - AA^*)_N = C/2$, а в [4] доказаны равенства $(I + A_\mu)_N = (I - A_M)_N = 0, (I - A_\mu)_N = (I + A_M)_N = C$. Докажем справедливость следующей теоремы.

Теорема 6. Если T — qsc-расширение эрмитова сжатия A , то справедливо равенство $(I - T^* T)_N = C^{1/2} (I - X^* X) C^{1/2}/2$ (19), где X — соответствующее T по теореме 5 сжатие в N_0 .

Доказательство. Пусть $T = (A_M + A_\mu)/2 + C^{1/2} X C^{1/2}/2$. Запишем T в форме (14) с учетом теоремы 2 и определения оператора T_0 : $T = A P_A + (I - AA^*)^{1/2} (K_A^* + Z_T P_0 (I - AA^*)^{1/2}) P_N$, где $Z_T = V_0^{-1} \times \times X V_0 \in [L_0, L_0], V_0 \in [L_0, N_0]$ — изометрический оператор, определенный равенством (18). Далее имеем для $K_T = K_A^* + Z_T P_0 (I - AA^*)^{1/2}$ и $\forall f \in H \|f\|^2 - \|T f\|^2 = \|P_A f\|^2 - \|A P_A f\|^2 + \|P_N f\|^2 - \|K_T P_N f\|^2 +$

$+ \|A^* K_T P_N f\|^2 - 2 \operatorname{Re}((I - A^* A)^{1/2} P_A f, A^* K_T P_N f) = \|(I - A^* A)^{1/2} \times$
 $\times P_A f - A^* K_T P_N f\|^2 + \|P_N f\|^2 - \|K_T P_N f\|^2$. Отсюда $\forall f \in H, \forall f_A \in$
 $\in D_A \|f - f_A\|^2 - \|T(f - f_A)\|^2 = \|P_N f\|^2 - \|K_T P_N f\|^2 + \|(I - A^* \times$
 $\times A)^{1/2} P_A(f - f_A) - A^* K_T P_N f\|^2$ (20). Пусть \tilde{P} — ортопроектор на $[(I -$
 $- T^* T)^{1/2}]^{-1} \{N\} = H \ominus (I - T^* T)^{1/2} D_A$. Тогда из (20) $\|\tilde{P}(I - T^* \times$
 $\times T)^{1/2} f\|^2 = \|P_N f\|^2 - \|K_T P_N f\|^2 + \inf_{f_A \in D_A} \|(I - A^* A)^{1/2} P_A(f - f_A) -$

$- A^* K_T P_N f\|^2$ (21). Выберем последовательность $\{f_A^{(n)}\}_{n=1}^\infty \subset D_A$ так,
 чтобы $\lim_{n \rightarrow \infty} (I - A^* A)^{1/2} P_A(f - f_A^{(n)}) = A^* K_T P_N f$. Тогда из (21) получим

равенство $\|\tilde{P}(I - T^* T)^{1/2} f\|^2 = \|P_N f\|^2 - \|K_T P_N f\|^2$. Отсюда с уче-
 том определения K_T и ортогональности областей значения операторов
 K_A и $Z_T P_0 (I - A A^*)^{1/2}$ получаем $\forall f \in H \|\tilde{P}(I - T^* T)^{1/2} f\|^2 = \|P_N f\|^2 -$
 $- \|K_A P_N f\|^2 - \|Z_T P_0 (I - A A^*)^{1/2} f\|^2$ (22). Из равенства (11) имеем
 $\|f\|^2 - \|T_0 f\|^2 = \|(I - A A^*)^{1/2} f\|^2 - \|K_A G_A (I - A A^*)^{1/2} f\|^2 \quad \forall f \in H$.

Пусть \tilde{P}_0 — ортопроектор на $N_{T_0} = [(I - T_0^2)^{1/2}]^{-1} \{N\}$ (напомним, что
 $T_0 = T_0^* = (A_M + A_M)/2$), тогда $\|\tilde{P}_0 (I - T_0^2)^{1/2} f\|^2 = \inf \{ \|G_A (I - A \times$
 $\times A^*)^{1/2} (f - f_A)\|^2 - \|K_A G_A (I - A A^*)^{1/2} (f - f_A)\|^2 \} + \|P_0 (I - A \times$
 $\times A^*)^{1/2} f\|^2$. Так как оператор K_A — сжатие, то, выбирая $\{f_A^{(n)}\}_{n=1}^\infty \subset$
 $\subset D_A$ так, чтобы $\lim_{n \rightarrow \infty} (I - A A^*)^{1/2} f_A^{(n)} = G_A (I - A A^*)^{1/2} f$, получим

$\|\tilde{P}_0 (I - T_0^2)^{1/2} f\|^2 = \|P_0 (I - A A^*)^{1/2} f\|^2 = \|C^{1/2} f\|^2 / 2$ (23). С другой
 стороны, полагая $Z_T = 0$ в (22), получим $\|\tilde{P}_0 (I - T_0^2)^{1/2} f\|^2 = \|P_N \times$
 $\times f\|^2 = \|P_N f\|^2 - \|K_A P_N f\|^2$ (24), учитывая (23), имеем $\|P_N \times$
 $\times f\|^2 - \|K_A P_N f\|^2 = \|C^{1/2} f\|^2 / 2$. Тогда снова из (22) $\|\tilde{P}(I - T^* \times$
 $\times T)^{1/2} f\|^2 = (\|C^{1/2} f\|^2 - \|Z_T V_0^{-1} C^{1/2} f\|^2) / 2 = (\|C^{1/2} f\|^2 - \|X C^{1/2} \times$
 $\times f\|^2) / 2$. По определению оператора $(I - T^* T)_N$ отсюда получаем
 (19). Теорема доказана.

Следствие. Для того чтобы qsc -расширение T эрмитова сжа-
 тия A было крайней точкой множества всех qsc -расширений, необ-
 ходимо и достаточно выполнение одного равенства: $(I - T^* T)^{1/2} \times$
 $\times H \cap N = \{0\}$, $(I - T T^*)^{1/2} H \cap N = \{0\}$.

Доказательство. Из описания qsc -расширений следует, что
 оператор T — крайняя точка множества qsc -расширений, если соответ-
 ствующий оператор $X \in [N_0, N_0]$ является изометрией или коизомет-
 рией. Но тогда по теореме 6 $(I - T^* T)_N = 0$ или $(I - T T^*)_N = 0$. А
 это означает, что либо $(I - T^* T)^{1/2} H \cap N = \{0\}$, либо $(I - T T^*)^{1/2} \times$
 $\times H \cap N = \{0\}$. Из теорем 5 и 6 и определения оператора класса
 $C(\alpha)$ получаем также следующее утверждение: для того чтобы qsc -
 расширение T было оператором класса $C(\alpha)$, необходимо и достаточ-
 но выполнение неравенства $-(I - T^* T)_N \leq 2 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{Im} T \leq (I - T^* T)_N$
 или $-(I - T T^*)_N \leq 2 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{Im} T \leq (I - T T^*)_N$.

Замечание. Поскольку $(I \pm (A_M + A_M)/2)_N = C/2$ и, как было дока-
 зано, $(I - (A_M + A_M)^2/4)_N = C/2$, то справедливы равенства

$$\int_{-1}^1 \frac{d(E_0(t)f, f)}{1 \pm t} = \int_{-1}^1 \frac{d(E_0(t)f, f)}{1 - t^2} = \begin{cases} \infty, & f \notin R(C^{1/2}), f \in N; \\ 2\|C^{1/2}f\|^2, & f \in R(C^{1/2}). \end{cases}$$

где $E_0(t)$ — спектральная функция оператора $(A_M + A_\mu)/2$. Кроме того, из (19) $(I - A_M^2)_N = (I - A_\mu^2)_N = 0$. Установим еще равенство $\tilde{P}_0 \times \times T_0 | N_{T_0} = 0$ (25). Из (23) получаем $(I - T_0^2)^{1/2} \tilde{P}_0 (I - T_0^2)^{1/2} = (I - AA^*)^{1/2} P_0 (I - AA^*)^{1/2}$, $\|T_0 \tilde{P}_0 (I - T_0^2)^{1/2} f\|^2 = \|A^* P_0 (I - A \times \times A^*)^{1/2} f\|^2 \quad \forall f \in H$. Далее, учитывая $T_0 | D_A = A$, имеем $\forall f \in H, \forall \times \times f_A \in D_A$, $\|T_0 \tilde{P}_0 (I - T_0^2)^{1/2} f - (I - T_0^2)^{1/2} f_A\|^2 = \|A^* P_0 (I - AA^*)^{1/2} f - (I - A^* A)^{1/2} f_A\|^2$ (26).

Поскольку

$$\|\tilde{P}_0 T_0 \tilde{P}_0 (I - T_0^2)^{1/2} f\|^2 = \inf_{f_A \in D_A} \|T_0 \tilde{P}_0 (I - T_0^2)^{1/2} f - (I - T_0^2)^{1/2} f_A\|^2,$$

то из (13) и (26)

$$\tilde{P}_0 T_0 \tilde{P}_0 (I - T_0^2)^{1/2} f = 0 \quad \forall f \in H.$$

Так как $\tilde{P}_0 (I - T_0^2)^{1/2} H = N_{T_0}$, то доказано (25).

Будем называть sc -расширение \tilde{A} экстремальным, если \tilde{A} — крайняя точка множества всех sc -расширений. Из теорем 5 и 6 следует, что \tilde{A} — экстремальное sc -расширение, если соответствующий оператор X в N_0 является самосопряженным и унитарным. Поэтому экстремальное sc -расширение не является реальной частью никакого несамосопряженного qsc -расширения. Легко видеть, что для неэкстремального sc -расширения можно указать несамосопряженное qsc -расширение T , такое, что $(T + T^*)/2 = \tilde{A}$, причем это qsc -расширение T может быть выбрано как крайняя точка множества всех qsc -расширений.

Из теоремы 6 легко получить следующее утверждение: для того чтобы sc -расширение \tilde{A} было экстремальным, необходимо и достаточно, чтобы D_A было плотно в H по норме $\|f\|_{\tilde{A}}^2 = \|f\|^2 - \|\tilde{A}f\|^2 \quad f \in H$. П.3. В этом пункте дадим описание канонических qsc -резольвент. Будем полагать, что имеет место вполне неопределенный случай: $N_0 = N$ [4]. Обозначим $R_\lambda^\mu = (A_\mu - \lambda I)^{-1}$, $R_\lambda^M = (A_M - \lambda I)^{-1}$, $R_\lambda^T = (T - \lambda I)^{-1}$. Рассмотрим оператор-функции

$$Q_\mu(\lambda) = (C^{1/2} R_\lambda^\mu C^{1/2} + I)/N,$$

$$Q_M(\lambda) = (C^{1/2} R_\lambda^M C^{1/2} - I)/N.$$

Функции $Q_\mu(\lambda)$ и $Q_M(\lambda)$ введены в [4] и названы Q -функциями эрмита сжатия A . Отметим равенство: $Q_\mu(\lambda) Q_M(\lambda) = Q_M(\lambda) Q_\mu(\lambda) = -I/N \quad \forall \lambda \in \text{Ext}[-1, 1]$. Обозначим $\Phi(\alpha) (\alpha \in [0, \pi/2])$ класс линейных операторов из $[N, N]$, подчиненных условию $\|Yf\|^2 + \text{ctg } \alpha |\text{Im}(Tf, f)| \leq \text{Re}(Yf, f) \quad \forall f \in N$. Легко видеть $Y \in \Phi(\alpha) \leftrightarrow X = 2Y - I \in \mathcal{C}(\alpha)$. (Если $\alpha = 0$, то $\Phi(0)$ — класс неотрицательных сжатий в N). Пусть $S_\alpha (\alpha \in (0, \pi/2])$ — множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих неравенствам $|\sin \alpha \lambda \pm i \cos \alpha| \leq 1$. При $\alpha = 0$ $S(0) = [-1; 1]$.

Теорема 7. При $\lambda \in \text{Ext } S_\alpha$ равенство $R_\lambda^T = R_\lambda^\mu - R_\lambda^\mu C^{1/2} Y [I + (C_\mu \times \times (\lambda) - I) Y]^{-1} C^{1/2} R_\lambda^\mu$ устанавливает взаимно однозначное соответ-

ствие между совокупностью резольвент qsc -расширений класса $C(\alpha)$ эрмитова сжатия A и классом $\Phi(\alpha)$.

Доказательство. Пусть T — qsc -расширение класса $C(\alpha)$, тогда по теореме 5 $T = A_\mu + C^{1/2}(X + I)C^{1/2}/2$, где $X \in C(\alpha)$ в N . Пусть $Y = (X + I)/2$. Тогда $Y \in \Phi(\alpha)$. Если $\lambda \in \text{Ext } S_\alpha$, то резольвенты R_λ^μ и R_λ^μ существуют и $T - \lambda I = (A_\mu - \lambda I)(I + R_\lambda^\mu C^{1/2} Y C^{1/2})$. Отсюда следует, что при $\lambda \in \text{Ext } S_\alpha$ оператор $(I + R_\lambda^\mu C^{1/2} Y C^{1/2})^{-1} \in [H, H]$. Тогда это же верно и для оператора $(I + C^{1/2} R_\lambda^\mu C^{1/2} Y)^{-1} = [I + (Q_\mu(\lambda) - I)Y]^{-1}$. Далее доказательство проводится аналогично работе [4]. Для полноты воспроизведем его.

Так как $T - A_\mu = C^{1/2} Y C^{1/2}$, то

$$R_\lambda^\mu - R_\lambda^T = R_\lambda^\mu C^{1/2} Y C^{1/2} R_\lambda^T.$$

Отсюда $C^{1/2} R_\lambda^T = C^{1/2} R_\lambda^\mu - C^{1/2} R_\lambda^\mu C^{1/2} Y C^{1/2} R_\lambda^T$.

Поэтому, по определению Q_μ -функции, $C^{1/2} R_\lambda^T = [I + (Q_\mu(\lambda) - I)Y]^{-1} C^{1/2} R_\lambda^\mu$. Следовательно, $R_\lambda^T = R_\lambda^\mu - R_\lambda^\mu C^{1/2} Y [I + (Q_\mu(\lambda) - I) \times Y]^{-1} C^{1/2} R_\lambda^\mu$. Теорема доказана.

Аналогично доказывается

Теорема 8. При $\lambda \in \text{Ext } S_\alpha$ равенство $R_\lambda^T = R_\lambda^M + R_\lambda^M C^{1/2} Y [I - (Q_M \times (\lambda) + I)Y]^{-1} C^{1/2} R_\lambda^M$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между совокупностью резольвент qsc -расширений класса $C(\alpha)$ и классом операторов $\Phi(\alpha)$.

Другие описания резольвент, в том числе и обобщенных, были проведены Г. Лангером, В. Тексториусом и авторами.

Отметим в заключение, что класс $C(\alpha)$ был впервые введен и исследован в [2, 3]. Дальнейшее изучение класса $C(\alpha)$ с помощью другого подхода проводилось в работе [8].

Список литературы: 1. Арлинский Ю. М., Цекановский Э. Р. Несамосопряженные сжимающие расширения эрмитова сжатия и теоремы М. Г. Крейна // Успехи мат. наук. — 1982. — Вып. 37, № 1. — С. 131—132. 2. Арлинский Ю. М., Цекановский Э. Р. О секториальных расширениях положительных эрмитовых операторов и их резольвентах: Докл. АН АрмССР, 1984, 79, № 5. — С. 199—202. 3. Цекановский Э. Р. Расширения Фридрихса и Крейна положительных операторов и голоморфные полугруппы сжатий // Функцион. анализ. — 1981. — 15, № 4. — С. 91—92. 4. Крейн М. Г., Овчаренко И. Е. О Q -функциях и sc -резольвентах неплотно заданных эрмитовых сжатий // Сиб. мат. журн. — 1977. — 18, № 5. — С. 1032—1056. 5. Arsene Gr., Gheondea A. Completing matrix contractions // J. Oper. Theory. — 1982. — 7, № 1. — P. 179—189. 6. Davis C. and al. Norm-preserving dilations and their applications to optimal error bounds/ C. Davis, W. Kahan, H. Weinberger // SIAM J. Numer. Anal. — 1982. — 19, № 13. — P. 445—469. 7. Шмудьян Ю. Л., Яновская Р. Н. О боках сжимающей операторной матрицы // Изв. вузов. Математика. — 1981. — № 7. — С. 72—75. 8. Колманович В. Ю., Маламуд М. М. О расширениях секториальных операторов и дуальных пар сжатий. — Донецк, 1985. — С. 10—30. Деп. в ВИНТИ 22.03.78, № 4428.

Поступила в редколлегию 05.11.86

ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ, СВЯЗАННЫЕ
С НЕРАСТЯГИВАЮЩИМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ

Пусть X — выпуклый компакт в банаховом пространстве, $V: X \rightarrow X$ — нестягивающее отображение, т. е. $\|Vx - Vy\| \leq \|x - y\|$ ($x, y \in X$). Рассмотрим семейство разностных уравнений $x_{n+1} = \alpha x_n + (1 - \alpha)Vx_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$; $0 \leq \alpha < 1$) (1), являющихся приближениями для дифференциального уравнения: $\dot{x} = Vx - x$ (2). При $\alpha = 0$ система (1) задает последовательность итераций отображения V . Эти итерации могут расходиться. Примером служит поворот V_θ двумерного диска на угол θ ($0 < \theta < 2\pi$).

В настоящей работе рассматривается итерационный процесс (1) при фиксированном α ($0 < \alpha < 1$). Устанавливается, что при любой начальной точке x_0 процесс (1) сходится к некоторой неподвижной точке отображения V . Таким образом, итерации (1) при $0 < \alpha < 1$ можно рассматривать как вычислительный метод нахождения неподвижной точки любого нестягивающего отображения в выпуклом компакте. Впрочем, сходимость этого процесса, по-видимому, может быть весьма медленной (см. ниже оценку (3)).

Заметим прежде всего, что если $\{x_n^{(1)}\}, \{x_n^{(2)}\}$ — любые две итерационные последовательности вида (1), то $\|x_n^{(1)} - x_n^{(2)}\|$ не возрастает. Действительно, $\|x_{n+1}^{(1)} - x_{n+1}^{(2)}\| \leq \alpha \|x_n^{(1)} - x_n^{(2)}\| + (1 - \alpha) \|Vx_n^{(1)} - Vx_n^{(2)}\| \leq \|x_n^{(1)} - x_n^{(2)}\|$. Поэтому существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n^{(1)} - x_n^{(2)}\|$. В частности, если $\{x_n\}$ — траектория, а \bar{x} — неподвижная точка отображения V , то существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \bar{x}\|$.

Теорема. Если V — нестягивающее отображение, то каждая итерационная последовательность $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ вида (1) сходится, причем имеет место оценка $\|x_{n+1} - x_n\| = O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$ (3).

Доказательство. Покажем вначале, что из оценки (3) следует сходимость. Пусть \bar{x} — предельная точка последовательности, $\bar{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$ ($n_k \nearrow \infty$). Тогда $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k+1} = \alpha \bar{x} + (1 - \alpha)V\bar{x}$. Из (3) следует, что $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$, т. е. \bar{x} — неподвижная точка системы (1). Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \bar{x}\| = 0$.

Положим $x_{n+1} - x_n = z_n$. Выше было показано, что $\|z_n\|$ не возрастает. Если $z_n = 0$ при некотором n , то итерационная последовательность сходится к неподвижной точке за n шагов. Пусть $z_n \neq 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Требуется доказать, что

$$\|z_n\| \leq \frac{Q}{\ln n} \quad (Q = \text{const}), \quad (4)$$

начиная с некоторого n .

Для любых $m \geq 0, n > 0$

$$\frac{z_{m+n}}{\alpha^{m+n}} - \frac{z_m}{\alpha^m} = \sum_{k=m}^{m+n-1} \frac{z_{k+1} - \alpha z_k}{\alpha^{k+1}}.$$

Оценим z_{m+n} с помощью соотношения

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\alpha^n} - 1\right) z_{m+n} &= z_m - z_{m+n} + \sum_{k=m}^{m+n-1} (z_{k+1} - \alpha z_k) + \\ &+ \sum_{k=m}^{m+n-1} \left(\frac{1}{\alpha^{k-m+1}} - 1\right) (z_{k+1} - \alpha z_k). \end{aligned} \quad (5)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \left\| z_m - z_{m+n} + \sum_{k=m}^{m+n-1} (z_{k+1} - \alpha z_k) \right\| &= \left\| (1 - \alpha) \sum_{k=m}^{m+n-1} z_k \right\| = \\ &= \|(1 - \alpha)(x_{m+n} - x_m)\| \leq (1 - \alpha)c, \end{aligned} \quad (6)$$

где $c = \text{const}$ не зависит от m и n . Далее $\|z_{k+1} - \alpha z_k\| = \|(1 - \alpha) \times \times (Vx_{k+1} - Vx_k)\| \leq (1 - \alpha) \|z_k\|$ (7). Из (5)–(7) следует, что

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\alpha^n} - 1\right) \|z_{m+n}\| &\leq (1 - \alpha)c + (1 - \alpha) \|z_m\| \sum_{k=m}^{m+n-1} \left(\frac{1}{\alpha^{k-m+1}} - 1\right) = \\ &= \left(\frac{1}{\alpha^n} - 1\right) \|z_m\| - (1 - \alpha)(n \|z_m\| - c). \end{aligned}$$

Отсюда $\|z_{m+n}\| < \|z_m\| - \alpha^n(1 - \alpha)(n \|z_m\| - c)$ (8). Определим последовательность $\{N_i\}_{i=0}^{\infty}$ рекуррентно: $N_0 = 0$; $N_{i+1} = N_i + n_i$, где $n_i = [b_i]$, $b_i = \frac{c}{a_i} + \frac{1}{1 - \alpha} + 1$, $a_i = \|z_{N_i}\|$. Поскольку последовательность $\{a_i\}$ монотонно убывает, то последовательность $\{b_i\}$ монотонно возрастает. В силу (8) $a_{i+1} < a_i - \alpha^{n_i}(1 - \alpha)(n_i a_i - c)$. Поскольку $n_i > \frac{c}{a_i} + \frac{1}{1 - \alpha}$, то $a_{i+1} < a_i(1 - \alpha^{n_i})$. Отсюда

$$\begin{aligned} n_i < n_i \frac{a_i - a_{i+1}}{a_i \alpha^{n_i}} < b_i \frac{b_{i+1} - b_i}{b_{i+1} - \frac{1}{1 - \alpha} - 1} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{b_i} < A \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{b_i} (b_{i+1} - b_i) \\ (A = \text{const}). \end{aligned}$$

Суммируя эти оценки, получаем для любого натурального k

$$\begin{aligned} N_k &= \sum_{i=0}^{k-1} n_i < A \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{b_i} (b_{i+1} - b_i) < A \int_{b_0}^{b_k} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^x dx = \\ &= \frac{A}{\ln \alpha^{-1}} \left[\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{b_k} - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{b_0} \right] = B \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{c}{a_k}} + C \quad (B, C = \text{const}). \end{aligned}$$

Следовательно, последовательность $\{a_k \ln N_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена сверху некоторой константой Q_1 .

Возьмем произвольное $Q > Q_1$ и покажем, что оценка (4) выполняется при всех достаточно больших n . Имеем

$$\|z_n\| \leq \frac{Q_1}{\ln N_k} (n \geq N_k).$$

Далее $\frac{Q_1}{\ln N_k} \leq \frac{Q}{\ln n}$ при $n \leq N_k^{\frac{Q}{Q_1}}$. Таким образом, при $N_k \leq n \leq N_k^{\frac{Q}{Q_1}}$ выполняется (4). Поэтому, если $N_{k+1} \leq N_k^{\frac{Q}{Q_1}}$, то для всех натуральных n из промежутка $[N_k, N_{k+1}]$ выполняется (4).

Пусть $N_{k+1} > N_k^{\frac{Q}{Q_1}}$, т. е. $n_k > N_k^{\frac{Q}{Q_1}} - N_k$, тогда

$$\frac{c}{a_k} > N_k^{\frac{Q}{Q_1}} - N_k - \frac{1}{1-\alpha} - 1.$$

Для любой постоянной $c_1 > c$ найдется $M > 0$ такое, что при $N > M$ выполняется неравенство

$$N_k^{\frac{Q}{Q_1}} - N - \frac{1}{1-\alpha} - 1 > \frac{c}{c_1} N_k^{\frac{Q}{Q_1}}. \quad (9)$$

Таким образом,

$$a_k < c_1 N_k^{\frac{Q}{Q_1}} = (N_k > M).$$

Зафиксируем k такое, что $N_k > M$ и положим $\lambda = \frac{Q}{c_1}$, $f(\xi) = e^{\lambda \xi}$.

Можно считать $\lambda > 1$ ввиду произвола в выборе Q .

Неравенство

$$c_1 N_k^{\frac{Q}{Q_1}} \leq \frac{Q}{\ln n}$$

выполняется при $n \leq f(N_k^{\frac{Q}{Q_1}})$, следовательно, при $N_k \leq n \leq f(N_k^{\frac{Q}{Q_1}})$ выполняется (4). Покажем, что (4) выполняется для всех натуральных n из промежутка $[N_k, N_{k+1}]$. В случае, когда $N_{k+1} \leq f(N_k^{\frac{Q}{Q_1}})$ требуемое утверждение доказано.

Пусть $N_{k+1} > f(N_k^{\frac{Q}{Q_1}})$. Рассмотрим итерации $f^{p+1}(\xi) = f(f^p(\xi))$ ($p = 1, 2, \dots$). Очевидно, что $f^p(\xi) \nearrow \infty$ при $p \rightarrow \infty$ равномерно по $\xi \in [0, \infty)$. Поэтому существует такое p , что

$$f^p(N_k^{\frac{Q}{Q_1}}) < N_{k+1} \leq f^{p+1}(N_k^{\frac{Q}{Q_1}}).$$

Тогда

$$\frac{c}{a_k} > f^p(N_k^{\frac{Q}{Q_1}}) - N_k - \frac{1}{1-\alpha} - 1.$$

Из (9) вытекает, что

$$f^p(N_k^{\frac{Q}{Q_1}}) - N_k - \frac{1}{1-\alpha} - 1 > \frac{c}{c_1} f^p(N_k^{\frac{Q}{Q_1}}).$$

Отсюда

$$\|z_n\| \leq a_k < \frac{c_1}{f^p(N_k^{\frac{Q}{Q_1}})} (n \geq N_k).$$

Неравенство

$$\frac{c_1}{f^p(N_k^{\frac{Q}{Q_1}})} \leq \frac{Q}{\ln n}$$

выполняется при $n \leq f^{p+1}(N_k^{\frac{Q}{Q_1}})$. Следовательно, при $N_k \leq n \leq f^{p+1}(N_k^{\frac{Q}{Q_1}})$ и, в частности, при $N_k \leq n \leq N_{k+1}$ выполняется (4). Итак, оценка (4) доказана при всех $n \geq N_k$.

Поступила в редколлегию 18.09.86

УДК 517

Г. Р. БЕЛИЦКИЙ

КОНЕЧНАЯ ОПРЕДЕЛЕННОСТЬ РОСТКОВ C^∞ -ДИФФЕОМОРФИЗМОВ

1°. Цель настоящей работы — доказать, что конечная определенность ростка C^∞ -диффеоморфизма эквивалентна его формальной конечной определенности. Все формально конечно-определенные диффеоморфизмы можно описать по аналогии с формальными векторными полями [1]*.

Мы используем технику [2] для решения возникающих при доказательстве основного результата функциональных уравнений.

Напомним, что росток C^∞ -отображения $F: (R^n, 0) \rightarrow (R^n, 0)$ называется k -определенным, если каждый другой росток G , k -струя которого равна k -струе F , сопряжен с F в классе C^∞ . Росток называется конечно-определенным, если он k -определен при некотором $k < \infty$, и ω -определенным, если он k -определен при $k = \infty$. Понятие конечной определенности имеет очевидный формальный аналог.

Пусть $F(x) = \Lambda x + f(x)$, $f(x) = 0(x)$, так что $\Lambda = F'(0)$ — линейное приближение ростка F . Обозначим через L_c так называемое цент-

* Аналог соответствующей теоремы для диффеоморфизмов недавно получил и сообщил автору М. Я. Житомирский.

ральное многообразие линейного приближения, т. е. инвариантное подпространство, отвечающее унитарной части спектра. Существует такое формальное преобразование $\Phi: (R^n, 0) \rightarrow (R^n, 0)$, что L_c инвариантно относительно $\hat{\Phi}\hat{F}\hat{\Phi}^{-1}$ (здесь \hat{F} — формальный ряд Тейлора в нуле). Поэтому без ограничения общности можно сразу считать, что L_c инвариантно относительно \hat{F} .

Теорема. Пусть сужение $\hat{F}|_{L_c}$ конечно определено. Тогда росток F ω -определен.

Следствие. Росток C^∞ -отображения F конечно определен тогда и только тогда, когда формальное отображение \hat{F} конечно определено.

2°. Из конечной определенности сужения $\hat{F}_c = \hat{F}|_{L_c}$ следует, что $\dim L_c \leq 2$. При этом если $\dim L_c = 1$, то $\hat{F}_c \neq 0$. Если же $\dim L_c = 2$, то $\text{спес } \Lambda_c = \{e^{\pm \mu i}\}$; здесь μ — иррационально и, кроме того, \hat{F}_c является либо квазисжатием, либо квазирастяжением. Обозначим через L_\pm инвариантные подпространства линейного приближения Λ , отвечающие собственным числам, по модулю большим и соответственно меньшим единицы. Из квазигиперболичности сужения $\hat{F}|_{L_c}$ следует (см. [2], с. 128) существование такого C^∞ -преобразования Φ , что подпространства $L_+ + L_c$, $L_- + L_c$ инвариантны относительно $\Phi F \Phi^{-1}$. Поэтому считаем, что это условие инвариантности выполнено для F .

Пусть теперь $G = F + g$, $\hat{g} = 0$. Мы должны доказать, что росток G сопряжен с F в классе C^∞ . Существует такое преобразование $\Phi(x) = x + \varphi(x)$, $\hat{\varphi} = 0$, что $L_\pm + L_c$ инвариантны относительно $\Phi G \Phi^{-1}$ (см. [2], с. 128). Так как разность $F - \Phi G \Phi^{-1}$ по-прежнему имеет нулевой ряд Тейлора при $x = 0$, то можно считать, что $L_\pm + L_c$ инвариантны относительно G . Наконец, так как сужение $F_c = F|_{L_c}$ ω -определено, то можно считать, что $F_c = G_c$.

В силу [3] для доказательства сопряженности F и G достаточно доказать существование такого C^∞ -преобразования Φ , что разность $F - \Phi^{-1}G\Phi$ — плоская на L_c (т. е. равна на L_c нулю вместе со всеми производными). С учетом теоремы Уитни о восстановлении C^∞ -отображения по значениям его производных (в данном случае на L_c) достаточно, в свою очередь, доказать существование такого преобразования $\Phi(x) = x + \varphi(x)$, $\hat{\varphi} = 0$, что

$$(\Phi(Fx) - G(\Phi(x)))^{(k)}|_{x \in L_c} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (1)_k$$

Так как $F_c = G_c$, то можно положить $\varphi|_{L_c} = 0$. Тогда все уравнения $(1)_k$ ($k = 1, 2, \dots$) линейны относительно производных $\varphi^{(k)}(x)$, $x \in L_c$ и имеют вид

$$\Psi(Fx) = Q(x)\Psi(x) + \gamma(x) \quad (x \in L_c), \quad (2)$$

где $Q(0)$ — невырожденная матрица.

Докажем разрешимость уравнения [2] при любых комплекснозначных C^∞ -отображениях $Q: L_c \rightarrow C^{m^2}$, $\gamma: L_c \rightarrow C^m$, $\hat{\gamma} = 0$, $\det Q(0) \neq 0$. Тем самым будет доказана и наша теорема.

3°. Пусть сначала $\dim L_c = 1$. Тогда $F_c(0) = \pm 1$. Рассмотрим случай $F_c(0) = 1$ и докажем существование плоского в нуле C^∞ -отображения $\Psi: R_+ \rightarrow C^m$, удовлетворяющего (2) при $x \geq 0$. Аналогично может быть доказано существование плоского в нуле решения этого уравнения при $x \leq 0$.

Пусть κ — алгебраическое замыкание поля отношений кольца $C[[x]]$ формальных рядов от одной переменной.

Лемма 1. Пусть $\det Q(0) \neq 0$. Существует такая обратимая над полем κ матрица $\hat{T}(x)$, что матрица $\hat{Q}(x) = (\hat{T}(\hat{F}_c x))^{-1} \hat{Q}(x) \times \times \hat{T}(x)$ треугольна.

Доказательство. Воспользуемся аналогом этого утверждения для дифференциальных уравнений [4].

Непосредственно проверяется, что формальный диффеоморфизм $\Phi(x, y) = (\hat{F}(x), \hat{Q}(x)y)$ включается в формальный поток $\hat{\Phi}^t(x, y) = (\hat{F}^t(x), \hat{A}^t(x), y)$. Тогда $\hat{F} = \hat{F}^t|_{t=1}$, $\hat{Q}(x) = \hat{A}^t(x)|_{t=1}$. Пусть $a(x) = \left. \frac{d\hat{A}^t(x)}{dt} \right|_{t=0}$. Согласно [4], существует такое обратимое над κ преобразование $\hat{T}(x)$, что матрица

$$\hat{a}(x) = (\hat{T}(x))^{-1} (a(x) \hat{T}(x) - v(x) \hat{T}(x)), \quad v = \left. \frac{dF^t}{dt} \right|_{t=0}$$

жорданова над κ . Но тогда матрица $\hat{A}^t(x) = (\hat{T}(\hat{F}^t(x)))^{-1} \hat{A}^t(x) \hat{T}(x)$ треугольна над κ . Полагая $t = 1$, получим утверждение леммы.

В силу леммы 1 можно считать, что матрица Q в уравнении (2) имеет вид $Q(x) = D(x) + N(x) + \tau(x)$, где $\tau = 0$; N — нильтреугольная матрица, а $D(x) = \text{diag}(\mu_1(x), \dots, \mu_m(x))$. Здесь $\mu_j(x) = \exp \lambda_j(x^{m_j})$, где λ_j — полиномы, а $m_j \geq 1$ — целые числа (см. [4]).

Так как считаем $x \geq 0$ и (2) решается в плоских отображениях, то допустимы преобразования вида $\varphi(x) = T(x)\Psi(x)$, где T — C^∞ -матрица при $x \neq 0$, которая становится гладкой в нуле после замены $x \rightarrow x^q$ и умножения на x^l при некоторых $q, l \in \mathbb{R}$.

Лемма 2. Существует такое допустимое преобразование, которое приводит матрицу Q к треугольному виду.

Доказательство. Пусть для определенности $F_c(x) = x(1 + \alpha x^r + \dots)$, $\alpha > 0$. Преобразованием вида $T(x) = \text{diag}(1, x^{p_1}, \dots, x^{p_{n-1}})$ можно добиться, чтобы $N(x) = o(x^q)$ при любом наперед заданном $q > 0$. Нам достаточно выбрать $q = r$.

Упорядочим собственные значения μ_1, \dots, μ_m так, чтобы $|\mu_1(x)| \geq \dots \geq |\mu_m(x)|$ при малых $x > 0$. Будем искать преобразование матрицы Q к верхнетреугольной в виде $T(x) = E + \Psi(x)$, где Ψ — нижняя нильтреугольная C^∞ -матрица, плоская в нуле. Положим $Q(\bar{x}) = D(x) + x^r G(x)$. Тогда для элементов $\Psi_{kj}(x)$ получим уравнения

$$\begin{aligned} \Psi_{kj}(F_c x) &= (\mu_k(x) \mu_j^{-1}(x)) \Psi_{kj}(x) + \mu_j^{-1}(x) x^r \sum_l G_{kl}(x) \Psi_{lj}(x) - \\ &- \mu_j^{-1}(x) x^r \sum_l \Psi_{kl}(F_c x) n_{lj}(x) - \mu_j^{-1}(x) \tau_{kj}(x) \quad (k \geq j). \end{aligned} \quad (3)$$

Элементы Ψ_{kj} последовательно при $j = 1, 2, \dots$ находятся из этих уравнений с учетом равенств $\Psi_{kj} = 0$ ($k < j$), $n_{kj} = 0$ ($k \geq j$). Элементы n_{kj} при $k < j$ определяются из равенств

$$-\sum_l \Psi_{kl}(F_c x) n_{lj}(x) + x^r \sum G_{kl}(x) \Psi_{lj}(x) = n_{kj}(x) + \\ + \sum_{l < j} \Psi_{kl}(x) n_{lj}(x) + \tau_{kj}(x).$$

Для нахождения Ψ_{kj} при фиксированном j положим $g(x) = (\Psi_{j+1,j} \times \times (x), \dots, \Psi_{mj}(x))$. Тогда (3) запишется в виде $g(F_c x) = \Delta(x) g(x) + x^r L(x) g(x) + \theta(x)$ (4). Здесь Δ — диагональная матрица, $\|\Delta(x)\| \leq 1$, L — некоторая C^∞ -матрица, а θ — плоское в нуле. Так как F_c — квазигиперболично порядка r , то уравнение (4), согласно ([2], с. 124), имеет некоторое плоское в нуле решение g . Лемма доказана.

Итак, в случае $\dim L_c = 1$, $F_c(0) = 1$ матрицу Q в уравнении (2) можно считать треугольной. Поэтому (2) сводится к серии одномерных уравнений вида $\Psi(F_c x) = (d_0 + d_1 x^\rho + o(x^\rho)) \Psi(x) + \delta(x)$ с комплексными d_0 , d_1 и $\rho > 0$. Разрешимость таких уравнений установлена там же.

Пусть теперь $F_c(0) = -1$. Для доказательства разрешимости уравнений (2) в этом случае положим

$$\varphi(x) = \begin{cases} \Psi(x) & (x \geq 0); \\ Q(F^{-1}x) \Psi(F^{-1}x) + \gamma(F^{-1}x) & (x \leq 0), \end{cases}$$

где Ψ — решение уравнения $\Psi(F^2 x) = Q(Fx) Q(x) \Psi(x) + Q(Fx) \gamma(x)$ (существующее согласно доказанному выше). Тогда φ — решение уравнения (2).

Для завершения доказательства теоремы нам осталось рассмотреть случай $\dim L_c = 2$. Можно считать, что F_c имеет нормальную форму, так что в комплексных координатах $F_c(z, \bar{z}) = z(e^{i\mu} + h(|z|^2))$, $z \in \mathbb{C}$. В этих условиях имеет место

Лемма 3. Существует C^∞ -преобразование $T(x)$, приводящее матрицу Q к виду $(T(F(x))^{-1} Q(x) T(x) = P(x) + \tau(x)$, $\tau = 0$, где P имеет нормальную форму: $P(\Lambda_c x) D = DP(x)$, D — полупростая часть матрицы $Q(0)$.

Доказательство. Существует формальное преобразование \tilde{T} , приводящее \hat{Q} к нормальной форме \hat{P} (это — вариант теоремы Пуанкаре — Дюляка). Пусть P — матрица с рядом Тейлора \hat{P} , имеющая нормальную форму (см. [2], с. 141). Тогда матрицы Q и $Q_1(x) = T(Fx) P(x) (T(x))^{-1}$ имеют одинаковые ряды Тейлора: $Q = Q_1 + \gamma$, $\gamma = 0$. Поэтому $(T(Fx))^{-1} Q(x) T(x) = P(x) + \tau(x)$, $\tau(x) = (T(Fx))^{-1} \times \times \gamma(x) T(x)$. Лемма доказана.

Переходя теперь к комплексным координатам, положим $\hat{P}(x) = \hat{B}(z, \bar{z}) = (B_{ij}(z, \bar{z}))_{i,j} (x \in \mathbb{R}^2, z \in \mathbb{C})$. Введем в множестве $\text{spec } D = \{\lambda_k\}$ отношение эквивалентности, положив $\lambda_k \sim \lambda_j \leftrightarrow \lambda_k \lambda_j^{-1} = e^{is\mu}$, $s \in \mathbb{Z}$. Пусть M_1, \dots, M_p — классы эквивалентности. Занумеруем числа λ_k так, чтобы $\lambda_l \in M_v (k_{v-1} + 1 \leq l \leq k_v, v = 1, \dots, p)$, $k_0 = 0$.

Здесь k_v — число элементов в M_v . Тогда $\hat{B}_{l_j}(z, \bar{z}) = 0$ ($\lambda_l \not\sim \lambda_j$) и $\hat{B}_{l_j} \times \times (z, z) = \hat{b}_{l_j}(|z|^2) \bar{z}^{s_j^v} z^{s_j^v} (\lambda_l, \lambda_j \in M_v)$, где

$$s_j^v = \frac{\ln \lambda_{k_{v-1}+1} - \ln \lambda_j}{i\mu} (k_{v-1} + 1 \leq j \leq k_v),$$

а \hat{b}_{l_j} — некоторые ряды от одной переменной. Таким образом, $\hat{P}(x) = T(\bar{z}) b(|z|^2) T^{-1}(\bar{z})$, $T(\bar{z}) = \text{diag}(\bar{z}^{s_1^1} \dots \bar{z}^{s_{k_p}^p})$. Сделав преобразование $\bar{\varphi}(x) = T(\bar{z}) \varphi(x)$, приведем (2) к уравнению с матрицей $\tilde{Q}(x) = B(x) + \tau(x)$, $\hat{\tau} = 0$, $B(x) = D^{-1}(|z|^2) b(|z|^2)$. Здесь

$$D(|z|^2) = \text{diag}\{(e^{-\mu t} + \bar{h}(|z|^2))^{s_1^1}, \dots, (e^{-\mu t} + h(|z|^2))^{s_{k_p}^p}\}.$$

Таким образом, доказана

Лемма 4. При $\dim L_c = 2$ существует допустимое преобразование, приводящее (2) к уравнению с матрицей $\tilde{Q}(x) = B(|z|^2) + \tau(x)$, $\hat{\tau} = 0$.

Будем теперь считать, что матрица $Q(x)$ в (2) имеет вид, указанный в лемме 4.

Лемма 5. Существует допустимое преобразование, приводящее матрицу Q в (2) к виду $\tilde{Q}(x) = D(\|x\|^2) + N(x)$, где N — верхняя нильтреугольная C^∞ -матрица, а $D(t)$ ($t \in \mathbf{R}_+$) — диагональная матрица над полем \mathbf{x} .

Доказательство. Преобразование $\varphi(x) = T(\|x\|^2) \tilde{\varphi}(x)$ переводит $B(|z|^2)$ в матрицу $\tilde{B}(|z|^2)$, где $\tilde{B}(t) = T(t \cdot |e^{i\mu} + h(t)|)^{-1} \times \times B(t) T(t)$. Так как $|e^{i\mu} + h(t)| = 1 + \gamma(t)$, $\gamma \neq 0$, то, в силу леммы 2 (при $F_c(x) = x(1 + \gamma(x))$), существует такое допустимое преобразование, что матрица $\tilde{B}(t)$ треугольна и ее диагональные элементы лежат в поле \mathbf{x} . Поэтому можно считать, что $Q(x) = B(\|x\|^2) + \tau(x)$, $\tau = 0$, где $B(t)$ — треугольная матрица над \mathbf{x} . Остается «избавиться» от плоской добавки τ . Это делается так же, как и при доказательстве леммы 2.

В силу леммы 5 уравнение (2) при $\dim L_c = 2$ также сводится к серии одномерных уравнений вида $\varphi(F_c x) = (d_0 + d_1 \|x\|^\rho + o(\|x\|^\rho)) \varphi(x) + \gamma(x)$, где $d_0, d_1 \in \mathbf{C}$, $\rho > 0$. Доказательство их разрешимости ничем не отличается от случая $\dim L_c = 1$. Таким образом, наша теорема полностью доказана.

Список литературы: 1. Ichikawa F. Finitely determined singularities of formal vector fields // Invent. math.— 1982.— 66.— Р. 199—214. 2. Белицкий Г. Р. Нормальные формы, инварианты и локальные отображения. — К.: Наук. думка, 1979.— 170 с. 3. Белицкий Г. Р. О сопряженности локальных диффеоморфизмов // Докл. АН СССР, 1970, 191, № 3. — С. 515—518. 4. Кузнецов А. М. Дифференцируемые решения вырождающихся систем обыкновенных уравнений // Функцион. анализ.— 1972.— 6, № 2, — с. 41—51.

Поступила в редколлегию 04.10.85

ОПИСАНИЕ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДЕННОЙ ПРОБЛЕМЫ
МОМЕНТОВ НА ОСИ И ПОЛУОСИ

1. Решения матричной проблемы моментов Гамбургера (H) на оси и Стильтеса (S) на полуоси параметризуются посредством дробно-линейного преобразования (ДЛП), матрица-функция (м.-ф.) $A(z)$ которого оказывается J -растягивающей в верхней полуплоскости и J -унитарной на вещественной оси. Параметрами в ДЛП являются пары мероморфных м.-ф. — неванлинновские в задаче H или стильтесовские в задаче S .

В невырожденном случае задачи H [1] и задачи S [2] матрица ДЛП имеет полный ранг, а в качестве параметров в ДЛП подставляются произвольные пары м.-ф.

В настоящей работе описываются решения вырожденных задач H и S . Как и в невырожденном случае, множество решений параметризуется посредством ДЛП, матрица которого является J -растягивающей в верхней полуплоскости и J -унитарной на вещественной оси. Однако подставляемые параметры уже не произвольны, а выбираются специальным образом. Указанное описание устанавливается следующими двумя теоремами.

Теорема 1.1. Множество решений задачи H параметризуется посредством ДЛП

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Sigma(\lambda)}{\lambda - z} = [a_{11}(z)p(z) + a_{12}(z)q(z)][a_{21}(z)p(z) + a_{22}(z)q(z)]^{-1}, \quad (1.1)$$

где матрица-функция ДЛП $A(z) = \|a_{ik}(z)\|_{i,k=1}^2$ является J -растягивающей в верхней полуплоскости и J -унитарной на вещественной оси;

$$p(z) = \begin{bmatrix} \hat{p}(z) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad q(z) = \begin{bmatrix} \hat{q}(z) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix};$$

$\{p(z), q(z)\}$ — произвольная неванлинновская пара.

Теорема 1.2. Множество решений задачи S параметризуется посредством ДЛП

$$\int_0^{\infty} \frac{d\Sigma(\lambda)}{\lambda - z} = [a_{11}(z)p(z) + a_{12}(z)q(z)][a_{21}(z)p(z) + a_{22}(z)q(z)]^{-1}, \quad (1.2)$$

где матрица-функция ДЛП $A(z)$ является J -растягивающей в верхней полуплоскости и J -унитарной на вещественной оси;

$$p(z) = \begin{bmatrix} \hat{P}(z) & \\ & 0 \\ & & I \end{bmatrix} U, \quad q(z) = \begin{bmatrix} \hat{q}(z) & \\ & I \\ & & 0 \end{bmatrix} U;$$

$\{p(z), q(z)\}$ — произвольная стилтьесовская пара; U — матрица подстановки, определяемая данными задачи, а соответствующие блоки в блочных представлениях $p(z)$ и $q(z)$ имеют одинаковые размерности.

Пару мероморфных в верхней полуплоскости м.-ф. $\{p(z), q(z)\}$ называют неванлинновской, если выполняются следующие условия: $\det(p^*(z)p(z) + q^*(z)q(z)) \neq 0$ (1.3); $-i(q^*(z)p(z) - p^*(z)q(z)) \geq 0$ (1.4).

Если же м.-ф. $p(z), q(z)$ мероморфны вне полуоси $[0, \infty)$ и наряду с условиями (1.3), (1.4) удовлетворяют условию $-i(zq^*(z)p(z) - \bar{z}p^*(z)q(z)) \geq 0$, то пару $\{p(z), q(z)\}$ называют стилтьесовской.

Пары $\{p(z), q(z)\}, \{p_1(z), q_1(z)\}$ называют эквивалентными, если существует мероморфная м.-ф. $f(z)$ такая, что $p_1(z) = p(z)f(z)$, $q_1(z) = q(z)f(z) \det f(z) \neq 0$.

2. Проблема моментов Гамбургера (H): для заданного набора $m \times m$ -матриц $\{s_i\}_{i=0}^{2n}$ описать все $m \times m$ -матричные меры $d\Sigma(\lambda) \geq 0$, для которых $s_i = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^i d\Sigma(\lambda)$, $i = 0, \dots, 2n$.

Критерием разрешимости задачи H служит [3] положительная определенность блок-матрицы $K = \|s_{i+j}\|_{i,j=0}^n \geq 0$ (2.1).

В невырожденном случае ($K > 0$) матрица-функция ДЛП (1.1) $A(z)$ представляется [1] в виде

$$A(z) = I - iz \begin{bmatrix} M^*(\bar{z}) \\ -u^*(\bar{z}) \end{bmatrix} K^{-1} [M(0), -u(0)] J, \quad (2.2)$$

$$\text{где } M^*(\bar{z}) = \begin{bmatrix} 0, s_0, \dots, \sum_{i=0}^{n-1} s_i z^{n-i-1} \end{bmatrix}, \quad u^*(\bar{z}) = [I, zI, \dots, z^n I], \quad (2.3)$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & iI_m \\ -iI_m & 0 \end{bmatrix}.$$

Представление (2.2) невозможно, если K вырождена. В этом случае используем аналог пошагового процесса Шура, описанного в работе [1]. Полагая $s_i^{(0)} = s_i$ ($i = 0, \dots, 2n$), рекуррентно строим матрицы $s_i^{(k)}$ ($k = 1, \dots, 2n$; $i = 0, \dots, 2n - 2k$) по приведенному ниже правилу.

1) Если $\det s_0^{(k)} \neq 0$, то полагаем

$$\|s_{i+j}^{(k+1)}\|_{i,j=0}^{n-k-1} = T_k W_k T_k^*, \quad (2.4)$$

где

$$W_k = \|s_{i+j}^{(k)}\|_{i,j=1}^{n-k} - \begin{bmatrix} s_1^{(k)} \\ \vdots \\ s_{n-k}^{(k)} \end{bmatrix} s_0^{(k)-1} [s_1^{(k)}, \dots, s_{n-k}^{(k)}]; \quad (2.5)$$

$$T_k^{-1} = \begin{bmatrix} s_0^{(k)} & & & \\ s_1^{(k)} & & & \\ \vdots & & 0 & \\ s_{n-k-1}^{(k)} & \vdots & s_1^{(k)} & s_0^{(k)} \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Непосредственно проверяется, что блок-матрица $T_k W_k T_k^*$ сохраняет структуру блок-матрицы K , чем оправдывается представление (2.4). На этом факте и основывается пошаговый процесс.

Положительная определенность блок-матрицы

$$\|s_{i+j}^{(k)}\|_{i,j=0}^{n-k} > 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (2.7)$$

следует немедленно из (2.1), (2.5) и леммы о неотрицательной блок-матрице [4].

2) Если $\det s_0^{(k)} = 0$, то из (2.7) следует существование унитарной матрицы U_k такой, что

$$U_k s_i^{(k)} U_k^* = \begin{bmatrix} \hat{s}_i^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad i = 0, \dots, 2n - 2k; \quad \hat{s}_0^{(k)} > 0. \quad (2.8)$$

В этом случае полагаем

$$\|s_{i+j}^{(k+1)}\|_{i,j=0}^{n-k-1} = \hat{T}_k \hat{W}_k \hat{T}_k^*,$$

где блок-матрицы \hat{T}_k, \hat{W}_k определяются матрицами $\hat{s}_i^{(k)}$, так же, как T_k, W_k — матрицами $s_i^{(k)}$ по формулам (2.5), (2.6).

Пологая $v(k) = \sum_{j=0}^{k-1} \text{def} s_0^{(j)}$, свяжем с матрицами $s_i^{(k)}$ матрицы-функции

$$A_k(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -I_{m-v(k)} & 0 \\ 0 & I_{v(k)} & 0 & 0 \\ I_{m-v(k)} & 0 & z s_0^{(k)-1} - s_0^{(k)-1} s_1^{(k)} s_0^{(k)-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{v(k)} \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

если $\det s_0^{(k)} \neq 0$, или

$$A_k(z) = \begin{bmatrix} U_k^* & \\ & I_{v(k)} \\ & & U_k^* \\ & & & I_{v(k)} \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & -I_{m-v(k+1)} & 0 \\ 0 & I_{v(k+1)} & 0 & 0 \\ I_{m-v(k+1)} & 0 & z \hat{s}_0^{(k)-1} - \hat{s}_0^{(k)-1} \hat{s}_1^{(k)} \hat{s}_0^{(k)-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{v(k+1)} \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

если $\det s_0^{(k)} = 0$. При этом матрица U_k определена соотношением (2.8).

Теперь можем уточнить теорему 1.1.

Матрица-функция ДЛП (1.2) имеет вид

$$A(z) = \prod_{i=0}^n A_i(z), \quad (2.11)$$

где $A_k(z)$ определены формулами (2.9), (2.10); $\{p(z), q(z)\}$ — произвольная неванлинновская пара размера $(m - v(n)) \times (m - v(n))$.

Независимыми параметрами в (1.2) являются классы эквивалентности неванлинновских пар: различные пары приводят к одной и той же мере $d\Sigma(\lambda)$ тогда и только тогда, когда они эквивалентны.

Заметим, что в невырожденной ситуации (т.е. $v(n) = 0$) формула (2.11) дает разложение J -элементарного кратного множителя $A(z)$ из (2.2) в произведение Бляшке—Потапова двучленных элементарных множителей полного ранга.

3. Проблема моментов Стильтеса (S): для заданного набора $m \times m$ -матриц $\{s_i\}_{i=0}^{2n+1}$ описать все $m \times m$ -матричные меры $d\Sigma(\lambda) \geq 0$, для которых

$$s_i = \int_0^\infty \lambda^i d \Sigma(\lambda) \quad (i = 0, \dots, 2n); \quad s_{2n+1} \geq \int_0^\infty \lambda^{2n+1} d \Sigma(\lambda).$$

Критерий разрешимости задачи S — положительная определенность [5] блок-матриц $K_0 = \|s_{i+j}\|_{i,j=0}^n \geq 0$, $K_1 = \|s_{i+j+1}\|_{i,j=0}^n \geq 0$ (3.1).

В невырожденной ситуации ($K_0 > 0$, $K_1 > 0$) задача S решена [2]. В этом случае матрица-функция ДЛП (1.2) $A(z)$ записывается в групповой форме:

$$A(z) = I - i \begin{bmatrix} zM^*(\bar{z}) & zM^*(\bar{z}) + R^* \\ -zu^*(\bar{z}) & -zu^*(\bar{z}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_0^{-1} & \\ & K_1^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -u(0) \\ R & 0 \end{bmatrix} J,$$

где $M(z)$, $u(z)$ определены формулами (2.3), а $R^* = [s_0, \dots, s_n]$. Вырожденный случай задачи S разнообразнее, чем в задаче H , так как множество решений зависит от характера вырождения уже двух блок-матриц K_0 и K_1 . Впрочем, и здесь применим пошаговый процесс. По данным задачи рекуррентно строим матрицы $s_i^{(k)}$ ($k = 0, \dots, n$; $i = 0, \dots, 2n - 2k + 1$), полагая, как и в п.2, $s_i^{(0)} = s_i$ ($i = 0, \dots, 2n + 1$). При этом в зависимости от характера вырождения K_0 и K_1 приходится различать три случая.

1) Если $\det s_0^{(k)} \neq 0$, $\det s_1^{(k)} \neq 0$, то полагаем

$$\|s_{i+j}^{(k+1)}\|_{i,j=0}^{n-k-1} = R_k W_k R_k^*; \quad (3.2)$$

$$\|s_{i+j+1}^{(k+1)}\|_{i,j=0}^{n-k-1} = R_k V_k R_k^*, \quad (3.3)$$

где

$$V_k = \|s_{i+j+1}^{(k)}\|_{i,j=1}^{n-k} - \begin{bmatrix} s_2^{(k)} \\ \vdots \\ s_{n-k+1}^{(k)} \end{bmatrix} s_1^{(k)-1} [s_2^{(k)}, \dots, s_{n-k+1}^{(k)}]; \quad (3.4)$$

$$R_k^{-1} = \begin{bmatrix} s_1^{(k)} & s_0^{(k)-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_2^{(k)} & s_0^{(k)-1} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n-k}^{(k)} & s_0^{(k)-1} & \cdot & \cdot & s_2^{(k)} & s_0^{(k)-1} \\ & & \cdot & \cdot & s_1^{(k)} & s_0^{(k)-1} \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

а W_k определяется соотношением (2.5).

Непосредственная проверка показывает, что блок-матрицы $R_k \hat{W}_k R_k^*$ и $R_k \hat{V}_k R_k^*$ сохраняют структуру соответственно моментных матриц K_0 и K_1 . Этот факт делает правомерными представления (3.2), (3.3) и обосновывает возможность пошагового процесса.

Из (2.5), (3.1) — (3.4) по лемме о неотрицательной блок-матрице получаем

$$\|s_{i+j}^{(k)}\|_{i,j=0}^{n-k} \geq 0, \|s_{i+j+1}^{(k)}\|_{i,j=0}^{n-k-1} \geq 0, k = 0, \dots, n. \quad (3.6)$$

2) Если $\text{def } s_0^{(k)} = \text{def } s_1^{(k)} \geq 1$, то в виду (3.6) существует унитарная матрица U_k такая, что

$$U_k s_i^{(k)} U_k^* = \begin{bmatrix} \hat{s}_i^{(k)} & 0 \\ 0 & \end{bmatrix} (i = 0, \dots, 2n - 2k + 1); \quad \hat{s}_0^{(k)} > 0, \hat{s}_1^{(k)} > 0.$$

В этом случае полагаем

$$\|s_{i+j}^{(k+1)}\|_{i,j=0}^{n-k-1} = \hat{R}_k \hat{W}_k \hat{R}_k^*, \quad \|s_{i+j+1}^{(k+1)}\|_{i,j=0}^{n-k-2} = \hat{R}_k \hat{V}_k \hat{R}_k^*,$$

где блок-матрицы $\hat{R}_k, \hat{W}_k, \hat{V}_k$ определяются матрицами $\hat{s}_i^{(k)}$ так же, как R_k, W_k, V_k — матрицами $s_i^{(k)}$ в формулах (2.5), (3.4), (3.5).

3) Если $\eta = \text{def } s_i^{(k)} > \text{def } s_0^{(k)} = \mu$, то при надлежащем выборе унитарной матрицы U_k имеем

$$U_k s_0^{(k)} U_k^* = \begin{bmatrix} \tilde{s}_0^{(k)} & 0 \\ 0 & 0_\mu \end{bmatrix}, \quad \tilde{s}_0^{(k)} > 0;$$

$$U_k s_i^{(k)} U_k^* = \begin{bmatrix} \hat{s}_i^{(k)} & 0 \\ 0 & 0_\eta \end{bmatrix} (i = 1, \dots, 2n - 2k + 1) \quad \hat{s}_1^{(k)} > 0.$$

$$\text{Пусть } \tilde{s}_0^{(k)} = \begin{bmatrix} a_k^* & b_k^* \\ b_k^* & c_k^* \end{bmatrix}, \quad \tilde{s}_0^{(k)} = a_k - b_k c_k^{-1} b_k^* (rg \tilde{s}_0^{(k)} = rg \hat{s}_1^{(k)}).$$

Тогда

$$\|s_{i+j}^{(k+1)}\|_{i,j=0}^{n-k-1} = \hat{Q}_k \hat{W}_k \hat{Q}_k^*, \quad \|s_{i+j+1}^{(k+1)}\|_{i,j=0}^{n-k-2} = \hat{Q}_k \hat{V}_k \hat{Q}_k^*,$$

где

$$\hat{Q}_k^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{s}_1^{(k)} & & & \\ \hat{s}_2^{(k)} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \hat{s}_{n-k}^{(k)} & \dots & \dots & \hat{s}_2^{(k)} \hat{s}_1^{(k)} \end{bmatrix},$$

а \hat{W}_k, \hat{V}_k определяются так же, как и в случае 2.

Полагая $v(k) = \sum_{j=0}^{k-1} \text{def } s_1^{(j)}$, свяжем с каждым из перечисленных случаев матрицу-функцию

$$1) A_k(z) = \left[\begin{array}{c|c} I_m & \begin{bmatrix} s_0^{(k)} s_1^{(k)-1} s_0^{(k)} & 0 \\ 0 & 0_{v(k)} \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} -z s_0^{(k)-1} & 0 \\ 0 & 0_{v(k)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} I - z s_1^{(k)-1} s_0^{(k)} & 0 \\ 0 & I_{v(k)} \end{bmatrix} \end{array} \right] \quad (3.7)$$

$$(\text{def } s_0 = \text{def } s_1^{(k)} = 0);$$

$$2) A_k(z) = \begin{bmatrix} U_k^* & \\ & I_{v(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_k^* \\ I_{v(k)} \end{bmatrix} \times \left[\begin{array}{c|c|c} I_m & \begin{bmatrix} \hat{s}_0^{(k)} & \hat{s}_1^{(k)} - 1 & \hat{s}_0^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} -z\hat{s}_0^{(k)} - 1 & 0 \\ 0 & 0_{v(k+1)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} I - z\hat{s}_1^{(k)} - 1 & \hat{s}_0^{(k)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ I_{v(k+1)} \end{bmatrix} \end{array} \right] \quad (3.8)$$

$$(\text{def } s_0^{(k)} = \text{def } s_1^{(k)} \geq 1);$$

$$3) A_k(z) = \begin{bmatrix} U_k^* & \\ & I_{v(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_k^* \\ I_{v(k)} \end{bmatrix} \times \left[\begin{array}{c|c|c} \begin{bmatrix} \hat{s}_0^{(k)} & 0 \\ 0 & I_{\eta(k)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \hat{s}_0^{(k)} & \hat{s}_1^{(k)} - 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} -zI & 0 \\ 0 & 0_{\eta(k)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \hat{s}_0^{(k)} - z & \hat{s}_1^{(k)} - 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ I_{\eta(k)} \end{bmatrix} \end{array} \right] \quad (3.9)$$

$$(\text{def } s_1^{(k)} > \text{def } s_0^{(k)} = \mu(k), \eta(k) = v(k) + \mu(k)).$$

Пусть, наконец, $k_1 < k_2 \dots < k_r$ — все такие числа, для которых $\text{def } s_1^{(k_i)} > 0$ ($i = 1, \dots, r$).

Теорема. Множество всех решений задачи S параметризуется посредством ДЛП (1.2), где

$$A(z) = \|a_{ij}(z)\|_{i,j=1}^2 = \prod_{k=0}^n A_k(z);$$

$A_k(z)$ — м.-ф., определенные формулами (3.7) — (3.9);

$$p(z) = \begin{bmatrix} \hat{p}(z) & & \\ & \delta_r & 0 \\ & & \ddots \\ 0 & & & \delta_1 \end{bmatrix}, \quad q(z) = \begin{bmatrix} \hat{q}(z) & & \\ & \gamma_r & 0 \\ & & \ddots \\ 0 & & & \gamma_1 \end{bmatrix}; \quad (3.10)$$

$\{\hat{p}(z), \hat{q}(z)\}$ — произвольная стильесовская пара м.-ф. размера $(m - v(n)) \times (m - v(n))$;

$$\delta_i = \begin{cases} 0_{\mu(i)}, & \text{если } \text{def } s_0^{(k_i)} = \text{def } s_1^{(k_i)} = \mu(i); \\ \begin{bmatrix} I_{\alpha(i)} \\ 0_{\beta(i)} \end{bmatrix}, & \text{если } \text{def } s_1^{(k_i)} = \alpha(i) + \beta(i) > \beta(i) = \text{def } s_0^{(k_i)}; \end{cases}$$

Независимыми параметрами в ДЛП (1.2) являются классы эквивалентности стилтесовских пар м.-ф. размера $(m - \nu(n)) \times (m - \nu(n))$.

После обрамления м.-ф. $p(z)$, $q(z)$ из (3.10) матрицей подстановки $U = \begin{bmatrix} I_{m-\nu(n)} & \\ & V \end{bmatrix}$, где

$$V \begin{bmatrix} \delta_r & & \\ & \ddots & \\ & & \delta_1 \end{bmatrix} V^* = \begin{bmatrix} 0 & \\ & 1 \end{bmatrix}; \quad V \begin{bmatrix} \gamma_r & \\ & \gamma_1 \end{bmatrix} V^* = \begin{bmatrix} I & \\ & 0 \end{bmatrix},$$

приходим к теореме 1.2

Процесс, описанный в п. 3, применяется и для случая бесконечного числа моментов $\{s_i\}_{i=0}^{\infty}$. При этом, начиная с некоторого шага, размерность параметров ДЛП (1.2) стабилизируется. В частности, если эта размерность становится нулевой, то параметром ДЛП является унитарная матрица, и задача S имеет единственное решение.

Список литературы: 1. Ковалишина И. В. Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1981. — 279, № 6. — С. 25—80. 2. Дюкарев Ю. Н. Матричная проблема моментов Стилтеса. — М., 1981. — 37 с. Деп. в ВИНТИ 22.03.81, № 2628. 3. Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов. — М.: Физматгиз, 1961. — 310 с. 4. Ефимов А. В., Попов В. П. J-растягивающие матрицы-функции и их роль в аналитической теории электрических цепей // Успехи мат. наук. — 1973. — 28. — № 1. — С. 65—130. 5. Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1973. — 551 с.

Поступила в редколлегию 21.03.86

УДК 517.53

А. А. ГОЛЬДБЕРГ, О. П. СОКОЛОВСКАЯ

О РОСТЕ ПО ЛУЧУ СУБГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ С МАССОЙ, РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НА ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ПОЛУОСИ

Пусть $U(z)$ — субгармоническая в S функция с массой Рисса μ , распределенной на отрицательной полуоси без некоторой окрестности нуля. Не уменьшая общности, будем считать дополнительно, что $U(0) = 0$. Считаем известными основные понятия и стандартные обозначения теории субгармонических функций [1]. Отметим лишь обозначение $A(r, U) = \inf \{U(z) : |z| = r\}$, ρ и λ — порядок и нижний порядок функции U . Для измеримого множества $E \subset \mathbb{R}_+$ верхняя и нижняя логарифмическая плотность $\bar{\Lambda}(E)$ и $\underline{\Lambda}(E)$ определяются соответственно как верхний и нижний пределы при $r \rightarrow \infty$ выражения $(\ln r)^{-1} \int_E d \ln t$.

Обозначим $\alpha(\sigma) = (\pi\sigma)^{-1} \sin \pi\sigma$.

Для $0 < \sigma < 1$, $|\theta| \leq \pi$, определим следующие подмножества R_+ :

$$\begin{aligned} E_1(\sigma, U) &= \{r : U(re^{i\theta}) - \cos \theta \sigma B(r, U) > 0\}; \\ E_2(\sigma, U) &= \{r : \cos \theta \sigma A(r, U) - \cos \pi \sigma U(re^{i\theta}) > 0\}; \\ E_3(\sigma, U) &= \{r : \cos \theta \sigma N(r, U) - \alpha(\sigma) U(re^{i\theta}) > 0\}. \end{aligned}$$

Здесь будут доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Если $\rho < \sigma < 1$, $|\theta| \leq \pi$, то ($i = 1$)

$$\underline{\Lambda}(E_i(\sigma, U)) \geq 1 - \rho/\sigma. \quad (1)$$

Если $\lambda < \sigma < 1$, $|\theta| \leq \pi$, то ($i = 1$)

$$\bar{\Lambda}(E_i(\sigma, U)) \geq 1 - \lambda/\sigma. \quad (2)$$

Теорема 2. Если $\rho < \sigma < 1/2$, $|\theta| \leq \pi$, то (1) выполняется при $i = 2$. Если $\lambda < \sigma < 1/2$, $|\theta| \leq \pi$, то (2) выполняется при $i = 2$.

Прежде чем сформулировать следующую теорему, приведем такие леммы. Обозначим $\beta(x, \theta) = |1 - xe^{i\theta}|^2 = 1 - 2x \cos \theta + x^2$.

Лемма 1. Пусть $F_\sigma(\theta) = \int_0^1 (\cos \theta - t) t^{-\sigma} / \beta(t, \theta) dt$, $0 \leq \sigma < 1$,

$\pi/3 \leq \theta < \pi/2$. Уравнение $F_\sigma(\theta) = 0$ (3) имеет единственный корень θ_σ , причем $\theta_0 = \pi/3$, θ_σ — непрерывная возрастающая функция от $\sigma \in [0, 1)$ и $\theta_\sigma \rightarrow \pi/2$ при $\sigma \rightarrow 1$.

Лемма 2. Пусть $0 < \sigma \leq 1$, $\theta'_\sigma = \pi - \sigma^{-1} \arccos \alpha(\sigma)$. Тогда θ'_σ — непрерывная возрастающая функция от $\sigma \in (0, 1]$, причем $\theta'_0 = \theta_{0+} = \pi(1 - 1/\sqrt{3})$, $\theta'_1 = \pi/2$.

Лемма 3. Пусть $0 < \sigma < 1$, θ_σ и θ'_σ определены соответственно в леммах 1 и 2. Тогда $\theta'_\sigma > \theta_\sigma$ (4).

Чтобы не прерывать изложения, доказательство этих лемм будет приведено в пункте 3°.

Теорема 3. Если $\rho < \sigma < 1$, $|\theta| \leq \pi/2$, то (1) выполняется при $i = 3$. Если $\lambda < \sigma < 1$, $|\theta| \leq \pi/2$, то (2) выполняется при $i = 3$. Если $\rho < \sigma < 1$, $|\theta - \pi| \leq \theta_\sigma$, то

$$\bar{\Lambda}(E_3(\sigma, U)) \leq \rho/\sigma. \quad (5)$$

Если $\lambda < \sigma < 1$, $|\theta - \pi| \leq \theta_\sigma$, то

$$\underline{\Lambda}(E_3(\sigma, U)) \leq \lambda/\sigma. \quad (6)$$

Из [2] следует, что при $\rho < \sigma < 1$ множество $E_1(\sigma, U)$ и при $\rho < \sigma < 1/2$ множество $E_2(\sigma, U)$ неограниченные. Из [3] следует, что при $\rho < \sigma < 1$ множество $E_3(\sigma, U)$ при $|\theta| \leq \pi/2$ неограниченное.

Соотношение (1) при $i = 3$, вообще говоря, неверно при $\pi/2 < |\theta| \leq \pi$, так как для такого θ и σ , достаточно близкого к 1, выполняется $|\theta - \pi| \leq \theta_\sigma$, а значит, справедливо (5), что возможно лишь при $\sigma < 2\rho$. Аналогично рассуждаем относительно (2) при $i = 3$. Вероятно, ограничение $|\theta - \pi| \leq \theta_\sigma$, при котором доказаны (5), (6), может быть ослаблено, однако при $\theta = \pi/2$ эти соотношения могут быть неверны при любых ρ, λ, σ . Рассмотрим субгармоническую в C

функцию $U(re^{i\theta}) = r^\rho \cos \rho \theta$, $|\theta| \leq \pi$, $0 < \rho < 1$. Для нее $N(r) = r^\rho \alpha(\rho)$, $A(r) = r^\rho \cos \rho \pi$, $B(r) = r^\rho$. Масса Рисса для U распределена на отрицательной полуоси; можно добиться того, чтобы при $|z| < 1$ функция $U(z)$ была гармонической, заменив ее в круге гармонической мажорантой. Для наших целей это не имеет значения, и для простоты записей мы сейчас не будем изменять определение U в $\{z: |z| \leq 1\}$. Для нашей функции U имеем $\lambda = \rho < \sigma < 1$, $\cos(\pi\sigma/2) \times \times N(r) - \alpha(\sigma)U(ir) = r^\rho \{\cos(\pi\sigma/2)\alpha(\rho) - \cos(\pi\rho/2)\alpha(\sigma)\} > 0$ для всех r , т. е. $\Delta(E_\sigma(\sigma, U)) = \bar{\Delta}(E_\sigma(\sigma, U)) = 1$. Используя результат Хеймана [4], можно показать (ср. [5]), что неравенства (1), (2), (5), (6) во всех трех теоремах не могут быть уточнены.

1°. Введем вспомогательные функции ($|\theta| \leq \pi$, $0 < \sigma < 1$):

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= \ln|1 + xe^{i\theta}| - \cos \pi\sigma \ln(1 + x); \\ \psi_2(x) &= \cos \theta \sigma \ln|1 - x| - \cos \pi\sigma \ln|1 + xe^{i\theta}|; \\ \psi_3(x) &= \cos \theta \sigma \ln^+ x - \alpha(\sigma) \ln|1 + xe^{i\theta}|; \\ \psi_4(x) &= \ln|1 - xe^{i\theta}| - \cos \sigma(\pi - |\theta|) \{\alpha(\sigma)\}^{-1} \ln^+ x.\end{aligned}$$

Заметим, что функции ψ_i ($1 \leq i \leq 3$) удовлетворяют условиям леммы 1 из [5] или [6], а значит, $\Phi_i'(r) \geq 0$ ($1 \leq i \leq 3$) при $r \in (0, \infty) \setminus \{1\}$,

где $\Phi_i(r) = r^\sigma \int_r^\infty \psi_i(t) t^{-1-\sigma} dt$.

Докажем две леммы.

Лемма 4. Пусть $0 < \sigma < 1$, $|\theta| \leq \theta_\sigma$, где θ_σ , $0 < \theta_\sigma < \pi/2$, — корень уравнения (3). Тогда $\Phi_4'(r) \geq 0$, $r \in (0, \infty)$.

Доказательство. Очевидно, можно ограничиться случаем, когда $0 \leq \theta < \pi/2$. Заметим сразу, что $\psi_4(r) = o(r^\sigma)$ при $r \rightarrow \infty$, $r \rightarrow 0$,

$0 < \sigma < 1$, интеграл $\int_0^\infty \psi_4(t) t^{-1-\sigma} dt$ сходится и равен нулю. Исследо-

вание знака производной функции $\psi_4(r)$ показывает, что $\psi_4'(r) < 0$ при $r \in (0, \cos \theta)$; $\psi_4'(r) > 0$ при $r \in (\cos \theta, 1)$, а при $r \in (1, \infty)$ имеем $\operatorname{sgn} \psi_4'(r) = \operatorname{sgn} g(r)$, где $g(r) = (1 - (\cos \varphi)/\alpha(\sigma))r^2 + \cos \theta (2(\cos \varphi)/\alpha(\sigma) - 1)r - (\cos \varphi)/\alpha(\sigma)$, $\varphi = \sigma(\pi - \theta)$. Пусть $(\cos \varphi)/\alpha(\sigma) < 1$, т. е. $0 \leq \theta < \theta_\sigma$ (7). Тогда $D = 1 - \sin^2 \theta (2(\cos \varphi)/\alpha(\sigma) - 1)^2 \geq 1 - \sin^2 \theta > 0$. Легко видеть, что меньший корень $g(r)$ отрицательный. Если больший корень $r_0 < 1$, то $g(r) > 0$ при $r > 1$. Тогда $\psi_4'(r) < 0$ при $r \in (0, \cos \theta)$ и $\psi_4'(r) > 0$ при $r \in (\cos \theta, \infty)$. Пусть $\Psi_4(r) = r^{1-\sigma} \times$

$$\times \Phi_4'(r) = \sigma \int_r^\infty \psi_4(t) t^{-1-\sigma} dt - \psi_4(r) r^{-\sigma}.$$

Учитывая, что $\Psi_4'(r) =$

$= -\psi_4'(r) r^{-\sigma}$, $\Psi_4(0) = \Psi_4(\infty) = 0$, получим $\Phi_4(r) = r^{\sigma-1} \Psi_4(r) > 0$ при $0 < r < \infty$. Если же $r_0 > 1$, то $\psi_4'(r) < 0$ при $r \in (0, \cos \theta) \cup (1, r_0)$ и $\psi_4'(r) > 0$ при $r \in (\cos \theta, 1) \cup (r_0, \infty)$. Чтобы показать, что $\Psi_4(r) \geq 0$ при $r \in (0, \infty)$, а значит, и $\Phi_4'(r) \geq 0$ при $0 < r < \infty$, достаточно пока-

зать, что $\Psi_4(1) \geq 0$. Запишем $\Psi_4(1) = \sigma \int_1^\infty \{\ln|1 - te^{i\theta}| - (\cos \varphi)/\alpha(\sigma) \times$

$\times \ln^+ t \} t^{-1-\sigma} dt - \ln |1 - e^{i\theta}| = -\sigma \int_0^1 \ln |1 - te^{i\theta}| t^{-1-\sigma} dt - \ln |1 - e^{i\theta}| =$
 $= F_\sigma(\theta)$, где $F_\sigma(\theta)$ определено в лемме 1. Если $|1 - e^{i\theta}| \leq 1$, $|1 - re^{i\theta}| \leq 1$, $r < 1$, то $\Psi_4(1) \geq 0$. Неравенство $|1 - e^{i\theta}| \leq 1$ выполняется при $|\theta| \leq \pi/3$. Если $|\theta| \leq \pi/3$ и $r < 1$, то $\beta(r, \theta) \leq 1 - r + r^2 < 1$. Поэтому при $|\theta| \leq \pi/3$ имеем $\Psi_4(1) > 0$. Так как $\Psi_4(1) = F_\sigma(\theta)$, то $\Psi_4(1) \geq 0$ при $0 < \theta \leq \theta_\sigma$. Из (7) и леммы 3 следует утверждение леммы 4.

Лемма 5. Пусть $0 < \xi < R < \infty$;

$$H_R(\xi) = \int_0^R \ln(1 + \xi/r) dn(r); \quad \alpha_R(z) = \int_0^R \ln|1 + z/r| dn(r).$$

При $0 < \sigma < 1$, $|\theta| \leq \pi$ справедливо неравенство

$$c_{11} \xi^{-\sigma} H_R(\xi) \leq \int_{\pi}^{\infty} \{ \alpha_R(re^{i\theta}) - \cos \theta \sigma B(r, \alpha_R) \} r^{-1-\sigma} dr \leq \\ \leq c_{21} \xi^{-\sigma} H_R(\xi).$$

При $0 < \sigma < 1/2$, $|\theta| \leq \pi$ справедливо неравенство

$$c_{12} \xi^{-\sigma} H_R(\xi) \leq \int_{\pi}^{\infty} \{ \cos \theta \sigma A(r, \alpha_R) - \cos \pi \sigma \alpha_R(re^{i\theta}) \} r^{-1-\sigma} dr \leq \\ \leq c_{22} \xi^{-\sigma} H_R(\xi).$$

При $0 < \sigma < 1$, $|\theta| \leq \pi/2$ справедливо неравенство

$$c_{13} \xi^{-\sigma} H_R(\xi) \leq \int_{\pi}^{\infty} \{ \cos \theta \sigma N_R(r) - \alpha(\sigma) \alpha_R(re^{i\theta}) \} r^{-1-\sigma} dr \leq \\ \leq c_{23} \xi^{-\sigma} H_R(\xi),$$

где $N_R(r) = \int_0^r n_R(t) t^{-1} dt$, $n_R(r) = n(r)$ при $0 \leq r < R$ и $n_R(r) = n(R)$

при $R \leq r < \infty$, c_{1j} , c_{2j} ($1 \leq j \leq 3$) — постоянные, зависящие лишь от σ .

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 3 из [5] или доказательству леммы 2 из [6].

2°. Доказательства теорем 1—3 дословно повторяют доказательство теоремы 1 в [5, 6]. Новые моменты возникают лишь при доказательстве (5), (6). По техническим соображениям в этом случае удобнее повернуть плоскость и считать, что массы Рисса распределены на положительной полуоси и $|\theta| \leq \theta_\sigma$. Введем $E_4(\sigma, U) = R_+ \setminus E_3(\sigma, U) = \{r : U(re^{i\theta}) - \{\alpha(\sigma)\}^{-1} \cos \sigma (\pi - |\theta|) N(r) > 0\}$. Тогда (5) и (6) равносильны соответственно неравенствам (1) и (2) для $i = 4$, которые доказываются, как (1) и (2) для $i = 1, 2, 3$, лишь вместо леммы 3 из [5] или леммы 2 из [6], используем лемму 5 из настоящей статьи.

Этим же методом можно доказать и следующие теоремы.

Пусть $U(z) = \int_0^\infty \{ \ln |1 + z/t| + \operatorname{Re}(-z/t + z^2/(2t^2) - \dots + (-1)^p \times$
 $\times z^p/(p!t^p) \} dn(t)$ — канонический интеграл рода p для субгармонической функции. Для U , $p < \sigma < p+1$ и θ ($|\theta| \leq \pi$) определим множества:

$$E_\theta(\sigma, U) = \{r: U(re^{i\theta}) - \pi \cos \theta \sigma \operatorname{cosec} \pi \sigma N(r) > 0\};$$

$$E_\theta(\sigma, U) = \{r: U(-r) - \pi \sigma \operatorname{ctg} \pi \sigma N(r) > 0\}.$$

Теорема 4. Если $p < \sigma < p+1$ и θ , $|\theta| \leq \pi$, удовлетворяет условию

$$\cos\left(p + \frac{1+(-1)^p}{2}\right)\theta < 0, \quad \cos\left(p + \frac{1-(-1)^p}{2}\right)\theta > 0, \quad (8)$$

$$\cos(n + 1/2)\theta \cos \theta \sigma \leq 0.$$

то (1) справедливо при $i=5$. Если $p < \lambda < \sigma < p+1$ и θ удовлетворяет (8), то (2) справедливо при $i=5$.

Теорема 5. Если $p + 1/2 < \rho < \sigma < p+1$, то (1) выполняется при $i=6$. Если $p + 1/2 < \lambda < \sigma < p+1$, то (2) выполняется при $i=6$.

Соотношения (1) и (2) для $i=6$ останутся справедливыми соответственно при $p < \rho < \sigma < p+1/2$ и $p < \lambda < \sigma < p+1/2$, если $\pi \sigma \operatorname{ctg} \pi \sigma \leq (p+1)^{p+1} p^{-p}$.

3°. Доказательство леммы 1.

Из известных теорем анализа следует, что $F_\sigma(\theta)$ — непрерывная функция от $(\theta, \sigma) \in (0, \pi/2) \times [0, 1]$ и имеет непрерывные частные производные. Покажем монотонность θ_σ как функции от $\sigma \in [0, 1]$. Так

как $\frac{\partial}{\partial \theta} F_\sigma(\theta) = - \int_0^1 (1-t^2) t^{-\sigma} \sin \theta / \beta^2(t, \theta) dt < 0$, то $F_\sigma(\theta)$ — убыва-

ющая функция по $\theta \in (0, \pi/2]$. Очевидно, $F_\sigma(\theta) \rightarrow +\infty$ при $\theta \rightarrow 0+$, $F_\sigma(\pi/2) < 0$. Поэтому существует единственный корень θ_σ на $(0, \pi/2)$ уравнения (3). В то же время, поскольку $F_\sigma(\theta_\sigma) = 0$, то

$$\int_0^{\cos \theta_\sigma} t^{-\sigma} (\cos \theta_\sigma - t) / \beta(t, \theta_\sigma) dt = \int_{\cos \theta_\sigma}^1 t^{-\sigma} (t - \cos \theta_\sigma) / \beta(t, \theta_\sigma) dt. \quad (9)$$

Пусть $\theta_\sigma = \theta^*$, тогда $\frac{\partial}{\partial \sigma} F_\sigma(\theta^*) = \int_0^{\cos \theta^*} t^{-\sigma} |\ln t| (\cos \theta^* -$

$$- t) / \beta(t, \theta^*) dt - \int_{\cos \theta^*}^1 t^{-\sigma} |\ln t| (t - \cos \theta^*) / \beta(t, \theta^*) dt >$$

$$> |\ln \cos \theta^*| \left\{ \int_0^{\cos \theta^*} t^{-\sigma} (\cos \theta^* - t) / \beta(t, \theta^*) dt - \right.$$

$$\left. - \int_{\cos \theta^*}^1 t^{-\sigma} (t - \cos \theta^*) / \beta(t, \theta^*) dt \right\} = 0 \quad \text{в силу (9).}$$

Таким образом, $\frac{\partial}{\partial \sigma} F_{\sigma}(\theta^*) > 0$. Значит,

$$\frac{d\theta_{\sigma}}{d\sigma} = - \left(\frac{\partial}{\partial \sigma} F_{\sigma}(\theta^*) \right) / \left(\frac{\partial}{\partial \theta} F_{\sigma}(\theta^*) \right) > 0,$$

откуда следует, что θ_{σ} монотонно возрастает при росте σ . Так как $F_0(\theta) = -\ln\left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right)$, то $\theta_0 = \pi/3$. Следовательно, при $\sigma > 0$ выполняется $\theta_{\sigma} > \pi/3$ (это видно также из того, что при $|\theta| \leq \pi/3$, $\sigma > 0$ верно $F_{\sigma}(\theta) > 0$, как отмечалось при доказательстве леммы 5). При

$$\begin{aligned} \sigma \rightarrow 1 - \cos \theta_{\sigma} &= \left(\int_0^1 t^{1-\sigma/\beta}(t, \theta_{\sigma}) dt \right) \left(\int_0^1 t^{-\sigma/\beta}(t, \theta_{\sigma}) dt \right)^{-1} \leq \\ &\leq \left(\int_0^1 t^{1-\sigma} (1-t+t^2)^{-1} dt \right) \left(\frac{1}{2} \int_0^1 t^{-\sigma} dt \right)^{-1} = \\ &= 2(1-\sigma) \int_0^1 t^{1-\sigma} (1-t+t^2)^{-1} dt \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Откуда следует, что $\theta_{\sigma} \rightarrow \pi/2$ при $\sigma \rightarrow 1$.

Доказательство леммы 2.

Покажем, что θ'_{σ} — монотонно возрастающая функция от σ . Обозначим $x = \pi\sigma$. Тогда $x \in (0, \pi]$, $\theta'_{\sigma} = \pi - \sigma^{-1} \arccos \alpha(\sigma) = \pi - (\pi/x) \times \arccos(x^{-1} \sin x) = \pi(1 - f(x))$ (10).

Функция $f(x)$ — монотонно убывающая, так как $f'(x) < 0$ при $x \in (0, \pi)$. Действительно, $f'(x) = -x^{-2} \{ \arccos(x^{-1} \sin x) + (1 - x^{-2} \sin^2 x)^{-1/2} \times x^{-1} (x \cos x - \sin x) \} < 0$, поскольку

$$\varphi(x) = \arccos(x^{-1} \sin x) + (1 - x^{-2} \sin^2 x)^{-1/2} x^{-1} (x \cos x - \sin x) > 0.$$

Последнее неравенство следует из того, что $\varphi(0) = 0$ и $\varphi'(x) = -x^{-4} (1 - x^{-2} \sin^2 x)^{-3/2} G(x) > 0$, где $G(x) = x^4 \sin x + 2x^3 \cos x - 3x^2 \sin x + \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x < 0$. В самом деле, так как при $0 < x < \pi$ справедливы оценки: ($k = 1, 2, \dots$)

$$S_{2k}(x) < \sin x < S_{2k+1}(x); \quad C_{2k-1}(x) < \cos x < C_{2k}(x),$$

где $S_n(x) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} x^{2j-1} / (2j-1)!$, $C_n(x) = \sum_{j=0}^n (-1)^j x^{2j} / (2j)!$, то

$$\begin{aligned} G(x) &< x^4 S_3(x) + 2x^3 C_4(x) - 3x^2 S_4(x) + \frac{3}{4} S_5(x) - \\ &- \frac{1}{4} S_6(3x) = -x^9 \left\{ \frac{1}{135} - \left(\frac{1}{20160} + \frac{2187}{1971200} \right) x^2 \right\} < \\ &< -x^9 \left\{ \frac{1}{135} - \left(\frac{1}{20160} + \frac{2187}{1971200} \right) \pi^2/4 \right\} < 0 \text{ при } 0 < x < \pi/2. \end{aligned}$$

Когда же $\pi/2 \leq x < \pi$, то $G(x) = g(x) + \sin^3 x < g(x) + 1$, где $g(x) = x^4 \sin x + 2x^3 \cos x - 3x^2 \sin x$. Но $g(x) < -1$ при $\pi/2 \leq x < \pi$, так

как $g''(x) = -[(x^2 - 3/2)^2 + 15/4] \sin x + 6x^3 \cos x < 0$, следовательно, $g'(x) < g'(\pi/2) = \pi(\pi^2/4 - 3) < 0$, откуда при $\pi/2 \leq x < \pi$ получим $g(x) < g(\pi/2) = (\pi/2)^4 - 3(\pi/2)^2 < -1$.

Таким образом, θ'_σ , согласно (10), — монотонно возрастающая функция при $0 < \sigma < 1$. Кроме того, очевидно, что при $\sigma \rightarrow 1$, $\theta'_\sigma \rightarrow \pi/2$, а при $\sigma \rightarrow 0$ $\theta'_\sigma \rightarrow \pi(1 - 1/\sqrt{3})$.

Доказательство леммы 3.

Согласно леммам 1 и 2, $\theta'_0 = \pi(1 - 1/\sqrt{3})$, $\theta'_0 = \pi/3$, откуда $\theta'_0 > \theta_0$. При $\sigma \rightarrow 1$ и θ'_σ , и θ_σ стремятся к $\pi/2$. Покажем, что (4) верно при $0,95 \leq \sigma < 1$. Для этого найдем $\bar{\theta}'_\sigma$ и $\bar{\theta}_\sigma$ такие, что

$$\theta'_\sigma > \bar{\theta}'_\sigma > \bar{\theta}_\sigma > \theta_\sigma. \quad (11)$$

Оценим θ'_σ следующим образом:

$$\begin{aligned} \theta'_\sigma &= \pi - \sigma^{-1} \arccos \alpha(\sigma) = \pi - \sigma^{-1} (\pi/2 - \arcsin \alpha(\sigma)) > \\ &> \pi - \pi/(2\sigma) + \alpha(\sigma) = \frac{\pi}{2} - \frac{1-\sigma}{\sigma} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\sin(1-\sigma)\pi}{\pi\sigma} = \bar{\theta}'_\sigma. \end{aligned}$$

Тогда $(1-\sigma)^{-1} \cos \bar{\theta}'_\sigma = (1-\sigma)^{-1} \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{1-\sigma}{\sigma} - \frac{\sin(1-\sigma)\pi}{\pi\sigma} \right) < \frac{\pi}{2\sigma} - \frac{\alpha(1-\sigma)}{\sigma} < \frac{\pi}{2\sigma} - \frac{S_2(\pi(1-\sigma))}{\sigma\pi(1-\sigma)} = \pi/(2\sigma) - \sigma^{-1} + \sigma^{-1} \pi^2(1-\sigma)^2/6 < 0,60$ при $0,95 \leq \sigma < 1$ (12). Согласно условию леммы 1, θ_σ удовлетворяет уравнению (3) или, что то же самое,

$$\int_0^1 t^{1-\sigma} (\cos 2\theta - t \cos \theta) / \beta(t, \theta) dt + (1-\sigma)^{-1} \cos \theta = 0. \quad (13)$$

Тогда для θ_σ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} (1-\sigma)^{-1} \cos \theta_\sigma &> \int_0^1 t^{1-\sigma} (t \cos \theta_\sigma - \cos 2\theta_\sigma) (1-t^2) dt = \\ &= \frac{\cos \theta_\sigma}{3-\sigma} - \frac{\cos 2\theta_\sigma}{2-\sigma} - \frac{\cos \theta_\sigma}{5-\sigma} + \frac{\cos 2\theta_\sigma}{4-\sigma}. \end{aligned}$$

Обозначим $\cos \theta_\sigma$ через y . Тогда последнее неравенство примет вид $y^2 - py - 1/2 > 0$, где

$$p = \frac{1}{4} (2-\sigma)(4-\sigma) ((1-\sigma)^{-1} - 2(3-\sigma)^{-1}(5-\sigma)^{-1}). \quad (14)$$

Решая это неравенство, получим оценку для положительного корня квадратного трехчлена: $y = (2\sqrt{p^2/4 + 1/2} + p)^{-1} > (2p + p^{-1})^{-1}$.

Таким образом, $\cos \theta_\sigma = y > (2p + p^{-1})^{-1} = \bar{y} = \cos \bar{\theta}_\sigma$, откуда, учитывая (14) и $(3-\sigma)(5-\sigma)(2-\sigma)^{-1}(4-\sigma)^{-1} \leq 8/3$, имеем $(1-\sigma)^{-1} \times \cos \bar{\theta}_\sigma \geq \{(2-\sigma)(4-\sigma)/2 - 3(1-\sigma)/8 + (32/3)(1-\sigma)^2(\sigma^2 - 6\sigma + 13)^{-1}\}^{-1} \geq \{(2-\sigma)(4-\sigma)/2 + 4(1-\sigma)^2/3\}^{-1} > 0,62$ при $0,95 \leq \sigma < 1$. (15)

Из (11), (12) и (15) следует, что (4) верно при $0,95 \leq \sigma < 1$. Учитывая монотонность θ'_σ и θ_σ и то обстоятельство, что $\theta'_0 = 1,32508 > \theta_{0,60} = 1,30132$; $\theta'_{0,60} = 1,40503 > \theta_{0,75} = 1,39158$; $\theta'_{0,75} = 1,45360 > \theta_{0,84} = 1,45197$; $\theta'_{0,84} = 1,49015 > \theta_{0,89} = 1,48759$; $\theta'_{0,89} = 1,51311 > \theta_{0,92} = 1,50966$; $\theta'_{0,92} = 1,52784 > \theta_{0,94} = 1,52464$; $\theta'_{0,94} = 1,53807 > \theta_{0,95} = 1,53218$; получаем, что (4) верно при $0 \leq \sigma \leq 0,95$, а значит, и при $0 < \sigma < 1$.

Список литературы: 1. Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. — М.: Мир, 1980. — 302. 2. Volkmann L. Anwendungen einer Methode von Pólya in der Theorie der ganzen Funktionen // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. Math. — 1978/79. — 4. — Р. 299—309. 3. Островский И. В. О некоторых асимптотических свойствах целых функций с вещественными отрицательными нулями // Зап. мех.-мат. ф-та Харьк. ун-та и Харьк. мат. об-ва. — 1961. — 28. — С. 23—32. 4. Hayman W. K. Some examples related to the cos $\pi\rho$ -theorem // Math. Essays Dedicated to A. J. Macintyre. Ohio Univ. Press, Ohio. — 1970. — Р. 149—170. 5. Соколовская О. П. Некоторые соотношения для δ -субгармонических и субгармонических функций порядка или нижнего порядка меньше единицы — Л., 1987. — 27 с. Деп. в УкрНИИТИ 31.03.87, № 1092. 6. Гольдберг А. А., Соколовская О. П. Некоторые соотношения для мероморфных функций, порядок или нижний порядок которых меньше единицы // Изв. вузов. Математика. — 1987. — № 469. — С. 26—31.

Поступила в редколлегию 18.03.87

УДК 513.88

ВУ КУОК ФОНГ, Ю. И. ЛЮБИЧ

СПЕКТРАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧНОСТИ ДЛЯ РАВНОМЕРНО НЕПРЕРЫВНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ АБЕЛЕВЫХ ПОЛУГРУПП

В настоящей статье развивается основной результат работы [1]. Напомним основные определения и факты спектральной теории представлений, используемые далее (подробности см. в [2, 3]).

Пусть S — топологическая абелева полугруппа с единицей e , T — ее ограниченное* представление в комплексном банаховом пространстве B . Характер χ полугруппы S (полуунитарный, но необязательно унитарный) называется квазивесом представления T , если существует такая направленность $\{x_v\} \subset B$ (квазивесовая направленность), что $\|x_v\| = 1$ для всех v и

$$\lim_v \|T(s)x_v - \chi(s)x_v\| = 0 \quad (s \in S). \quad (1)$$

Множество всех квазивесов представления T называется его аппроксимативным спектром (короче, α -спектром) и обозначается $\text{sp}_{\alpha} T$.

Если представление T равномерно (т. е. по норме операторов) непрерывно**, то 1) его α -спектр непуст; 2) $\text{sp}_{\alpha} T \subset \text{sp}_{\delta} T \subset \hat{S}$, где

* Т. е. $\sup_s \|T(s)\| < \infty$. Не умаляя общности, можно далее принять $\|T(s)\| \leq 1$.

** По определению представление должно быть лишь сильно непрерывным.

\hat{S} — полугруппа полуунитарных характеров на S , $\text{sp}_{\delta} T$ (δ -спектр) — пространство максимальных идеалов коммутативной банаховой алгебры, порождаемой всеми $T(s)$; включения определяются некоторыми естественными инъекциями; 3) все унитарные характеры $\chi \in \text{sp}_{\delta} T$ принадлежат $\text{sp}_{\alpha} T$.

Лемма 1. Пусть представление T равномерно непрерывно, $L \subsetneq B$ — инвариантное для T подпространство, $T|_L$ — соответствующее представление в фактор пространстве B/L . Тогда все унитарные характеры из $\text{sp}_{\alpha}(T/L)$ принадлежат $\text{sp}_{\alpha} T$.

Для доказательства достаточно воспользоваться изложенными выше фактами и очевидным включением $\text{sp}_{\delta}(T/L) \subset \text{sp}_{\delta} T$.

Превратим S в направленное множество, полагая $s \geq t$, если s делится на t . Представление T называется асимптотически почти периодическим (а. п. п.), если каждая поднаправленность направленности $\{T(s)\}$ содержит сильно сходящуюся поднаправленность. Этот класс шире класса п. п. представлений, определяемых как такие, для которых орбита $O(x) = \{T(s)x\}$ каждого вектора предкомпактна*. Однако свойство а. п. п. равносильно п. п. для таких полугрупп, как \mathbb{R}_+ , \mathbb{Z}_+ .

Для любого а. п. п. представления (и только для такого) справедлива теорема об отщеплении граничного спектра, согласно которой $B = B_0 + B_1$, где B_0 , B_1 — инвариантные подпространства, называемые соответственно внутренним и граничным и описываемые следующим образом:

$$B_0 = \{x \mid \lim_s T(s)x = 0\}. \quad (2)$$

B_1 является топологической прямой суммой весовых подпространств $V_{\chi} = \{x \mid T(s)x = \chi(s)x\}$, отвечающих унитарным характерам χ (χ — вес, если $V_{\chi} \neq 0$); сужения $T(s)|_{B_1}$ — обратимые изометрии. **Проектор P , для которого $\text{Ker } P = B_0$, $\text{Im } P = B_1$, называется граничным (для представления T). Это ортопроектор, т. е. $\|P\| = 1$ (при $B_1 \neq 0$), поскольку представление T — сжимающее.

Из теоремы об отщеплении граничного спектра вытекает следующее важное свойство представления, которое мы называем спектральной двойственностью.

Теорема 1. Пусть T — а. п. п. представление, χ — унитарный характер полугруппы S . Тогда подпространства

$$\begin{aligned} V_{\chi} &= \{x \mid x \in B, T(s)x = \chi(s)x, (s \in S)\}, \\ W_{\chi} &= \{f \mid f \in B^*, T^*(s)f = \chi(s)f, (s \in S)\} \end{aligned}$$

находятся в двойственности.

Доказательство. Пусть $x \in V_{\chi}$, $x \neq 0$. Обозначим через g какой-нибудь линейный функционал на V_{χ} , такой, что $g(x) \neq 0$. По теореме об отщеплении граничного спектра в B существует проектор

* Если заменить это условие слабой предкомпактностью, то получится определение класса слабо п. п. представлений, изучавшихся в [4].

** Последнее — в силу сжимаемости всех $T(s)$.

P_x на V_x , аннулирующий подпространство B_0 и все весовые подпространства, отсекающие унитарным весам, отличным от χ . Проектор P_x коммутирует с представлением T . Функционал $f \in B^*$, определяемый равенством $f(y) = g(P_x y)$, принадлежит пространству W_x и $f(x) \neq 0$.

Пусть обратно $f \in W_x$, $f \neq 0$. Тогда f аннулирует B_0 и все весовые подпространства, отвечающие унитарным весам, отличным от χ . По теореме об отщеплении граничного спектра $f|V_x \neq 0$, т. е. существует $x \in V_x$, для которого $f(x) \neq 0$.

Следствие. В условиях теоремы 1 конечномерность одного из подпространств V_x , W_x эквивалентна конечномерности другого и при этом $\dim V_x = \dim W_x$. В частности, $W_x = 0 \Leftrightarrow V_x = 0$.

Замечание 1. Теорема 1 справедлива и для слабо п. п. представлений. Соответствующий вариант теоремы об отщеплении граничного спектра был установлен в [4]. В рефлексивном пространстве любое ограниченное представление является слабо п. п. и поэтому для него имеет место теорема об отщеплении граничного спектра*, а следовательно, и спектральная двойственность.

Замечание 2. Для любого (не только а. п. п.) представления T ($\|T(s)\| \leq 1$) имеет место импликация $x \in V_x \setminus \{0\} \Rightarrow \exists f \in W_x, f(x) \neq 0$. Для доказательства рассмотрим в B^* выпуклое ω^* -компактное множество $\Omega = \{f | f(x) = \|f\| = 1\}$. Оно инвариантно для коммутативного семейства аффинных непрерывных отображений $\{\chi^{-1}(s)T^*(s)\}$, ($s \in S$). По теореме Маркова — Какутани существует $f \in \Omega$ такой, что $T^*(s)f = \chi(s)f$.

Основной результат настоящей работы состоит в обращении теоремы 1 при дополнительных условиях на представление.

Теорема 2. Пусть представление T равномерно непрерывно, его унитарный а-спектр не более чем счетен и T удовлетворяет условию спектральной двойственности, т. е. $f \in W_x \setminus \{0\} \Rightarrow \exists x \in V_x, f(x) \neq 0$ (3). Тогда T является а. п. п.

Доказательство. Определим для T внутреннее подпространство B_0 и граничное подпространство B_1 точно так же, как они описываются в формулировке теоремы об отщеплении граничного спектра. Очевидно, это — инвариантные подпространства. Рассмотрим инвариантное подпространство $L = \overline{B_0 + B_1}$. Сужение $T|L$ является а. п. п., ибо таково (и даже п. п.) $T|B_1$, а $T|B_0$ сильно сходится к нулю. По теореме об отщеплении граничного спектра $L = B_0 + B_1$.

Поскольку представление T — сжимающее, то при любом $x \in B$ числовая направленность $\{\|T(s)x\|\}$ монотонна, откуда следует существование предела

$$l(x) = \lim_s \|T(s)x\| = \inf_s \|T(s)x\|.$$

Очевидно, $l(x)$ — полунорма в B , $l(x) \leq \|x\|$. Ядро $\text{Ker } l$ совпадает с B_0 , поэтому l порождает некоторую норму l_0 на фактор-пространстве B/B_0 . На подпространстве $L/B_0 \subset B/B_0$, естественно изометричном подпространству $B_1 \subset B$, норма l_0 совпадает с первоначальной нормой

* Этот результат был впервые получен в [5].

в силу теоремы об отщеплении граничного спектра. Следовательно, L/B_0 полно по норме l_0 . Но тогда l_0 порождает некоторую норму \tilde{l} на фактор-пространстве $(B/B_0)/(L/B_0) \approx B/L$. Норма \tilde{l} порождается также полунормой l при прямой факторизации B/L .

Очевидно, $\tilde{l}(z) \leq \|z\|$. Имеет место формула

$$\tilde{l}(z) = \liminf_{s \in B_1} \|T(s)x - v\|, \quad (4)$$

где $x \in B$ — любой прообраз элемента $z \in B/L$. Действительно,

$$\begin{aligned} \tilde{l}(z) &= \inf_{y \in L} l(x - y) = \inf_{v \in B_1} l(x - v) = \\ &= \inf_{v \in B_1} \inf_s \|T(s)x - T(s)v\| = \inf_{s \in B_1} \inf_v \|T(s)x - T(s)v\| = \\ &= \liminf_{s \in B_1} \|T(s)x - T(s)v\|. \end{aligned} \quad (5)$$

Остается вспомнить, что операторы $T(s)|_{B_1}$ обратимы, поэтому в (5) можно заменить $T(s)v$ на v .

Рассмотрим в фактор-пространстве B/L представление $U = T/L$. Из формулы (4) следует, что U сохраняет норму \tilde{l} . Пополним B/L по норме \tilde{l} . Получим банахово пространство E , в котором будет действовать изометрическое представление \tilde{U} . При переходе от U к \tilde{U} может нарушиться равномерная непрерывность, поскольку норма \tilde{l} , вообще говоря, не эквивалентна первоначальной норме в B/L . Поэтому далее мы будем работать не с представлением \tilde{U} , а с его образом, т. е. с полугруппой изометрий $\chi = \{\tilde{U}(s)\}_{s \in S}$. Ее α -спектр, вообще говоря, шире α -спектра представления \tilde{U} , так как может содержать характеры ξ , для которых $\chi(s) \equiv \xi(\tilde{U}(s))$ разрывны на исходной полугруппе S . Докажем, однако, что $\text{sp}_{\alpha} \chi \subset \text{sp}_{\alpha} U$ (с учетом переноса характеров с χ на S).

Пусть $\chi \in \text{sp}_{\alpha} \chi$, $\{z_v\}$ — соответствующая квазивесовая направленность, которую сразу можно выбрать из B/L , плотного в E :

$$\tilde{l}(z_v) = 1, \quad \lim_v \tilde{l}(U(s)z_v - \chi(s)z_v) = 0, \quad (s \in S).$$

Второе из этих соотношений записывается согласно (4) в виде

$$\lim_v \liminf_{t \in B_1} \|T(t)(T(s)x_v - \chi(s)x_v) - v\| = 0, \quad (s \in S),$$

где $x_v \in B$ — любой прообраз элемента $z_v \in B/L$. Тем более

$$\lim_v \liminf_{t \in L} \|T(t)(T(s)x_v - \chi(s)x_v) - v\| = 0, \quad (s \in S),$$

т. е.

$$\lim_v \lim_t \|U(s)U(t)z_v - \chi(s)U(t)z_v\| = 0, \quad (s \in S). \quad (6)$$

Так как $\|U(t)z_v\| \geq \tilde{l}(U(t)z_v) = \tilde{l}(z_v) = 1$, то из (6) следует, что $\chi \in \text{spec}_a U$.

Согласно лемме 1 унитарный a -спектр представления U не более чем счетен. Следовательно, таков же и a -спектр полугруппы Σ . Покажем, что он совпадает с ее δ -спектром. Достаточно проверить, что все характеры из δ -спектра унитарны, а для этого, в свою очередь, достаточно установить обратимость всех изометрий $\tilde{U}(s)$, ($s \in S$). Пусть некоторый оператор $\tilde{U}(t)$ необратим. Тогда его a -спектр содержит единичную окружность $|\lambda| = 1$. Но для каждого $\lambda \in \text{spec}_a \tilde{U}(t)$ существует квазивес $\chi \in \text{spec}_a \Sigma$, такой, что $\chi(t) = \lambda$ (см. [2]). Это противоречит счетности $\text{spec}_a \Sigma$.

Итак, пространство максимальных идеалов $\text{spec}_\delta \Sigma$ не более чем счетно. Так как оно компактно, то в нем существует изолированная точка χ . По известной теореме Шилова об идемпотентах существует проектор Q в пространстве E , коммутирующий со всеми $\tilde{U}(s)$, ($s \in S$) и такой, что δ -спектр семейства $\{\tilde{U}(s) | \text{Im } Q\}$ состоит из одной точки χ . Но тогда каждая изометрия $\tilde{U}(s) | \text{Im } Q$ имеет единственную точку спектра $\chi(s)$. Следовательно, $\tilde{U}(s)\omega = \chi(s)\omega$ для всех $\omega \in Q$, $s \in S$. Если g — линейный функционал на $\text{Im } Q$, $g \neq 0$, то функционал $h(z) = g(Qz)$, $z \in E$ — весовой: $\tilde{U}^*(s)h = \chi(s)h$, $h \neq 0$, ($s \in S$). Отсюда видно, между прочим, что характер χ непрерывен на S . Перенесем функционал h на исходное пространство B с помощью сквозного гомоморфизма $B \rightarrow B/L \rightarrow E$ (очевидно, непрерывного). Получим функционал $f \in B^*$, весовой для исходного представления $T: T^*(s)f = \chi(s)f$ ($s \in S$), $f \neq 0$. В силу спектральной двойственности существует дуальный весовой вектор $x \in B$: $T(s)x = \chi(s)x$, $f(x) \neq 0$. Но, очевидно, $x \in B_1 \subset L$, а $f|L = 0$. Полученное противоречие доказывает теорему 2.

Из теоремы 2 следует, что равномерно непрерывное слабо п. п. представление не более чем со счетным унитарным a -спектром является а. п. п. Действительно, как мы уже отмечали, спектральная двойственность для слабо п. п. представлений имеет место. В частности, имеет место такое

Следствие 1. Если в рефлексивном пространстве представление T равномерно непрерывно и его унитарный a -спектр не более чем счетен, то оно является а. п. п.

Сформулируем теперь критерий асимптотической устойчивости, вытекающий из теоремы 2 (ср. [1, 6]).

Следствие 2. Пусть представление T равномерно непрерывно и его унитарный a -спектр не более чем счетен. Для того чтобы все орбиты $\{T(s)x\}$ сходились к нулю, необходимо и достаточно, чтобы не существовало весовых функционалов $f \in B^*$, отвечающих унитарным характерам.

Доказательство. Необходимость условия очевидна (для любого представления): если $T^*(s)f = \chi(s)f$, то $f(T(s)x) = \chi(s)f(x)$ для всех x , откуда $f(x) = 0$, ($x \in B$), ибо $f(T(s)x) \rightarrow 0$, а $|\chi(s)| = 1$. Для доказательства достаточности заметим, что условие спектральной двой-

ственности в данном случае выполнено тривиальным образом. По теореме 2 представление T является а. п. п. Но тогда по теореме 1 гранично подпространство равно нулю, т. е. $B = B_0$, чем и доказывается требуемое утверждение.

Замечание. Для любого представления необходимым условием сходимости всех орбит к нулю является также отсутствие весовых векторов $x \in B$, отвечающих унитарным характерам. Этого и достаточно, если пространство рефлексивно, а представление T равномерно непрерывно и его унитарный α -спектр не более чем счетен.

Следствие 3. Пусть выполнены условия теоремы 2 (без (3), если пространство рефлексивно). Для того чтобы система весовых векторов представления была полна, необходимо и достаточно, чтобы все орбиты $\{T(s)x\}$, $x \neq 0$, были отделены от нуля.

Этот факт вытекает из теоремы 2 и теоремы об отщеплении граничного спектра. При этом представление п. п., все $T(s)$ — обратимые изометрии и, более того, представление продолжается на группу Гротендика полугруппы S (см. [3]).

Нарушение спектральной двойственности в нерефлексивном пространстве может привести к нарушению полноты (см. [7]).

Список литературы: 1. Ву Куок Фонг, Любич Ю. И. Спектральный критерий почти периодичности для однопараметрических полугрупп // Теория функций, функций. анализ и их прил. — 1987. — Вып. 47. — С. 36—41. 2. Любич Ю. И. Введение в теорию банаховых представлений групп. — Х.: Вища шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1985. — 142 с. 3. Любич М. Ю., Любич Ю. И. Отщепление граничного спектра для почти периодических операторов и представлений полугрупп // Теория функций, функций. анализ и их прил. — 1986. — Вып. 45. — С. 69—84. 4. De Leeuw K., Glicksberg I. Applications of almost periodic compactifications // Acta Math. — 1961. — 105. — P. 63—97. 5. Jacobs K. Ergo dehtheorie und Fastperiodische Funktionen auf Halbgruppen // Math. Z. — 1956. — 64. — P. 298—338. 6. Скляр Г. М., Ширман В. Я. Об асимптотической устойчивости линейного дифференциального уравнения в банаховом пространстве // Теория функций, функций. анализ и их прил. — 1982. — Вып. 37. — С. 127—132. 7. Любич Ю. И. Об условиях полноты системы собственных векторов корректного оператора // Успехи мат. наук. — 1963. — 18. № 1. — С. 165—171.

Поступила в редколлегию 19.05.86

УДК 519+517.46

В. Я. ГОЛОДЕЦ, А. И. ДАНИЛЕНКО

ЭРГОДИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП И СВОЙСТВА ИХ СОВМЕСТНЫХ ДЕЙСТВИЙ

Ранее было доказано, что совместный поток двух эргодических сохраняющих меру потоков на пространствах Лебега с конечными мерами имеет чисто точечный спектр. Это утверждение применяется в эргодической теории при вычислении так называемых ассоциированных потоков [1, 2]. Цель настоящей заметки — обобщить его на случай действия произвольной локально-компактной сепарабельной абеле-

вой группы G . Доказательство утверждения в работах [1, 2] использует индивидуальную эргодическую теорему Биркгофа — Хинчина. Ее аналог для произвольной абелевой группы в настоящее время неизвестен. В предлагаемом доказательстве G представляется в виде объединения последовательности специальных подгрупп, для которых такой аналог имеет место.

Всюду в дальнейшем (X, μ) , (Y, ν) обозначают пространства Лебега [3], $\mu(X) = \nu(Y) = 1$, G — сепарабельную локально-компактную абелеву группу, \hat{G} — двойственную к ней группу, $\{U_s\}_{s \in G}$ и $\{V_s\}_{s \in G}$ — эргодические действия G несингулярными автоморфизмами на X и Y соответственно, $\{U'_s\}_{s \in G}$ и $\{V'_s\}_{s \in G}$ — непрерывные унитарные представления в $L^2(X, \mu)$ и $L^2(Y, \nu)$ соответственно, порожденные этими действиями.

$$\begin{aligned} \text{Sp}\{U'_s\} &= \{t \in \hat{G} : \exists a_t \in L^2(X, \mu), a_t \neq 0; \\ &\quad U'_s a_t = t(s) a_t, \quad \forall s \in G\}; \\ \text{Sp}\{V'_s\} &= \{t \in \hat{G} : \exists b_t \in L^2(Y, \nu), b_t \neq 0; \\ &\quad V'_s b_t = t(s) b_t, \quad \forall s \in G\}. \end{aligned}$$

Говорят, что $\{U_s\}_{s \in G}$ имеет чисто точечный спектр, если U_s сохраняет меру для любого s из G и собственные функции $\{U'_s\}_{s \in G}$ образуют базис в $L^2(X, \mu)$.

Рассмотрим $\{U_s \times V_s\}_{s \in G}$ и $\{U_s \times e\}_{s \in G}$ действия G на $(X \times Y, \mu \times \nu)$, определенные по формулам $U_s \times V_{-s}(x, y) = (U_s x, V_{-s} y)$ и $U_s \times e(x, y) = (U_s x, y)$.

Пусть $\varphi: X \times Y \rightarrow Z$ — фактор-отображение в смысле пространств с мерой, определенное измеримым разбиением $X \times Y$, порожденным σ -алгеброй $\{U_s \times V_{-s}\}_{s \in G}$ -инвариантных (mod 0) подмножеств. Тогда, так как $\{U_s \times V_{-s}\}_{s \in G}$ коммутирует с $\{U_s \times e\}_{s \in G}$, корректно определено $\{(U, V)_s\}_{s \in G}$ -действие G на Z по формуле $(U, V)_s \varphi(x, y) = \varphi(U_s x, y) \cdot \{(U, V)_s\}_{s \in G}$ называют совместным действием $\{U_s\}_{s \in G}$ и $\{V_s\}_{s \in G}$ [1, 2].

Теорема. $\{(U, V)_s\}_{s \in G}$ является эргодическим действием с чисто точечным спектром и $\text{Sp}\{(U, V)_s\} = \text{Sp}\{U_s\} \cap \text{Sp}\{V_s\}$.

Доказательству теоремы предпошлим

Предложение. Линейная оболочка системы

$\{a_t(x) b_t(y)\}_{t \in \text{Sp}\{U_s\} \cap \text{Sp}\{V_s\}}$ плотна в $M = \{c \in L^2(X \times Y, \mu \times \nu) : c(U_s x, V_{-s} y) = c(x, y) \text{ п. в. } (x, y) \in X \times Y, \forall s \in G\}$.

Доказательство. Зафиксируем произвольный $f \in M \cap L^\infty(X \times Y, \mu \times \nu)$. Пусть $\xi \in L^2(X, \mu)$ и ортогонален всем собственным функциям $a_t(x)$ семейства $\{U_s\}_{s \in G}$. Для доказательства предложения достаточно показать, что

$$f_\xi(y) = (f(\cdot, y), \xi(\cdot))_{L^2(X, \mu)} = 0 \quad (1)$$

для почти всех $y \in Y$.

Известно [4], что произвольная локально-компактная абелева группа G топологически изоморфна $R^m \oplus G'$, где G' — некоторая локально-компактная абелева группа, содержащая открытую компактную подгруппу K , а $m \in N \cup \{0\}$. Из сепарабельности G следует, что группа $D = G'/K$ счетна. $D = \{g_n\}_{n=1}^\infty$. Рассмотрим ее подгруппы Γ_n , порожденные n первыми элементами $\Gamma_n = \{\lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_n g_n \in D: (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in Z_n\}$. Тогда из основной теоремы абелевых групп [4] следует, что Γ_n изоморфны $Z^{p(n)} \oplus L_n$, где $p(n)$ — неотрицательное целое число, а L_n — прямая сумма конечного числа циклических подгрупп конечного порядка. Если обозначить через $G_n = R^m \oplus (\Gamma_n + K)$, то $G_n \subset G_l$ при $n < l$

и $\bigcup_{n=1}^\infty G_n = G$. Здесь под $\Gamma_n + K$ подразумевается подгруппа G' , содержащая K , такая, что $(\Gamma_n + K)/K = \Gamma_n$.

Обозначим через $H_n(H)$ подпространство $L^2(X, \mu)$, натянутое на собственные функции $\{U'_s\}_{s \in G_n} (\{U'_s\}_{s \in G})$, а через $P_n(P)$ — проектор на него. Легко видеть, что H_n , а значит, и $L^2(X, \mu) \ominus H_n$ инвариантно относительно $\{U'_s\}_{s \in G_n}$. Таким образом, $\{U'_s\}_{s \in G_n}$ — непрерывное унитарное представление G_n в $(I - P_n) L^2(X, \mu)$. Тогда справедлива теорема ШНАГ [4]: $U'_s = \int_{\hat{G}} (t, s) dB(t)$, где $dB(t)$ — операторная мера,

а (t, s) — значение характера t в точке $s \in G$.

Представим s и t в виде $s = (s_1, s_2, s_3, s_4) \in (R^n, Z^{p(n)}, L_n, K)$, $t = (t_1, t_2, t_3, t_4) \in (R^m, Tor^{p(n)}, L_n, \hat{K})$. Тогда

$$U'_s = \int_{\hat{G}} e^{i(t_1, s_1)} e^{i(t_2, s_2)} (t_3, s_3) (t_4, s_4) dB(t). \quad (2)$$

Применяя (2) к (1), получаем

$$f_{(I-P_n)\xi}(V_s y) = \int_{\hat{G}} e^{i(t_1, s_1)} e^{i(t_2, s_2)} (t_3, s_3) (t_4, s_4) dF_y(t), \quad (3)$$

где $dF_y(t) = d(f(\cdot, y), B(t)(I - P_n)\xi(\cdot))_{L^2(X, \mu)}$. Рассмотрим в G_n последовательность подмножеств $S_k = I_k \oplus (J_k \oplus L_n + K)$, где $I_k = \{s_1 = (s_{11}, \dots, s_{1m}) \in R^m: |s_{1i}| \leq k, i = \overline{1, m}\}$, $J_k = \{s_2 = (s_{21}, \dots, s_{2p(n)}) \in Z^{p(n)}: |s_{2j}| \leq k, j = \overline{1, p(n)}\}$. Тогда а) S_k компактны, $S_k \subset S_q$ при $k < q$, $\bigcup_{k=1}^\infty S_k = G_n$

$$б) \forall g \in G_n \frac{\tau(g S_k \Delta S_k)}{\tau(S_k)} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty);$$

$$в) \tau(S_k S_k^{-1}) \leq C \tau(S_k),$$

τ означает левоинвариантную меру Хаара на G_n . В качестве C можно выбрать $2^{m+p(n)}$. Другими словами, выполнены все условия индивиду-

альной эргодической теоремы для аменабельных групп [5]. Следовательно, для почти всех $y \in Y$ существует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau(S_k)} \int_{S_k} |f_{(I-P_n)\xi}(V_s y)|^2 d\tau(s) = M_n(|f_{(I-P_n)\xi}|^2)(y), \quad (4)$$

где M_n — условное математическое ожидание относительно σ -алгебры G_n -инвариантных (mod 0) подмножеств.

С другой стороны, из (3) получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau(S_k)} \int_{S_k} |f_{(I-P_n)\xi}(V_s y)|^2 d\tau(s) = \\ &= \int_t \int_{t'} \prod_{j=1}^m \frac{\sin\{k(t_{2j} - t'_{2j})\}}{k(t_{2j} - t'_{2j})} \prod_{j=1}^{p(n)} \frac{\sin\{k(t_{2j} - t'_{2j})\}}{k(t_{2j} - t'_{2j})} \times \\ & \quad \times \delta(t_3, t'_3) \delta(t_4, t'_4) dF_y(t) \overline{dF_y(t')}; \\ & \quad \delta(t_i, t'_i) = \begin{cases} 1 & : t_i = t'_i; \\ 0 & : t_i \neq t'_i. \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

Так как $(I - P_n)\xi$ ортогонален всем собственным функциям $\{U_s'\}_{s \in G_n}$, мера $dF_y(t)$ неатомическая. Следовательно, применяя к (5) теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получаем из (4): $M_n(|f_{(I-P_n)\xi}|^2) = 0$ для почти всех $y \in Y$, а значит, $(f(\cdot, y), (I - P_n) \times \xi(\cdot))_{L^2(X, \mu)} = 0$ для п. в. y . Несложно заметить, что $P_n \rightarrow P$ ($n \rightarrow \infty$)

или, что то же, $\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n = H$.

Действительно, пусть $d \in \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$, $d \neq 0$. Тогда для

$$\forall k \in \mathbb{N} \exists \chi_k \in \hat{G}_k : U_s' d = \chi_k(s) d, \quad \forall s \in G_k.$$

При $l > k$ $\chi_l|_{G_k} = \chi_k$ и, следовательно, корректно определен $\chi \in \hat{G} : \chi|_{G_k} = \chi_k$ для любого k , такой, что $U_s' d = \chi(s) d$, $\forall s \in G$. Таким

образом, $\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n \subset H$, обратное включение очевидно. $(f(\cdot, y), \xi(\cdot))_{L^2(X, \mu)} =$
 $= (f(\cdot, y), (I - P)\xi(\cdot))_{L^2(X, \mu)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(\cdot, y), (I - P_n)\xi(\cdot))_{L^2(X, \mu)} = 0$

и доказательство закончено.

Доказательство теоремы.

Достаточно заметить, что $\varphi(\mu \times \nu)$ — образ $(\mu \times \nu)$ при факторотображении φ является $\{(U, V)_s\}_{s \in G}$ -инвариантной мерой, и что $L^2(Z, \varphi(\mu \times \nu)) = M$.

Список литературы: 1. Hamachi T. and all. Flows, associated with ergodic non-singular transformation groups / Y. Oka, M. Osikawa, T. Hamachi // Publ. RIMS. Kyoto univ. — 1975. — 11. — P. 31—50. 2. Hamachi T., Osikawa M. Ergodic groups of automorphisms and Krieger's theorems // Seminar on Math. Sci. Keio univ. — 1981. — 3. — 111 p. 3. Рохлин В. А. Основные понятия теории меры //

Мат. сб. — 1949. — 25 (67). — С. 107—150. 4. Хьюит Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ, I. — М.: Наука, 1975. — 654 с. 5. Браттели У., Робинсон Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. — М.: Мир, 1982. — 511 с. 6. Emerson F. The pointwise ergodic theorem for amenable groups // Amer. J. Math. — 1974. — 96. — P. 472—487.

Поступила в редколлегию 08.10.86

УДК 517.53

А. Ф. ГРИШИН, М. Л. СОДИН

РОСТ ПО ЛУЧУ, РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОРНЕЙ ПО АРГУМЕНТАМ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА И ОДНА ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ

В работе исследована связь между ростом целой функции конечного порядка по фиксированному лучу и распределением ее корней по аргументам. Введены и исследованы классы функций, характеризующиеся регулярностью роста более слабой, чем полная регулярность роста в смысле Б. Я. Левина — А. Пфлюгера. В качестве иллюстрации рассмотрены целые функции с корнями на луче и функции с «периодическим» предельным множеством в смысле В. С. Азарина. Получена новая теорема единственности для целых функций конечного порядка.

Без пояснений используем стандартные обозначения теории целых и мероморфных функций [1, 2]. Через E_ρ обозначаем класс целых функций нормального типа при порядке $\rho > 0$.

Далее, мы, как правило, предполагаем для простоты, что $f \in E_\rho$. В конце § 1 кратко остановимся на изменениях, которые необходимо проделать, чтобы перейти к функциям нормального типа относительно произвольного ненулевого уточненного порядка.

Через $\cos^* \rho \theta$ (ρ — нецелое) и θ^* обозначаем 2π -периодическое продолжение этих функций с интервалов $[-\pi, \pi]$ и $[0, 2\pi)$ соответственно.

§ 1. Интегральные формулы типа Карлемана. В основе работы лежат интегральные представления целых функций, близкие представления использовались ранее Ж. Валироном [3], А. А. Гольдбергом [4] и В. Фуксом [5].

Лемма 1.1. Пусть f — целая функция, $z_n = r_n e^{i\varphi_n}$ — ее корни, $R > 1$, $\rho > 0$. Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} & 2\rho \sin \pi \rho \int_1^R \ln |f(re^{i\varphi})| \left(\frac{1}{r^\rho} - \frac{r^\rho}{R^{2\rho}} \right) \frac{dr}{r} + \\ & + \frac{2\rho}{R^\rho} \int_0^{2\pi} \ln |f(Re^{i\theta})| \cos^* \rho (\theta - \varphi - \pi) d\theta = \\ & = 2\pi \sum_{1 < r_n < R} \cos^* \rho (\psi_n - \varphi - \pi) \left(\frac{1}{r_n^\rho} - \frac{r_n^\rho}{R^{2\rho}} \right) + O(1). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Для доказательства этой леммы необходимо применить вторую формулу Грина ([2], с. 9, формула (1.1)) в разрезанном кольце $K_{R,\varphi} = \{z: 1 < |z| < R, \varphi < \arg z < \varphi + 2\pi\}$ к функциям $u(z) = \ln |f(z)|$, $v(z) = \left(\frac{1}{|z|^\rho} - \frac{|z|^\rho}{R^{2\rho}}\right) \cos^* \rho(\arg z - \varphi - \pi)$.

При целых значениях ρ лемма 1.1 не дает выражения для интересующего нас интеграла

$$J_f(R, \varphi) = \int_1^R \frac{\ln |f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho+1}} dr,$$

так как числовой коэффициент при нем в (1.1) равен нулю. Поэтому при целом ρ нам понадобится другая формула.

Лемма 1.2. Пусть f — целая функция, $z_n = r_n e^{i\psi_n}$ — ее корни, $R > 1$, $\rho > 0$ — целое число. Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} & 2\pi\rho \int_1^R \ln |f(re^{i\varphi})| \left(\frac{1}{r^\rho} - \frac{r^\rho}{R^{2\rho}}\right) \frac{dr}{r} - \\ & - 2\rho \int_1^R \frac{dr}{r} \left(\frac{1}{r^\rho} - \frac{r^\rho}{R^{2\rho}}\right) \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta})| \cos \rho(\theta - \varphi) d\theta - \\ & - \frac{2\rho}{R^\rho} \int_0^\pi \ln |f(Re^{i\theta})| (\theta - \varphi)^* \sin \rho(\theta - \varphi) d\theta = \\ & = -2\pi \sum_{1 < r_n < R} (\psi_n - \varphi)^* \sin \rho(\psi_n - \varphi) \left(\frac{1}{r_n^\rho} - \frac{r_n^\rho}{R^{2\rho}}\right) + O(1), \quad R \rightarrow \infty. \quad (1.2) \end{aligned}$$

Для доказательства этой леммы нужно применить вторую формулу Грина в том же разрезанном кольце $K_{R,\varphi}$ к функциям $u(z) = \ln |f(z)|$, $v(z) = -\left(\frac{1}{r^\rho} - \frac{r^\rho}{R^{2\rho}}\right) (\theta - \varphi)^* \sin \rho(\theta - \varphi)$, $z = re^{i\theta}$.

Лемма 1.3. Пусть $f \in E_\rho$, ρ — целое число. Тогда справедливо асимптотическое равенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_1^R \frac{dz}{r} \left(\frac{1}{r^\rho} - \frac{r^\rho}{R^{2\rho}}\right) \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta})| \cos \rho(\theta - \varphi) d\theta = \\ & = \frac{1}{\rho} \sum_{1 < r_n < R} \frac{1}{r_n^\rho} \ln \frac{R}{r_n} \cos \rho(\psi_n - \varphi) + \\ & + 2\operatorname{Re}(c_\rho e^{-i\rho\varphi}) \ln R + O(1), \quad R \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

$$2\partial\bar{\partial} c_\rho = \frac{d^\rho}{dz^\rho} \ln f(z)|_{z=0}.$$

Доказательство этой леммы немедленно следует из известных формул для коэффициентов Фурье функции $\ln |f(re^{i\theta})|$ (см., например, [2], гл. 1, (2.6)) и классической теоремы Линделёфа о корнях функции $f \in E_\rho$ при целом ρ ([1], гл. 1).

Лемма 1.4. Пусть $f \in E_\rho$, $\alpha < \rho$. Тогда равномерно по $\varphi \in [0, 2\pi]$ выполняется

$$\frac{1}{R^{\rho-\alpha}} \int_1^R \frac{|\ln |f(re^{i\varphi})||}{r^{\alpha+1}} dr = O(1), \quad R \rightarrow \infty.$$

Доказательство этой леммы следует, например, из известной оценки Р. Неванлинны ([2], гл. 1, теорема 7.2).

Пусть $f \in E_\rho$. Тогда большинство слагаемых в формулах (1.1) и (1.2) ограничены по модулю, отбросим их, оставив лишь члены, растущие, вообще говоря, как $\ln R$ при $R \rightarrow \infty$.

Теорема 1.1. Пусть $f \in E_\rho$, $z_n = r_n e^{i\psi_n}$ — корни функции f . Тогда при нецелом ρ справедлива формула

$$J_f(R, \varphi) = \frac{\pi}{\rho \sin \pi \rho} \sum_{1 \leq r_n < R} \frac{\cos^* \rho (\psi_n - \varphi - \pi)}{r_n^\rho} + O(1). \quad (1.3)$$

В случае целого ρ выполняется

$$J_f(R, \varphi) = \frac{1}{\rho} \sum_{1 \leq r_n < R} \frac{1}{r_n^\rho} \{ (\psi_n - \varphi)^* \sin \rho (\varphi - \psi_n) + \cos \rho (\psi_n - \varphi) \ln \frac{R}{r_n} \} + 2 \operatorname{Re} (c_\rho e^{-i\rho\varphi}) \ln R + O(1), \quad R \rightarrow \infty. \quad (1.4)$$

Доказательство этой теоремы сразу же следует из лемм 1.1—1.4. Закончим этот параграф двумя замечаниями.

1. Утверждение теоремы 1.1, как и дальнейшие следствия из нее, справедливы (в несколько измененном виде) и для произвольных целых функций конечного порядка. Остановимся вкратце на этом.

Пусть $\rho(t)$ — уточненный порядок функции f . Справедлива следующая известная лемма, доказательство которой опускаем.

Лемма 1.5. Пусть $\rho(t)$ — произвольный уточненный порядок, а функция $\tilde{\rho}(t)$ определяется равенством

$$\tilde{\rho}(t) - \rho = \frac{t}{\pi} \int_0^\infty \frac{s^{\rho(s)-\rho}}{s^2 + t^2} ds.$$

Тогда выполняются соотношения $t^k \ln t \tilde{\rho}^{(k)}(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, $k = 1, 2, 3, \dots$ (1.5); $t^{\rho(t)-\tilde{\rho}(t)} \rightarrow 1$, $t \rightarrow \infty$.

Поэтому, далее, не снижая общности, считаем, что условие (1.5) выполнено. Примем для простоты, что ρ — нецелое число. Тогда аналог леммы 1.1 для уточненного порядка получается изменением

функции $v(z)$ из леммы 1.1 на $\bar{v}(re^{i\theta}) = r^{\rho-\rho(r)} v(re^{i\theta})$. Поэтому справедлива формула, аналогичная (1.4):

$$\int_1^R \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r^{\rho(r)+1}} dr = \\ = \frac{\pi}{\rho \sin \pi \rho} \sum_{1 < r_n < R} \frac{\cos^* \rho (\psi_n - \varphi - \pi)}{r_n^{\rho(r_n)+1}} + o(\ln R), \quad R \rightarrow \infty.$$

2. «Весовую считающую функцию», стоящую в правой части соотношений (1.3) и (1.4), можно представить в несколько ином виде. Для краткости рассмотрим лишь случай нецелого ρ , случай целого ρ рассматривается аналогично.

Зафиксируем значение φ и положим

$$c_\varphi(r, f) = \sum_{r_n < r} \frac{\pi \cos^* \rho (\psi_n - \varphi - \pi)}{\rho \sin \pi \rho}, \quad \varphi \leq \psi_n < \varphi + 2\pi.$$

Эта считающая функция последовательности корней функции f аналогична неванлинновской считающей функции для полуплоскости ([2], гл. 1, § 5). (При $\rho > \frac{1}{2}$ некоторые корни дают отрицательный вклад в $c_\varphi(r, f)$). Тогда (1.3) можно записать в виде

$$J_f(R, \varphi) = \int_1^R \frac{c_\varphi(r, f)}{r^{\rho+1}} dr + O(1). \quad (1.3a)$$

В случае полуплоскости, кроме неванлинновской считающей функции, имеется близкая к ней считающая функция Левина — Цудзи, возникающая при использовании интегральной формулы Б. Я. Левина ([1], гл. 4; [2], гл. 1). В этой считающей функции все корни учитываются с весом, равным их кратности, однако исчерпание полуплоскости ведется по кругам $\{z: |z - i \frac{R}{2}| \leq \frac{R}{2}\}$. Аналогично можно ввести считающую функцию и в нашем случае.

Пусть γ_φ — замкнутая кривая, задаваемая в полярных координатах (t, φ) уравнением $\gamma_\varphi = \{t = |\cos^* \rho (\psi - \varphi - \pi)|\}$. Через G_φ обозначим открытое множество, ограниченное кривой γ_φ ; при $\rho > \frac{1}{2}$ кривая γ_φ имеет самопересечения и G_φ состоит из нескольких компонент — «лепестков». Положим

$$G_\varphi(+)=\left\{re^{i\psi}\in G_\varphi:\frac{\cos^*\rho(\psi-\varphi-\pi)}{\sin\pi\rho}>0\right\}.$$

Таким образом, из двух соседних лепестков — компонент G_φ — один попадает в $G_\varphi(+)$. Через tG_φ обозначим гомотетию множества G_φ с коэффициентом t относительно начала координат.

Пусть $v_\varphi(t, f)$ — число корней функции f (с учетом кратности), попавших в tG_φ , при этом корень засчитывается со знаком «+», если он попал в $tG_\varphi(+)$, и со знаком «—» в противоположном случае. Тогда можно убедиться, что для $f \in E_\rho$ выполняется

$$\int_1^R \frac{c_\varphi(r, f)}{r^{\rho+1}} dr = \int_1^R \frac{v_\varphi(r, f)}{r^{\rho+1}} dr + O(1), \quad R \rightarrow \infty.$$

Таким образом, в силу (1.3а) выполняется

$$J_f(R, \varphi) = \int_1^R \frac{v_\varphi(r, f)}{r^{\rho+1}} dr + O(1), \quad R \rightarrow \infty.$$

§ 2. ρ -индикатор и целые функции ρ -регулярного роста. Положим

$$H_\rho(\varphi) = \limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{J_f(R, \varphi)}{\ln R}, \quad f \in E_\rho. \quad (2.1)$$

Еще Валирон [3] заметил, что $H_\rho(\varphi)$ является ρ -тригонометрически выпуклой функцией. Ясно, что $H_\rho(\varphi) \leq h(\varphi)$, где $h(\varphi)$ — (обычный) индикатор роста функции f . В отличие от индикатора $h(\varphi)$ ρ -индикатор $H_\rho(\varphi)$ весьма просто выражается через корни функции f . Следующие формулы немедленно следуют из теоремы 1.1.

Пусть $f \in E_\rho$, $\rho > 0$, $z_n = r_n e^{i\psi_n}$ — корни функции f . Тогда при нецелом ρ выполняется

$$H_\rho(\varphi) = \limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{\pi}{\rho \sin \pi \rho \ln R} \sum_{1 < r_n < R} \frac{\cos^* \rho(\psi_n - \varphi - \pi)}{r_n^\rho}, \quad (2.2)$$

а при целом ρ

$$H_\rho(\varphi) = \limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho \ln R} \sum_{1 < r_n < R} \frac{1}{r_n^\rho} \left\{ (\psi_n - \varphi)^* \sin \rho(\varphi - \psi_n) + \right. \\ \left. + \cos \rho(\psi_n - \varphi) \ln \frac{R}{r_n} \right\} + 2 \operatorname{Re} (c_\rho e^{-i\rho\varphi}), \quad (2.3)$$

где $c_\rho = \frac{d^\rho}{dz^\rho} \ln f(z)|_{z=0}$.

Равенства (2.2) и (2.3) и оценка $h(\varphi) \geq H_\rho(\varphi)$ влекут точные оценки снизу индикатора $h(\varphi)$ функции $f \in E_\rho$ через ее корни. Равенство в этих оценках достигается, например, для функций вполне регулярного роста в смысле Б. Я. Левина — А. Пфлюгера ([1], гл. III) на луче $\arg z = \varphi$, так как нетрудно показать, что для таких функций $h(\varphi) = H_\rho(\varphi)$.

Определение. Функция $f \in E_\rho$ имеет ρ -регулярный рост на луче $\arg z = \varphi$, если существует предел

$$H_\rho(\varphi) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln R} \int_1^R \frac{\ln |f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho+1}} dr.$$

Из теоремы 1.1 сразу же следует, что необходимым и достаточным условием ρ -регулярности роста на фиксированном луче $\arg z = \varphi$ является существование предела в правой части (2.2) при нецелом ρ и в правой части (2.3) при целом ρ .

Отметим, что ρ — регулярность роста — более слабое свойство, чем полная регулярность роста в смысле Левина — Пфлюгера на фиксированном луче, поэтому полученное условие является необходимым условием регулярности роста в смысле Левина — Пфлюгера на одном луче. Наглядные необходимые и достаточные условия полной регулярности роста функции на фиксированном луче в терминах ее корней неизвестны.

Определение. Функция $f \in E_\rho$ имеет ρ -регулярный рост во всей плоскости, если она имеет ρ -регулярный рост на каждом луче $\arg z = \varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Поясним смысл определения. Считаем, что сходится интеграл

$$\int_0^1 \frac{\ln |f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho+1}} dr, \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Выполнения этого условия можно добиться, домножая функцию f на подходящую функцию вида $z^{-m} \exp Q(z)$, где $Q(z)$ — полином степени не большей чем ρ .

Рассмотрим субгармоническую функцию:

$$U_\rho(z) = \int_0^1 \frac{\ln |f(tz)|}{t^{\rho+1}} dt = R^\rho \int_0^1 \frac{\ln |f(te^{i\varphi})|}{t^{\rho+1}} dt, \quad z = Re^{i\varphi}$$

и функцию сравнения $V(R) = R^\rho \ln R$. Тогда ρ -регулярность роста функции f эквивалентна полной регулярности роста U_ρ относительно $V(R)$.

Определение. Корни функции f ρ -правильно распределены, если для всех значений θ_1, θ_2 , $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq 2\pi$, за исключением, быть может, счетного множества, существует предел

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln R} \int_1^R \frac{n(r; \theta_1, \theta_2; f)}{r^{\rho+1}} dr,$$

где $n(r; \theta_1, \theta_2; f)$ — число корней функции f в секторе $|z| \leq r$, $\theta_1 < \arg z < \theta_2$, а в случае целого ρ дополнительно существует предел

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln R} \sum_{|z_n| < R} \frac{1}{z_n^\rho} \ln \frac{R}{|z_n|}.$$

Лемма 2.1. ρ -правильная распределенность корней функции $f \in E_\rho$ эквивалентна правильной распределенности риссовской меры μ_ρ субгармонической функции U_ρ относительно функции $V(R)$.

Доказательство этой леммы сводится к непосредственной проверке, которую опускаем.

Лемма 2.1 в сочетании с теоремой Левина — Пфлюгера [1, 6], примененной к функции U_ρ , позволяет установить следующее утверждение.

Теорема 2.1. Функция $f \in E_p$ имеет p -регулярный рост во всей плоскости тогда и только тогда, когда ее корни p -правильно распределены.

§ 3. Функции слабо регулярного роста. Введем класс функций, промежуточный между функциями вполне регулярного роста на луче и функциями p -регулярного роста.

Определение. Назовем функцию $f \in E_p$ функцией слабо регулярного роста на луче $\arg z = \varphi$, если она является функцией p -регулярного роста на этом луче, причем $H_p(\varphi) = h(\varphi)$, где $h(\varphi)$ — индикатор функции f .

Теорема 3.1. Для того чтобы функция $f \in E_p$ имела слабо регулярный рост на луче $\arg z = \varphi$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\Delta > 0$ множество $E_\Delta = \{r \geq 1 : \ln |f(re^{i\varphi})| < (h(\varphi) - \Delta)r^p\}$ (3.1) имело логарифмическую плотность нуль*.

Для доказательства теоремы 3.1 нам понадобятся две леммы, которые по аналогии с «леммой о малых дугах» А. Эдreja и В. Фукса (см., например, [2], гл. 1, теорема 7.3) можно назвать леммами о малых интервалах.

Для множества $E \subset [1, \infty)$ положим $E(R) = E \cap [1, R)$.

Лемма 3.1. Пусть f — мероморфная функция, $E \subset [1, \infty)$. Тогда

$$\frac{1}{r} \int_{E(r)} \ln^+ M(t, f) dt \leq C \frac{k}{k-1} \left(\frac{\text{mes } E(r)}{r} \ln \frac{2r}{\text{mes } E(r)} \right) T(kr, f), \quad (3.2)$$

где C — абсолютная постоянная.

Доказательство этой леммы дословно повторяет доказательство леммы Эдreja — Фукса, и мы его опускаем.

Лемма 3.2. Пусть E — множество нулевой логарифмической плотности, f — мероморфная функция нормального типа при порядке p . Тогда

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln R} \int_{E(R)} \frac{\ln^+ M(r, f)}{r^{p+1}} dr = 0. \quad (3.3)$$

Доказательство леммы 2.2. Положим $E_k = E \cap [2^k, 2^{k+1})$. Тогда

$$\frac{1}{\ln R} \int_{E(R)} \frac{\ln^+ M(r, f)}{r^{p+1}} dr \leq \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \int_{E_k} \frac{\ln^+ M(r, f)}{r^{p+1}} dr, \quad (3.4)$$

где $n = [\log_2 R] + 1$.

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Натуральное число k назовем числом I -го типа, если $\text{mes } E_k \leq \varepsilon 2^k$, в противном случае будем

* Множество $E \subset [1, \infty)$ имеет логарифмическую плотность нуль, если

$$\int_{E(R)} \frac{dt}{t} = o(\ln R), \quad R \rightarrow \infty.$$

Напомним, что для полной регулярности роста функции f на луче $\arg z = \varphi$ необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\Delta > 0$ множество E_Δ имело нулевую плотность.

говорить, что число k — II-го типа. Символы $\sum^{(I)}$ и $\sum^{(II)}$ означают, что суммирование ведется по значениям k I- и II-го типов соответственно.

В силу оценки (3.2) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int_{E_k} \frac{\ln^+ M(r, f)}{r^{\rho+1}} dr &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2^{-k(\rho+1)} \int_{E_k} \ln^+ M(r, f) dr \leq \\ &\leq \frac{c}{n} \sum_{k=1}^n 2^{-k\rho} \varepsilon \ln \frac{4}{\varepsilon} T(2^{k+2}, f) \leq \frac{C(\rho)}{n} \varepsilon \ln \frac{4}{\varepsilon} n = C(\rho) \varepsilon \ln \frac{4}{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Оценим сверху величину $q(n)$ — число чисел $k \in [1, n]$ II-го типа:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon q(n)}{n} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2^{-k} (\varepsilon 2^k) \leq \frac{C}{n} \sum_{k=1}^n \int_{E_k} \frac{dt}{t} \leq \\ &\leq \frac{C}{\ln R} \int_{E(R)} \frac{dt}{t} = o(1), \quad R \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (3.6)$$

так как E — множество логарифмической плотности ноль.

Используя оценки (3.2) (с $E = [2^k, 2^{k+1})$) и (3.6), имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int_{E_k} \frac{\ln^+ M(r, f)}{r^{\rho+1}} dr &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2^{k+1} \int_{2^k} \frac{\ln^+ M(r, f)}{r^{\rho+1}} dr \leq \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2^{-k\rho} \frac{1}{2^k} \int_{2^k}^{2^{k+1}} \ln^+ M(r, f) dr \leq \frac{C q(n)}{n} = o(1), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Объединяя неравенства (3.4), (3.5) и (3.7), получаем искомую оценку (3.3). Лемма 3.2 доказана.

Доказательство теоремы 3.1. Пусть функция f имеет слабо регулярный рост на луче $\arg z = \varphi$, т. е. выполняется

$$\int_1^R \frac{\ln |f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho+1}} dr = (h(\varphi) + \varepsilon(R)) \ln R, \quad \varepsilon(R) \rightarrow 0. \quad (3.8)$$

Покажем, что тогда

$$\sigma_{\Delta}(R) = \frac{i}{\ln R} \int_{E_{\Delta}(R)} \frac{dt}{t} = o(1), \quad R \rightarrow \infty. \quad (3.9)$$

По наперед заданному $\delta > 0$ выберем число r_{δ} так, чтобы $\forall r \geq r_{\delta}$ $\ln |f(re^{i\varphi})| \leq (h(\varphi) + \delta) r^{\rho}$ (3.10). Тогда в силу (3.8) и (3.10) выпол-

$$\begin{aligned} (h(\varphi) + \varepsilon(R)) \ln R &= O(1) + \int_{r_0}^R \frac{\ln |f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho+1}} dr \leq \\ &\leq O(1) + \int_{E_\Delta(R)} \frac{h(\varphi) - \Delta}{r} dr + \int_{CE_\Delta(R)} \frac{h(\varphi) + \delta}{r} dr \leq \\ &\leq O(1) + (h(\varphi) + \delta) \ln R - \Delta \sigma_\Delta(R) \ln R, \quad R \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где $CE_\Delta(R) = [1, R] \setminus E_\Delta(R)$. Таким образом, $\Delta \sigma_\Delta(R) \leq \delta - \varepsilon(R) + O\left(\frac{1}{\ln R}\right) \leq \delta + o(1)$, $R \rightarrow \infty$, в силу произвольности δ отсюда следует (3.9).

Обратно, пусть для каждого $\Delta > 0$ справедливо (3.9), убедимся в справедливости (3.8). В силу (3.9), (3.10) и леммы 3.2 имеем

$$\begin{aligned} (h(\varphi) + \delta) \ln R + O(1) &\geq \int_1^R \frac{\ln |f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho+1}} dr = \\ &= \left(\int_{E_\Delta(R)} + \int_{CE_\Delta(R)} \right) \frac{\ln |f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho+1}} dr \geq \\ &\geq \int_{E_\Delta(R)} \frac{\ln |f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho+1}} dr + (h(\varphi) - \Delta)(1 - \sigma_\Delta(R)) \ln R \geq \\ &\geq o(\ln R) + (h(\varphi) - \Delta) \ln R, \quad R \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

ввиду произвольности чисел $\delta > 0$ и $\Delta > 0$ получаем (3.8). Теорема 3.1 доказана.

Функции слабо регулярного роста применяются при исследовании функций $f \in E_\rho$ с тригонометрическим индикатором внутри угла раствора π/ρ . Следующая теорема дополняет известные теоремы М. Карпайт и Б. Я. Левина ([1], гл. III, IV).

Теорема 3.2. Для того чтобы у функции $f \in E_\rho$ был тригонометрический индикатор $h(\varphi)$ внутри угла $\alpha \leq \arg z \leq \beta$, $\beta = \alpha + \frac{\pi}{\rho}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:

а) для каждого $\varepsilon > 0$ выполняется

$$\int_1^R \frac{n(r; \alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon)}{r^{\rho+1}} dr = o(\ln R), \quad R \rightarrow \infty,$$

где $n(r; \varphi_1, \varphi_2)$ — число корней функции f в секторе $\{z: |z| \leq r, \varphi_1 < \arg z < \varphi_2\}$;

б) функция f имеет слабо регулярный рост на лучах $\arg z = \alpha$ и $\arg z = \beta$.

В сторону достаточности теорему 3.2 можно усилить, заменив условие б) более слабым условием: б') $h(\alpha) = H_\rho(\alpha)$, $h(\beta) = H_\rho(\beta)$.

В частности, получаем условия, необходимые и достаточные для того, чтобы индикаторная диаграмма целой функции экспоненциального типа являлась отрезком.

Доказательство теоремы 3.2 следует из формулы Карлемана, и мы его опускаем.

§ 4. Целые функции с корнями на луче. Пусть все корни функции $f \in E_\rho$ лежат на отрицательном луче. В случае целого ρ это по теореме Линделёфа означает, что сходится интеграл

$$\int_1^\infty \frac{n(r, f)}{r^{\rho+1}} dr;$$

далее для краткости рассматриваем лишь случай нецелого ρ . Тогда равенство (1.3) принимает вид

$$J_f(R, \varphi) = \frac{\pi \cos \rho \varphi}{\sin \pi \rho} \int_1^R \frac{n(r, f)}{r^{\rho+1}} dr + O(1), \quad R \rightarrow \infty. \quad (4.1)$$

Близкое равенство использовалось И. В. Островским*.

Из формулы (4.1) следует, что функция f имеет ρ -регулярный рост на лучах $\arg z = \theta$, где θ — произвольный нуль функции $\cos^* \rho \varphi$, и

$$H_\rho(\varphi) = \limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{\pi \cos^* \rho \varphi}{\rho \sin \pi \rho} \frac{1}{\ln R} \int_1^R \frac{n(r, f)}{r^{\rho+1}} dr,$$

в частности $H_\rho(\varphi)$ — кусочно-тригонометрическая функция. По-видимому, неизвестно, каким может быть индикатор $h(\varphi)$ у целой функции $f \in E_\rho$ с корнями на луче.

В заключение этого краткого параграфа сделаем два замечания.

1. Равенство (4.1) позволяет исследовать распределение по аргументам a -точек функции $f \in E_\rho$ с корнями на отрицательном луче. Оказывается, что a — точки ($a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) в определенном смысле равномерно тяготеют к лучам, соответствующим изломам функции $(\cos \rho \varphi \cos \pi \rho)^*$, $\varphi \in [-\pi, \pi]$.

2. Результаты, аналогичные результатам этого параграфа, справедливы для целых функций, имеющих в определенном смысле мало корней внутри некоторого угла.

§ 5. Целые функции с «периодическим» предельным множеством. Далее будем использовать понятия теории предельных множеств целых и субгармонических функций конечного порядка, развитой В. С. Азарыным [6].

Для функции $f \in E_\rho$ положим $u = \ln |f|$ и рассмотрим семейство субгармонических функций

$$u_s(z) = \frac{u(sz)}{s^\rho}, \quad s \geq 1.$$

* Островский И. В. О некоторых асимптотических свойствах целых функций с вещественными отрицательными нулями // Зап. мех.-мат. ф-та Харьк. ун-та и Харьк. мат. об-ва. — 1961. — 28. — С. 23—32.

Это семейство нормально в топологии пространства обобщенных функций Л. Шварца D' . Множество предельных при $s \rightarrow \infty$ субгармонических функций обозначим через A_f . Для целых функций вполне регулярного роста в плоскости множество A_f состоит из одной функции: $A_f = \{r^\rho h(\varphi)\}$. Естественно выделять классы функций f , для которых A_f имеет простую структуру. Рассмотрим такие функции $f \in E_\rho$, для которых $A_f = \{v_t(z) : 1 \leq t \leq T\}$ (5.1), где v — субгармоническая функция, которая удовлетворяет тождеству $v(Tz) = T^\rho v(z)$ (5.2).

Теорема 5.1. Пусть u функции $f \in E_\rho$ предельное множество имеет вид (5.1). Тогда она имеет ρ -регулярный рост во всей плоскости, при этом

$$H_\rho(\varphi) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_R^{TR} \frac{\ln |f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho+1}} dr. \quad (5.3)$$

Для доказательства теоремы 5.1 нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 5.1. Пусть $v(z)$ удовлетворяет тождеству (5.2). Тогда $\forall \tau \in [1, T]$ выполняется:

$$k_v(\varphi) := \int_1^T \frac{v(re^{i\varphi})}{r^{\rho+1}} dr = \int_1^T \frac{v_\tau(re^{i\varphi})}{r^{\rho+1}} dr, \quad (5.4)$$

причем функция $k_v(\varphi)$ есть ρ -тригонометрически выпуклая функция.

Доказательство. В силу тождества (5.2) выполняется

$$\int_{T^k}^{T^{k+1}} \frac{v(re^{i\varphi})}{r^{\rho+1}} dr = \int_1^T \frac{v(re^{i\varphi})}{r^{\rho+1}} dr,$$

поэтому

$$k_v(\varphi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_1^{TN} \frac{v(re^{i\varphi})}{r^{\rho+1}} dr = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln T}{\ln R} \int_1^R \frac{v(re^{i\varphi})}{r^{\rho+1}} dr,$$

откуда следует ρ -тригонометрическая выпуклость функции k_v . Далее, $\forall \tau \in [1, T]$:

$$\begin{aligned} \int_1^T \frac{v_\tau(re^{i\varphi})}{r^{\rho+1}} dr &= \int_\tau^{T\tau} \frac{v(re^{i\varphi})}{r^{\rho+1}} dr = \left(\int_\tau^T + \int_T^{T\tau} \right) \frac{v(re^{i\varphi})}{r^{\rho+1}} dr = \\ &= \int_1^T \frac{v(re^{i\varphi})}{r^{\rho+1}} dr, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Лемма 5.2. Пусть $f \in E_p$ — целая функция с предельным множеством A_f вида (5.1). Тогда существует предел

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_R^{TR} \frac{\ln |f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho+1}} dr = k_v(\varphi), \quad (5.5)$$

где $v \in A_f$.

Доказательство. Положим $u = \ln |f|$. Тогда

$$\int_R^{TR} \frac{\ln |f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho+1}} dr = \int_1^T \frac{u_R(re^{i\varphi})}{r^{\rho+1}} dr.$$

Величину

$$\int_1^T \frac{w(re^{i\varphi})}{r^{\rho+1}} dr$$

можно рассматривать, как функционал на субгармонических функциях. Нетрудно показать, что этот функционал непрерывен в D' . Поэтому (и в силу компактности A_f в D') имеем

$$\begin{aligned} \limsup_{R \rightarrow \infty} \int_1^T \frac{u_R(re^{i\varphi})}{r^{\rho+1}} dr &= \sup_{v \in A_f} k_v(\varphi), \\ \liminf_{R \rightarrow \infty} \int_1^T \frac{u_R(re^{i\varphi})}{r^{\rho+1}} dr &= \inf_{v \in A_f} k_v(\varphi). \end{aligned}$$

Учитывая, что в силу леммы 5.1

$$\sup_{v \in A_f} k_v(\varphi) = \inf_{v \in A_f} k_v(\varphi),$$

получаем равенство (5.5).

Доказательство теоремы 5.1. Пусть T — число из правой части (5.1), $N = [\log_T R]$. Тогда в силу леммы 5.2

$$\begin{aligned} \frac{\ln T}{\ln R} \int_1^R \frac{\ln |f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho+1}} dr &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \int_{T^m}^{T^{m+1}} \frac{\ln |f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho+1}} dr + o(1) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \{k_v(\varphi) + o(1)\} + o(1) = k_v(\varphi) + o(1), \quad R \rightarrow \infty, \quad v \in A_f, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

В заключение этого параграфа приведем, не останавливаясь на деталях, несколько важных примеров целых функций с предельным множеством вида (5.1).

И. С. К. Балашовым [7] (см. также [6]) были введены и исследованы целые функции вполне регулярного роста на кривых правильного

вращения. Остановимся для простоты на случае, когда кривая правильного вращения — это логарифмическая спираль $L_\alpha(\theta) = \{\zeta = te^{i\alpha \ln t + i\theta}\}$. Пусть u функции $f \in E_\rho$ — вполне регулярный рост на спиралях $L_\alpha(\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, с индикатором $h_\alpha(\theta)$. Тогда с необходимостью функция $r^\rho h_\alpha(\theta - \alpha \ln r)$ субгармоническая и $A_f = \{v_s(z), 1 \leq s \leq \exp \frac{2\pi}{\alpha}\}$.

Этот факт вместе с доказательством авторам сообщил В. Б. Гинер.

2. Пусть P — нелинейный многочлен. Уравнение Пуанкаре* $f(mz) = P[f(z)]$, $P[f(0)] = f(0)$, $|m = P'[f(0)]| > 1$, имеет целое решение f порядка $\rho = \frac{\ln |m|}{\ln \deg P}$. Если мультипликатор m таков, что для некоторого натурального n m^n — положительное число (т. е. $\arg m$ — соизмерим с 2π), то можно показать, что A_f удовлетворяет (5.1). Из результатов Валирона следует, что функция f не является функцией вполне регулярного роста.

3. А. Э. Еременко, дополняя известный результат Н. У. Аракеяна ([2], гл. IV), недавно построил [8] целую функцию f произвольного порядка $\rho > \frac{1}{2}$ с наперед заданным счетным множеством неваннинговских дефектных значений $D_N(f)$. Анализ этой функции, проведенный в [8], показывает, что она также имеет предельное множество (5.1). Таким образом, ρ — регулярность роста (в отличие от полной регулярности, когда множество $D_N(f)$ конечно) не накладывает ограничений на структуру множества $D_N(f)$.

§ 6. Связь между ростом целой функции и распределением ее корней по аргументам. Одна теорема единственности. Пусть $h(\varphi)$ — индикатор роста функции $f \in E_\rho$. Свяжем с ним неотрицательную меру $ds_f(\varphi)$ на окружности:

$$s(\varphi) = h'(\varphi - 0) + \rho^2 \int_0^\varphi h(\theta) d\theta. \quad (6.1)$$

(При $\rho = 1$ $s(\varphi)$ есть длина дуги границы индикаторной диаграммы функции f от некоторой фиксированной точки до точки опоры опорной прямой, отвечающей направлению φ ([1] гл. I, § 19).

Теорема 6.1. Пусть $f \in E_\rho$, $z_n = r_n e^{i\psi_n}$ — корни функции f , $k(\theta)$ — произвольная ρ -тригонометрически выпуклая функция. Тогда

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln R} \sum_{1 \leq r_n < R} \frac{k(\psi_n)}{r_n^\rho} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(\varphi) ds_f(\varphi). \quad (6.2)$$

Доказательство. Из (2.2) следует, что при нецелом ρ выполняется

$$\frac{\pi}{\rho \sin \pi \rho} \sum_{1 \leq r_n < R} \frac{\cos^* \rho (\psi_n - \varphi - \pi)}{r_n^\rho} \leq (h(\varphi) + o(1)) \ln R. \quad (6.3)$$

* См., например, Валирон Ж. Аналитические функции. — М.: Гостехиздат, 1957. — 235 с.

Рассмотрим произвольную неотрицательную меру $dv(\varphi)$ на $[0, 2\pi]$ и проинтегрируем неравенство (6.3) по этой мере, разделим полученное неравенство на $2\pi \ln R$ и перейдем к верхнему пределу при $R \rightarrow \infty$. Получим

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln R} \sum_{1 < r_n < R} \frac{1}{r_n^\rho} \frac{1}{2\rho \sin \pi\rho} \int_0^{2\pi} \cos^* \rho (\psi_n - \varphi - \pi) dv(\varphi) \leq \\ \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\varphi) dv(\varphi). \quad (6.4)$$

Напомним, что при целом ρ существует взаимно однозначное соответствие между неотрицательными мерами $dv(\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ и ρ -тригонометрически выпуклыми функциями ([1], гл. 1, § 16), при этом переход от функции к мере осуществляется по (6.1) и, наоборот, функция $k(\varphi)$, отвечающая мере $dv(\varphi)$, строится по формуле

$$k(\psi) = \frac{1}{2\rho \sin \pi\rho} \int_0^{2\pi} \cos^* \rho (\psi - \varphi - \pi) dv(\varphi).$$

Поэтому

$$\int_0^{2\pi} h(\varphi) dv(\varphi) = \int_0^{2\pi} k(\varphi) ds_f(\varphi)$$

и (6.2) следует из неравенства (6.4).

То же доказательство проходит и при целом ρ с тем лишь исключением, что на меру $dv(\varphi)$ нужно накладывать дополнительное условие:

$$\int_0^{2\pi} e^{-i\rho\varphi} dv(\varphi) = 0.$$

Теорема 6.1 доказана.

Отметим, что доказанное неравенство (6.2) — точное. Знак равенства в нем достигается, например, для целых функций вполне регулярного роста на замкнутом носителе меры ν , ассоциированной с функцией $k(\varphi)$.

Смысл этой теоремы состоит в том, что коль скоро субгармоническая функция $\ln|f|$ асимптотически мажорируется субгармонической функцией $h(\varphi)r^\rho$, то в определенном смысле мажорация сохраняется и для риссовских масс этих функций, т. е. распределение корней функции f «мажорируется» мерой вида $dr^\rho \cdot ds_f(\varphi)$.

С функцией $k(\varphi)$ удобно связывать считающую функцию корней $\{z_n\}$:

$$n_k(r, f) = \sum_{r_n < r} k(\psi_n), \quad z_n = r_n e^{i\psi_n}.$$

Тогда оценку (6.2) можно переписать в виде

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln R} \int_1^R \frac{n_k(r, f)}{r^{\rho+1}} dr \leq \frac{1}{2\pi\rho} \int_0^{2\pi} k(\varphi) ds_f(\varphi). \quad (6.5)$$

Из этой оценки следует теорема единственности, запрещающая целой функции $f \in E_\rho$ с заданным индикатором иметь «слишком много» нулей в определенных направлениях. Первые утверждения такого рода были установлены в классических работах Ф. Карлсона, Т. Карлемана, Ф. и Р. Неванлинны. Дальнейшие теоремы были получены Б. Я. Левиным ([1], гл. IV, §§ 2, 3). Случай положительных корней при $\rho = 1$ был с достаточной полнотой разобран в работах В. Фукса, Ж. П. Кахана, Л. Рубела и П. Маявэна*. Эти теоремы находят применения в вопросах полноты систем аналитических функций, в аналитическом продолжении степенных рядов и во многих других задачах анализа.

Теорема 6.2. Пусть $f \in E_\rho$, $f|_\Lambda = 0$, где $\Lambda = \{r_n e^{i\psi_n}\}$, $k(\varphi)$ — произвольная неотрицательная ρ -тригонометрически выпуклая функция. Предположим, что

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln R} \int_1^R \frac{n_k(r, \Lambda)}{r^{\rho+1}} dr > \frac{1}{2\pi\rho} \int_0^{2\pi} k(\varphi) ds_f(\varphi). \quad (6.6)$$

тогда $f \equiv 0$.

Несущественно изменив доказательство, левую часть оценки (6.6) можно изменить на

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^R \frac{n_k(r, \Lambda)}{r^{\rho+1}} dr,$$

при этом заключение теоремы 6.2 остается в силе. Это же замечание относится и к другим результатам работы.

Список литературы: 1. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. — М.: ГИТТЛ, 1956. — 632 с. 2. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. — М.: Наука, 1970. — 592 с. 3. Valiron G. Sur les directions de Borel des fonctions meromorphes d'ordre finie // J. math. pure et appl. — 1931. — 10. — Р. 457 — 480. 4. Гольдберг А. А. О росте целой функции по лучу // Теория функций, функций. анализ и их прил. — 1965. — 1. — С. 164 — 175. 5. Fuchs W. H. J. On the growth of meromorphic functions on rays // Studies in Pure Math. To the Memory of Paul Turan. Budapest, 1983. — Р. 219 — 229. 6. Азарин В. С. Об асимптотическом поведении субгармонических функций конечного порядка // Мат. сб. — 1979. — 108: 2. — С. 147 — 167. 7. Балашов С. К. О функциях вполне регулярного роста по кривым правильного вращения // Изв. АН СССР. — 1976. — 40, № 3. — С. 338 — 354. 8. Еременко А. Э. О множестве дефектных значений целой функции конечного порядка // Укр. мат. журн. — 1987. — 39. — С. 30 — 37.

Поступила в редколлегию 08.07.86

* См., например, Malliavin P. Rubel L. A. On small entire functions of exponential type with given zeros // Bull. Soc. Math. France. — 1961. — 89. — Р. 175 — 206, в которой имеются ссылки на предыдущие работы.

ТЕОРИЯ КРАТНОЙ j -ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТРИЦЫ-ФУНКЦИИ С ПОЛЮСОМ НА ГРАНИЦЕ ЕДИНИЧНОГО КРУГА

Рассматривается объект J -теории аналитических матриц-функций В. П. Потапова — рациональная j -растягивающая $\left(j = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\right)$ в единичном круге ($\omega(\zeta) j \omega^*(\zeta) - j \geq 0$, $|\zeta| < 1$), j -унитарная на его границе ($\omega(\zeta) j \omega^*(\zeta) = j$, $|\zeta| = 1$) матрица-функция $\omega(\zeta)$, имеющая единственный полюс кратности n в граничной точке ζ_0 ($|\zeta_0| = 1$).

Теория такого объекта включает следующие вопросы: описание структуры $\omega(\zeta)$, отщепление $\omega(\zeta)$ от произвольной j -растягивающей матрицы-функции с полюсом соответствующей кратности в точке ζ_0 , параметризация матрицы-функции $\omega(\zeta)$ полного ранга, разложение на двучленные j -элементарные множители.

Заметим, что кратные J -элементарные матрицы-функции с полюсом внутри области исследованы автором в работах [1, 2]. Рассматривался и граничный случай, а именно: изучалась теория кратной J_2 -растягивающей $\left(J_2 = \begin{bmatrix} 0 & iI \\ -iI & 0 \end{bmatrix}\right)$ в верхней полуплоскости ($\text{Im } z > 0$), J_2 -унитарной на вещественной оси ($\text{Im } z = 0$) матрицы-функции $A(z)$ с полюсом в точке $z_0 = \infty$ [2]. Рассмотрение такого специального случая было подсказано исследованием методами J -теории степенной проблемы моментов, с которой органически связана $A(z)$.

Конечно, все утверждения для матрицы-функции $\omega(\zeta)$ можно было бы получить из соответствующих фактов для $A(z)$, если перейти с помощью дробно-линейного преобразования из верхней полуплоскости ($\text{Im } z > 0$) в единичный круг ($|\zeta| < 1$) и с помощью преобразования Кэли — от J_2 -растягивающих матриц-функций $A(z)$ к j -растягивающим матрицам-функциям $\omega(\zeta)$. Однако такой переход обычно приводит к перегруппировке определяющих параметров и это затрудняет описание объекта с помощью этих параметров.

Поэтому целесообразно рассмотреть $\omega(\zeta)$ как самостоятельный объект j -теории, а затем связать с ним кратную граничную интерполяционную задачу типа граничной проблемы Шура.

§ 1. Неравенство отщепления. Сопутствующее тождество. Структура j -элементарной матрицы-функции $\omega(\zeta)$. Отщепление. 1.1°. Неравенство отщепления. Сопутствующее тождество.

Рассмотрим сначала ограничения, налагаемые на произвольную j -растягивающую матрицу-функцию $W(\zeta)$ поведением в окрестности данного полюса ζ_0 ($|\zeta_0| = 1$), а именно — коэффициентами ее разложения в ряд Лорана.

Теорема 1.1. j -растягивающая в $|\zeta| < 1$ матрица-функция $W(\zeta)$, разлагающаяся в окрестности точки ζ_0 ($|\zeta_0| = 1$) в ряд Лорана

$$W(\zeta) = \frac{C_{-n}}{(\zeta - \zeta_0)^n} + \dots + \frac{C_{-1}}{\zeta - \zeta_0} + C_0 + C_1(\zeta - \zeta_0) + \dots + C_{n-1}(\zeta - \zeta_0)^{n-1} + \dots, \quad (1)$$

j -унитарная в окрестности полюса на единичной окружности $|\xi_0| = 1$, удовлетворяет неравенству

$$\left(\begin{array}{cc} A & -A_1 \overline{b_n(\xi)} \\ -\overline{b_n^*(\xi)} A_1^* & \frac{W(\xi) j W^*(\xi) - j}{1 - \xi \bar{\xi}} \end{array} \right) \geq 0, \quad (O)$$

где $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$;

$$A_1 = \begin{pmatrix} C_{-1}^* & C_{-2}^* & \dots & C_{-n}^* \\ C_{-2}^* & C_{-3}^* & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{-n}^* & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}; \quad (2)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -\xi_0 j & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \xi_0^2 j & \xi_0^3 j & 0 & \dots & 0 \\ -\xi_0^3 j & -2\xi_0^4 j & -\xi_0^5 j & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^n \xi_0^n j & (-1)^n C_{n-1}^* \xi_0^{n+1} j & (-1)^n C_{n-1}^2 \xi_0^{n+2} j & \dots & (-1)^n \xi_0^{2n-1} j \end{pmatrix}; \quad (3)$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} C_0 C_{-1} & \dots & C_{-n+1} \\ C_1 C_0 & \dots & C_{-n+2} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{n-1} C_{n-2} & \dots & C_0 \end{pmatrix} \quad (4), \quad b_n(\xi) = \begin{pmatrix} I \\ \frac{I}{\xi - \xi_0} \\ \dots \\ \frac{I}{(\xi - \xi_0)^n} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Доказательство. Для $n+1$ точек $z_1, z_2, \dots, z_n, \xi$ из окрестности точки ξ_0 запишем неравенство Шварца—Пика для матрицы-функции $W(\xi)$:

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{W^*(z_k) j W(z_e) - j}{1 - \bar{z}_k z_e} & \frac{W^*(z_k) - W^*(\xi)}{z_k - \xi} \\ \frac{W(z_e) - W(\xi)}{z_e - \xi} & \frac{W(\xi) j W^*(\xi) - j}{1 - \xi \bar{\xi}} \end{array} \right) \geq 0. \quad (6)$$

Умножим (6) справа на матрицу ST :

$$S = \begin{pmatrix} (z_1 - \xi_0)^n I & & & \\ & (z_2 - \xi_0)^n I & & \\ & & \ddots & \\ & & & (z_n - \xi_0)^n I \\ & & & & I \end{pmatrix},$$

$$T = \left(\begin{array}{cccc|c} \frac{I}{\varphi'_n(z_1)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{I}{\varphi'_n(z_2)} & \frac{I}{\varphi'_{n-1}(z_2)} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{I}{\varphi'_n(z_n)} & \frac{I}{\varphi'_{n-1}(z_n)} & \dots & \frac{I}{\varphi'_1(z_n)} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & I \end{array} \right) = \begin{pmatrix} T_1 & O \\ O & I \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$\varphi_{n-k+1}(z) = (z - z_k) \dots (z - z_n)$ ($k = 1, 2, \dots, n$), слева — на T^*S^* и перейдем к пределу при $z_k \rightarrow \xi_0$ (по некасательным траекториям). Элементы предельной матрицы вычисляются по формулам [1]:

$$A_{kl} = \lim_{z_p, z_q \rightarrow \xi_0} \sum_{p=k}^n \sum_{q=l}^n \frac{1}{\varphi_{n-k+1}(z_p)} \frac{\tilde{W}^*(z_p) j \tilde{W}(z_q) - (\bar{z}_p - \bar{\xi}_0)^n (z_q - \xi_0)^n j}{1 - \bar{z}_p z_q} \times \\ \times \frac{1}{\varphi_{n-l+1}(z_q)} = \frac{1}{(n-k)! (n-l)!} \frac{\partial^{2n-k-l}}{\partial \bar{\xi}^{n-k} \partial \eta^{n-l}} \Phi(\xi, \eta) \Big|_{\substack{\xi = \xi_0 \\ \eta = \bar{\xi}_0}}, \\ (l, k = 1, 2, \dots, n),$$

где для сокращения записи через $\tilde{W}(\xi)$ обозначена матрица-функция $\tilde{W}(\xi) = (\xi - \xi_0)^n W(\xi) = C_{-n} + C_{-n+1}(\xi - \xi_0) + \dots + C_{n-1}(\xi - \xi_0)^{2n-1} + \dots$, а

$$\Phi(\xi, \eta) = \frac{\tilde{W}^*(\bar{\xi}) j \tilde{W}(\eta) - (\xi - \bar{\xi}_0)^n (\eta - \xi_0)^n j}{1 - \xi \eta}.$$

Выполнив вычисления, связанные с дифференцированием $\Phi(\xi, \eta)$ и, учитывая при преобразовании получаемых выражений соотношения, вытекающие из тождества $jW^*\left(\frac{1}{\bar{\xi}}\right)jW(\xi) \equiv I$:

$$\begin{vmatrix} \xi_0^n C_{-n}^* j & \xi_0^{n-1} C_{-n+1}^* j & \dots & \xi_0 C_{-1}^* j \\ 0 & \xi_0^n C_{-n}^* j & \dots & \xi_0^2 C_{-2}^* j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \xi_0^{n-2} C_{-n+2}^* j \\ 0 & 0 & \dots & \xi_0^{n-1} C_{-n+1}^* j \\ 0 & 0 & \dots & \xi_0^n C_{-n}^* j \end{vmatrix} \times \\ \times \begin{vmatrix} (-1)^{n-1} \bar{\xi}_0^{n-1} (C_{-n+1} + C_{-n-2} \bar{\xi}_0 C_{-n+2} + \dots + \xi_0^{n-2} C_{-1}) \\ (-1)^{n-2} \bar{\xi}_0^{n-1} (C_{-n+1} + C_{-n-3} \bar{\xi}_0 C_{-n+2} + \dots + \xi_0^{n-3} C_{-2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{\xi}_0^{n-1} (C_{-n+1} + \xi_0 C_{-n+2}) \\ -\bar{\xi}_0^{n-1} C_{-n+1} \\ \bar{\xi}_0^n C_{-n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad (8)$$

придем к записи блока $\|A_{kl}\|_{k,l=1}^n$ в виде произведения матриц $A_1 \times A_2 \times A_3$, определенных формулами (2), (3), (4).

Для вычисления элементов $A_{k,n+1}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) пользуемся формулой

$$A_{k,n+1} = \lim_{z_p \rightarrow \xi_0} \sum_{p=k}^n \frac{[W^*(z_p) - W^*(\xi)] (\bar{z}_p - \bar{\xi}_0)^n}{\bar{z}_p - \bar{\xi}} = \\ = \frac{1}{(n-k)!} \left\{ \frac{\partial^{n-k}}{\partial \bar{\xi}^{n-k}} F_1(\xi, \bar{\xi}) \Big|_{\xi = \xi_0} - W^*(\xi) \frac{\partial^{n-k}}{\partial \bar{\xi}^{n-k}} F_2(\xi, \bar{\xi}) \Big|_{\xi = \xi_0} \right\},$$

где

$$F_1(\xi, \bar{\xi}) = \frac{W^*(\bar{\xi})(\xi - \bar{\xi}_0)^n}{\xi - \bar{\xi}}, \quad F_2(\xi, \bar{\xi}) = \frac{(\xi - \bar{\xi}_0)^n}{\xi - \bar{\xi}}.$$

Подсчет производных $F_1(\xi, \bar{\xi})$ и $F_2(\xi, \bar{\xi})$ приводит к выражению

$$A_{k, n+1} = - \sum_{p=k}^n \frac{C_{-p}^*}{(\bar{\xi} - \bar{\xi}_0)^{p-k+1}}, \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

что и завершает доказательство теоремы 1.1.

Сопутствующее тождество для блока $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ неравенства (0) может быть получено из неравенства

$$\left(\frac{W^*(z_k) j W(z_e) - j}{1 - \bar{z}_k z_e} \right) \geq 0$$

путем преобразования последнего с помощью матрицы T_1 (7) и последующего перехода к пределу при $z_k \rightarrow \xi_0$. Оно имеет вид

$$\begin{pmatrix} C_{-1}^* \\ C_{-2}^* \\ \dots \\ C_{-n}^* \end{pmatrix} j (C_{-1} C_{-2}, \dots, C_{-n}) = A R_1 + R_1^* A - R_1^* A R_1, \quad (9)$$

де

$$R_1 = \begin{bmatrix} \frac{I}{(1 - \xi_0)} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{I}{(1 - \xi_0)^2} & \frac{I}{(1 - \xi_0)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{I}{(1 - \xi_0)^n} & \frac{I}{(1 - \xi_0)^{n-1}} & \dots & \frac{I}{(1 - \xi_0)} \end{bmatrix} =$$

$$= \left(I_n - \begin{pmatrix} \xi_0 I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ I & \xi_0 I & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I & \xi_0 I \end{pmatrix} \right)^{-1}.$$

Соотношение (0) будем называть *основным матричным неравенством отщепления*. Оно играет существенную роль как в определении структуры j -элементарной матрицы-функции $\omega(\xi)$, так и в отщеплении $\omega(\xi)$ от $W(\xi)$.

2.1°. Структура кратной j -элементарной матрицы-функции определяется следующей теоремой:

Теорема 2.1. Матрица-функция

$$\omega(\xi) = B_0 + \frac{B_{-1}}{\xi - \xi_0} + \dots + \frac{B_{-n}}{(\xi - \xi_0)^n} \left(\omega(1) = I; \sum_{k=0}^n \frac{B_{-k}}{(1 - \xi_0)^k} = I \right)$$

является j -элементарной в том и только в том случае, когда выполнены следующие два условия: **(А)** $A_\omega = A_1^{(\omega)} \cdot A_2 \cdot A_3^{(\omega)} \geq 0$,

$$A_1^{(\omega)} = \begin{pmatrix} B_{-1}^* & B_{-2}^* & \cdots & B_{-n}^* \\ B_{-2}^* & B_{-3}^* & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{-n}^* & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3^{(\omega)} = \begin{pmatrix} B_0 & B_{-1} & \cdots & B_{-n+1} \\ 0 & B_0 & \cdots & B_{-n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_0 \end{pmatrix},$$

а матрица A_2 определяется формулой (3),

$$\textbf{(B)} \quad j \left[\frac{I}{1-\xi_0}, \dots, \frac{I}{(1-\xi_0)^n} \right] A_1^{(\omega)*} = \left[\frac{I}{1-\bar{\xi}_0}, \dots, \frac{I}{(1-\bar{\xi}_0)^n} \right] A_\omega.$$

При этом j -форма $\omega(\xi)$ представляется в виде

$$\textbf{(C)} \quad \frac{\omega^*(\xi) j \omega(\xi) - j}{1 - \bar{\xi} \xi} = b_n^*(\xi) A_\omega b_n(\xi).$$

Необходимость условий **(А)** следует из неотрицательности левого углового блока неравенства отщепления (0), записанного для j -растягивающей матрицы-функции $\omega(\xi)$.

Условия **(В)** вытекают из тождества $\omega^{-1}(\xi) \omega(\xi) \equiv I$, в котором $\omega^{-1}(\xi)$ в силу j -унитарности $\omega(\xi)$ на границе вычисляется по формуле $\omega^{-1}(\xi) = j \omega^* \left(\frac{1}{\bar{\xi}} \right) j$.

Для доказательства достаточности условий **(А)** и **(В)** вычисляем f -форму $\omega^*(\xi) j \omega(\xi) - j$ и преобразуем ее с помощью условий **(В)** и сопутствующего тождества (8), переписанного для матрицы A_ω . Несложные выкладки приводят нас к равенству $\omega^*(\xi) j \omega(\xi) - j = (1 - \bar{\xi} \xi) b_n^*(\xi) A_\omega b_n(\xi)$, из которого усматривается j -растягиваемость $\omega(\xi)$ в единичном круге $\omega^*(\xi) j \omega(\xi) - j \geq 0$ ($1 - \bar{\xi} \xi > 0$) и j -унитарность $\omega(\xi)$ на его границе $\omega^*(\xi) j \omega(\xi) - j = 0$, ($1 - \bar{\xi} \xi = 0$), т. е. j -элементарность $\omega(\xi)$.

3.1°. Здесь мы сформулируем теорему об отщеплении $\omega(\xi)$ от j -растягивающей матрицы-функции $\omega(\xi)$.

Теорема 3.1. Пусть j -растягивающая матрица-функция $W(\xi)$, j -унитарная в окрестности точки ξ_0 ($|\xi_0| = 1$) на единичной окружности, имеет в точке ξ_0 полюс кратности n со следующим Лорановым разложением:

$$W(\xi) = \frac{C_{-n}}{(\xi - \xi_0)^n} + \cdots + \frac{C_{-1}}{\xi - \xi_0} + C_0 + C_1(\xi - \xi_0) + \cdots + C_{n-1}(\xi - \xi_0)^{n-1} + \cdots$$

и пусть Q — решение уравнения $AQ = -A_1$, где $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$, A_1, A_2, A_3 определены по формулам (2) — (4), а матрицы $B_{-1}, B_{-2}, \dots, B_{-n}$ определены по формулам

$$\begin{bmatrix} B_{-1} & B_{-2} & \cdots & B_{-n} \\ B_{-2} & B_{-3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{-n} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} b_n(1) = -A_1^* Q b_n(1) j. \quad (10)$$

Тогда

- 1) матрица-функция $\omega_0(\zeta) = B_0 + \frac{B_{-1}}{\zeta - \zeta_0} + \dots + \frac{B_{-n}}{(\zeta - \zeta_0)^n}$ ($\omega_0(1) = I$) является j -элементарной;
- 2) $\omega_0(\zeta)$ отщепляется от $W(\zeta)$ слева: $W(\zeta) = \omega_0(\zeta) W_1(\zeta)$;
- 3) частное $W_1(\zeta)$ является голоморфной в точке ζ_0 матрицей-функцией;
- 4) порядок полюса у обратной матрицы $W_1^{-1}(\zeta)$ в точке ζ_0 не повышается.

Доказательство теоремы 3.1 приведено в [3].

§ 2. j -элементарные матрицы-функции полного ранга и их параметризация. Среди j -элементарных матриц-функций $\omega(\zeta)$ особое место занимают матрицы-функции *полного ранга*. Именно такие j -элементарные матрицы-функции теснейшим образом связаны с общим решением усеченных задач типа проблем Неванлинны — Пика, моментов и др., исследуемых методами j -теории В. П. Потапова [2, 4, 5].

Определение матрицы-функции полного ранга вытекает из общего факта, известного для произвольной j -растягивающей матрицы-функции $W(\zeta)$: для любой j -растягивающей матрицы-функции $W(\zeta)$ $j = \begin{pmatrix} -I_q & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$ ранг старшего коэффициента лоранового разложения в окрестности некоторого полюса ζ_0 :

$$W(\zeta) = \frac{C_{-n}}{(\zeta - \zeta_0)^n} + \dots \quad (|\zeta_0| = 1)$$

не превосходит $\min(p, q) : \text{rang } C_{-n} \leq \min(p, q)$.

Из него, в частности, следует, что ранг старшего коэффициента j -элементарной матрицы-функции $\omega(\zeta)$ при $j = \begin{pmatrix} -I_m & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$ не превосходит $m : \text{rang } B_{-n} \leq m$.

Кратную j -элементарную матрицу-функцию

$$\omega(\zeta) = B_0 + \frac{B_{-1}}{\zeta - \zeta_0} + \dots + \frac{B_{-n}}{(\zeta - \zeta_0)^n} \quad (\omega(1) = I, |\zeta_0| = 1)$$

будем называть *матрицей-функцией полного ранга*, если ее старший коэффициент B_{-n} имеет максимально возможный ранг m :

$$\text{rang } B_{-n} = m.$$

Для таких объектов j -теории справедлива следующая

Теорема 1.2. (о параметризации). Для каждой j -элементарной матрицы-функции

$$\omega(\zeta) = \sum_{k=0}^n \frac{B_{-k}}{(\zeta - \zeta_0)^k}, \quad \sum_{k=0}^n \frac{B_{-k}}{(1 - \zeta_0)^k} = I, \quad |\zeta_0| = 1$$

полного ранга однозначно определяются «параметры» — квадратные матрицы m -го порядка $s_0, s_1, \dots, s_{2n-1}$, удовлетворяющие условиям $I - s_0 s_1^* = 0$,

$$S = \widehat{S} \cdot S_0 \cdot \widehat{S}^* > 0,$$

где

$$\widehat{S} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & \dots & s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-1} \end{bmatrix}; \quad \widehat{S}^* = \begin{bmatrix} s_0^* & s_1^* & \dots & s_{n-1}^* \\ 0 & s_0^* & \dots & s_{n-2}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & s_0^* \end{bmatrix};$$

$$S_0 = \begin{bmatrix} \zeta_0 I & -\zeta_0^2 I & \zeta_0^3 I & \dots & (-1)^{n-1} \zeta_0^n I \\ 0 & -\zeta_0^3 I & 2\zeta_0^4 I & \dots & (-1)^{n-1} C'_{n-1} \zeta_0^{n+1} I \\ 0 & 0 & \zeta_0^5 I & \dots & (-1)^{n-1} C_{n-1}^2 \zeta_0^{n+2} I \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (-1)^{n+1} \zeta_0^{2n-1} I \end{bmatrix},$$

такие, что $\omega(\zeta)$ допускает представление

$$\omega(\zeta) = I + \frac{1-\zeta}{\zeta} j \begin{bmatrix} b^*(\zeta) \\ -c^*(\zeta) \end{bmatrix} S^{-1} [b(1), -c(1)], \quad \zeta = \frac{1}{\bar{\zeta}}, \quad (11)$$

где, как и раньше,

$$b(\zeta) = \begin{bmatrix} \frac{I}{\zeta - \zeta_0} \\ I \\ \frac{I}{(\zeta - \zeta_0)^n} \end{bmatrix}, \quad c(\zeta) = \begin{bmatrix} s_0 & 0 & \dots & 0 \\ s_1 & s_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_{n-2} & \dots & s_0 \end{bmatrix} b(\zeta) = \widehat{S}^* \cdot b(\zeta).$$

Наоборот, любая матрица-функция указанного вида (11) является кратной j -элементарной функцией полного ранга.

Доказательство. 1. Пусть

$$\omega(\zeta) = \sum_{k=0}^n \frac{B_{-k}}{(\zeta - \zeta_0)^k} = I + (1 - \zeta) \overline{b^*(\zeta)} A_1^{(\omega)*} b(1) -$$

произвольная кратная j -элементарная матрица-функция. Для нее справедливо неравенство отщепления

$$\begin{pmatrix} A_\omega & -A_1^{(\omega)} \overline{b(\zeta)} \\ -\overline{b^*(\zeta)} A_1^{(\omega)*} & \frac{\omega(\zeta) j \omega^*(\bar{\zeta}) - j}{1 - \zeta \bar{\zeta}} \end{pmatrix} \geq 0. \quad (O_\omega)$$

По лемме о неотрицательной блок-матрице уравнение $A_\omega X = -A_1^{(\omega)} \overline{b(\zeta)}$ имеет решение, и если $X = Q \overline{b(\zeta)}$, то Q будет решением матричного уравнения $A_\omega Q = -A_1^{(\omega)}$ (12).

Покажем сначала, что $\omega(\zeta)$ представима в виде $\omega(\zeta) = I + (1 - \zeta) \overline{b^*(\zeta)} Q^* A_\omega Q \overline{b(1)} j$ (13), где Q — любое решение (12).

В самом деле, опираясь на условие (B) элементарности $\omega(\zeta)$ и (12), вычислим

$$Q^* A_\omega Q \overline{b(1)} j = -Q^* A_1^{(\omega)} \overline{b(1)} j = -Q^* A_\omega b(1) = A_1^{(\omega)*} b(1), \quad (14)$$

что и доказывает (13).

2. Будем теперь считать, что $\omega(\zeta)$ имеет полный ранг: $\text{rang } B_{-n} = m$. Подберем неособенную матрицу T_0 так, чтобы имело место равенство

$$T_0 A_1^{(\omega)} = \begin{bmatrix} I & s_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & I & s_0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & s_{n-1} & 0 & s_{n-2} & \dots & I & s_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} J A_2, \quad J = \begin{pmatrix} j \\ i \\ \vdots \\ j \end{pmatrix},$$

где A_2 определена формулой (3).

Такая матрица T_0 существует и имеет вид

$$T_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & t_0 \\ 0 & 0 & \dots & t_0 & t_1 \\ 0 & 0 & \dots & t_1 & t_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & t_0 & \dots & t_{n-3} & t_{n-2} \\ t_0 & t_1 & \dots & t_{n-2} & t_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (-1)^{n-1} \bar{\zeta}_0^n I \\ (-1)^{n-2} \bar{\zeta}_0^{n-1} I \\ \vdots \\ -\bar{\zeta}_0^2 I \\ I \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \bar{\zeta}_0^{n-2} I & C_{n-2}^{n-3} \bar{\zeta}_0^{n-3} I & \dots & C_{n-2} \bar{\zeta}_0 I & I & 0 \\ 0 & \bar{\zeta}_0^{n-3} I & \dots & C_{n-3} \bar{\zeta}_0 I & I & 0 \\ 0 & 0 & \dots & C_{n-4} \bar{\zeta}_0 I & I & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

Тщательная проверка убеждает в том, что матрица T_0 «уплотняет» одновременно с $A_1^{(\omega)}$ и матрицу A_ω :

$$T_0 A_\omega T_0^* = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 & \dots & a_{1n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 & \dots & a_{2n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & a_{2n} & 0 & \dots & a_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = S = \widehat{S} \cdot S_0 \cdot \widehat{S}.$$

Так как сейчас равенство $A_\omega Q = -A_1^{(\omega)}$ можно переписать в виде

$$T_0 A_\omega T_0^* \cdot T_0^{*-1} Q = -T_0 A_1^{(\omega)}, \quad (15)$$

то среди решений $T_0^{*-1} Q$ уравнения (15) найдется и решение вида

$$(T_0^{*-1} Q)_0 = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1,2n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{2n-1,1} & q_{2n-1,2} & \cdots & q_{2n-1,2n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Структура матриц $T_0 A_\omega T_0^*$, $(T_0^{*-1} Q)_0$, $T_0 A_1^{(\omega)}$ позволяет уменьшить размерность элементов равенства $T_0 A_\omega T_0^* \cdot (T_0^{*-1} Q)_0 = -T_0 A_1^{(\omega)}$:

$$\begin{aligned} S \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1,2n} \\ q_{31} & q_{32} & \cdots & q_{3,2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{2n-1,1} & q_{2n-1,2} & \cdots & q_{2n-1,2n} \end{bmatrix} = \\ = - \begin{bmatrix} I & s_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & I & s_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & s_{n-1} & 0 & s_{n-2} & \cdots & I & s_0 \end{bmatrix} \cdot J \cdot \bar{A}_2. \end{aligned} \quad (16)$$

Из последнего соотношения видно, что матрица S неособенная, и поэтому

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1,2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{2n-1,1} & q_{2n-1,2} & \cdots & q_{2n-1,2n} \end{bmatrix} = \\ = -S^{-1} \begin{bmatrix} I & s_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & I & s_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & s_{n-1} & 0 & s_{n-2} & \cdots & I & s_0 \end{bmatrix} \cdot J \cdot \bar{A}_2. \end{aligned} \quad (17)$$

Но тогда

$$\begin{aligned} Q^* A_\omega Q &= Q^* T_0^{-1} \cdot T_0 A_\omega T_0^* \cdot T_0^{*-1} Q = \\ &= \begin{bmatrix} \dot{q}_{11} & \cdots & \dot{q}_{n-1,1} \\ \dot{q}_{12} & \cdots & \dot{q}_{n-1,2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{q}_{1,2n} & \cdots & \dot{q}_{n-1,2n} \end{bmatrix} S \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1,2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{2n-1,1} & q_{2n-1,2} & \cdots & q_{2n-1,2n} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

г. е.

$$Q^* A_\omega Q = (\bar{J} \bar{A}_2)^* \begin{bmatrix} I & 0 & \dots & 0 \\ s_0^* & s_1^* & \dots & s_{n-1}^* \\ 0 & I & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I \\ 0 & 0 & \dots & s_0^* \end{bmatrix} \times \\ \times S^{-1} \begin{bmatrix} I & s_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & I & s_0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & s_{n-1} & 0 & s_{n-2} & \dots & I & s_0 \end{bmatrix} (\bar{J} \bar{A}_2). \quad (18)$$

Наконец, учитывая легко проверяемые соотношения $\bar{b}^*(\zeta) (\bar{J} \bar{A}_2)^* =$
 $= \frac{1}{\zeta} b^*(\tilde{\zeta})$, $\tilde{\zeta} = \frac{1}{\zeta}$ (19), $(\bar{J} \bar{A}_2) \bar{b}(1) = b(1)$ (20), перепишем $\omega(\zeta)$ (13)
 в виде

$$\omega(\zeta) = I + \frac{1-\zeta}{\zeta} j b^*(\tilde{\zeta}) \begin{bmatrix} I & 0 & \dots & 0 \\ -s_0^* & -s_1^* & \dots & -s_{n-1}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I \\ 0 & 0 & \dots & -s_0^* \end{bmatrix} \times \\ \times S^{-1} \begin{bmatrix} I & s_0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -s_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -s_{n-1} & \dots & I & -s_0 \end{bmatrix} b(1).$$

Тем самым показано, что $\omega(\zeta)$ представляется в виде

$$\omega(\zeta) = I + \frac{1-\zeta}{\zeta} j \begin{bmatrix} b^*(\tilde{\zeta}) \\ -c^*(\tilde{\zeta}) \end{bmatrix} S^{-1} [b(1), -c(1)]. \quad (21)$$

3. Пусть теперь матрицы $s_0, s_1, \dots, s_{2n-1}$ удовлетворяют соотно-
 шениям $I - s_0 s_0^* = 0$, $S = \hat{S} \cdot S_0 \cdot \hat{S}^* > 0$ и пусть $\omega(\zeta)$ имеет вид (20).

Мы покажем, что $\omega(\zeta)$ является j -элементарной матрицей полного
 ранга. С этой целью вычислим ее j -форму, используя для ее преобра-
 зования сопутствующее тождество* для блока S :

$$- [b(1), -c(1)] j \begin{bmatrix} b^*(1) \\ -c^*(1) \end{bmatrix} = R_1 S + S R_1^* - S \quad (22)$$

и равенства

$$R_1 b(\tilde{\zeta}) = - \frac{b(\tilde{\zeta}) - b(1)}{\tilde{\zeta} - 1}, \quad R_1 c(\tilde{\zeta}) = - \frac{c(\tilde{\zeta}) - c(1)}{\tilde{\zeta} - 1}.$$

* Оно легко получается из сопутствующего тождества (9) для блока A не-
 равенства отщепления (0).

В результате j -форма приобретает вид

$$\omega(\xi) j \omega^*(\xi) - j = \frac{1 - \xi \bar{\xi}}{\xi \bar{\xi}} j \begin{bmatrix} b^*(\tilde{\xi}) \\ -c^*(\tilde{\xi}) \end{bmatrix} S^{-1} [b(\tilde{\xi}), -c(\tilde{\xi})] j, \quad (23)$$

откуда и следует j -элементарность $\omega(\xi)$.

4. Убедимся теперь в том, что $\omega(\xi)$ имеет полный ранг. В самом деле, учитывая (14), (18), (19), (22), имеем

$$\begin{aligned} A_1^{(\omega)*} b(1) j b^*(1) A_1^{(\omega)} &= Q^* A_\omega Q \overline{b(1)} j \overline{b^*(1)} Q^* A_\omega Q = \\ &= (J \bar{A}_2)^* \begin{bmatrix} I & 0 & \dots & 0 \\ s_0^* & s_1^* & \dots & s_{n-1}^* \\ 0 & 0 & \dots & I \\ 0 & 0 & \dots & s_0^* \end{bmatrix} S^{-1} [b(1), -c(1)] j \begin{pmatrix} b^*(1) \\ -c^*(1) \end{pmatrix} \times \\ &\quad \times S^{-1} \begin{bmatrix} I & s_0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & s_{n-1} & \dots & I & s_0 \end{bmatrix} \underbrace{\{-R_1 S - S R_1^* + S\}}_{(J \bar{A}_2)}, \end{aligned}$$

из которого вытекает соотношение

$$\frac{1}{1 - \xi_0} \frac{1}{1 - \bar{\xi}_0} B_{-n} j B_{-n+1}^* = \frac{\xi_0^2}{(1 - \xi_0)^2} \begin{bmatrix} I \\ s_0^* \end{bmatrix} \alpha_{nn} [I, s_0],$$

где

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} = S^{-1}.$$

Но тогда $\text{rang } B_{-n} j B_{-n+1}^* = m$, а значит и $\text{rang } B_{-n} = m$.

5. В заключение покажем, что параметры $s_0, s_1, \dots, s_{2n-1}$ в представлении (21) определяются однозначно. Действительно, предположение о существовании двух различных представлений

$$\begin{aligned} \omega(\xi) &= I + \frac{1 - \xi}{\xi} j \begin{bmatrix} b^*(\tilde{\xi}) \\ -d^*(\tilde{\xi}) \end{bmatrix} P^{-1} [b(1), -d(1)] = \\ &= I + \frac{1 - \xi}{\xi} j \begin{bmatrix} b^*(\tilde{\xi}) \\ -c^*(\tilde{\xi}) \end{bmatrix} S^{-1} [b(1), -c(1)] \end{aligned}$$

приводит к равенству j -форм

$$\begin{aligned} \frac{\omega(\xi) j \omega^*(\xi) - j}{1 - \xi \bar{\xi}} &= \frac{1}{\xi \bar{\xi}} j \begin{bmatrix} b^*(\tilde{\xi}) \\ -d^*(\tilde{\xi}) \end{bmatrix} P^{-1} [b(\tilde{\xi}), -d(\tilde{\xi})] j = \\ &= \frac{1}{\xi \bar{\xi}} j \begin{bmatrix} b^*(\tilde{\xi}) \\ -c^*(\tilde{\xi}) \end{bmatrix} S^{-1} [b(\tilde{\xi}), -c(\tilde{\xi})] j, \end{aligned}$$

а значит, и к равенству блоков

$$b^*(\tilde{\zeta}) P^{-1} b(\tilde{\zeta}) = b^*(\tilde{\zeta}) S^{-1} b(\tilde{\zeta}), \quad b^*(\tilde{\zeta}) P^{-1} d(\tilde{\zeta}) = b^*(\tilde{\zeta}) S^{-1} c(\tilde{\zeta}).$$

Но тогда $P^{-1} = S^{-1}$, $d(\tilde{\zeta}) = c(\tilde{\zeta})$. Следовательно, $s_k = s_k^{(1)}$ для $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, т. е. $\widehat{P} = \widehat{S}$. Кроме того,

$$\widehat{P} \cdot S_0 \cdot \widehat{P} = P = S = \widehat{S} \cdot S_0 \cdot \widehat{S}.$$

Из последнего равенства в силу неособенности треугольных матриц S_0 , \widehat{S} и вытекает $\widehat{P} = \widehat{S}$, т. е. равенство матриц $s_k = s_k^{(1)}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1, n, \dots, 2n-1$.

Теорема доказана полностью.

Следствие (*частная теорема о параметризации*). Для каждой двучленной j -элементарной матрицы-функции

$$\beta(\zeta) = I - \frac{1-\zeta}{(1-\zeta_0)(\zeta-\zeta_0)} \varepsilon, \quad \varepsilon_j \geq 0, \quad \varepsilon^2 = 0$$

полного ранга однозначно определяются матрицы s_0, s_1 , удовлетворяющие условиям $I - s_0 s_0^* = 0$, $\zeta_0 s_1 s_0^* > 0$ такие, что $\beta(\zeta)$ допускает представление

$$\beta(\zeta) = I + \frac{1-\zeta}{(1-\zeta_0)(\zeta-\zeta_0)} j \left[\begin{array}{c} I \\ -s_0^* \end{array} \right] (\zeta_0 s_1 s_0^*)^{-1} [I, -s_0], \quad (24)$$

Наоборот, любая матрица-функция указанного вида является j -элементарной функцией полного ранга.

2.2°. В заключение остановимся на разложении кратной j -элементарной матрицы-функции полного ранга на параметризованные двучленные j -элементарные множители.

С этой целью рассмотрим две параметризованные кратные j -элементарные матрицы-функции с полюсами в точке ζ_0 ($|\zeta_0| = 1$) кратности n и $n-1$ соответственно:

$$\omega_n(\zeta) = I + \frac{1-\zeta}{\zeta} j \left[\begin{array}{c} b_n^*(\tilde{\zeta}) \\ -c_n^*(\tilde{\zeta}) \end{array} \right] S_n^{-1} [b_n(1), -c_n(1)],$$

$$\omega_{n-1}(\zeta) = I + \frac{1-\zeta}{\zeta} j \left[\begin{array}{c} b_{n-1}^*(\tilde{\zeta}) \\ -c_{n-1}^*(\tilde{\zeta}) \end{array} \right] S_{n-1}^{-1} [b_{n-1}(1), -c_{n-1}(1)]$$

и выполним деление $\omega_n(\zeta)$ на $\omega_{n-1}(\zeta)$ слева: $\beta_n(\zeta) = \omega_{n-1}^{-1}(\zeta) \omega_n(\zeta)$.

После преобразования частное удастся записать в виде

$$\begin{aligned} \beta_n(\zeta) = I + \frac{(1-\zeta)(1-\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0} j \left\{ \left[\begin{array}{c} b_n^*(1) \\ -c_n^*(1) \end{array} \right] \right\} S_n^{-1} [b_n(1), -c_n(1)] - \\ - \left[\begin{array}{c} b_{n-1}^*(1) \\ -c_{n-1}^*(1) \end{array} \right] S_{n-1}^{-1} [b_{n-1}(1), -c_{n-1}(1)] \}. \end{aligned}$$

Осуществляя далее деление $\omega_{n-1}(\zeta)$ на $\omega_{n-2}(\zeta)$ слева и т. д., приходим к следующему разложению:

$$\begin{aligned}\omega_n(\zeta) &= \beta_1(\zeta) \beta_2(\zeta) \dots \beta_n(\zeta), \\ \beta_k(\zeta) &= I + \frac{(1-\zeta)(1-\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0} j \left\{ \begin{bmatrix} b_k^*(1) \\ -c_k^*(1) \end{bmatrix} S_k^{-1} [b_k(1), -c_k(1)] - \right. \\ &\quad \left. - \begin{bmatrix} b_{k-1}^*(1) \\ -c_{k-1}^*(1) \end{bmatrix} S_{k-1}^{-1} [b_{k-1}(1), -c_{k-1}(1)] \right\} \quad (k=1, 2, \dots, n).\end{aligned}$$

Список литературы: 1. Ковалишина И. В. Аддитивное разложение произвольной реактивной матрицы-функции // Изв. АН АрмССР. — 1971. — 6, № 1. — С. 43—60. 2. Ковалишина И. В. Матричные аналоги некоторых дискретных интерполяционных задач анализа. — М., 1982. — С. 16—27. Деп. в ВИНТИ 21.01.82, № 249. 3. Ковалишина И. В. Краткая граничная интерполяционная проблема Неванлинны — Пика для сжимающих в единичном круге матриц-функций. — М., 1986. — С. 20—27. Деп. в ВИНТИ 03.01.86, № 95—В86. 4. Ковалишина И. В., Потапова В. П. Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны — Пика // ДАН Арм. ССР. — 1974. — 59, № 1. — С. 17—22. 5. Ковалишина И. В. Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач // Изв. АН СССР. — 1983. — 47, № 3. — С. 455—497.

Поступила в редколлегию 29.04.85

УДК 517.55

В. Н. ЛОГВИНЕНКО

О ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЯХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА, МЕДЛЕННО РАСТУЩИХ ВДОЛЬ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ГИПЕРПЛОСКОСТИ

Через C^n обозначается, как обычно, n -мерное линейное комплексное пространство векторов $z = (z_1, \dots, z_n)$, через R^n — вещественная гиперплоскость в C^n . Пространство C^n наделяется метриками, порожденными нормами: $|z|_p = \{|z_1|^p + \dots + |z_n|^p\}^{1/p}$, $1 \leq p < \infty$; $|z|_\infty = \max \{|z_j| : j = 1, \dots, n\}$. Через $K(x, h)$, $x \in R^n$, $h > 0$ обозначается гиперкуб $\{y \in R^n : |y - x|_\infty \leq h\}$, через $B(x, h)$ — гипершар $\{y \in R^n : |y - x|_2 \leq h\}$. Измеримое множество $E \subset R^n$ называется плотным относительно $F \subset R^n$, если для некоторых постоянных $L < \infty$ и $\delta > 0$ $\inf \{|E \cap K(x, L)| : x \in F\} = \delta$. Здесь под $|A|$ понимается лебегова мера множества A . При $F = R^n$ множество E называется относительно плотным. Множество $E \subset R^n$ называется ε -сетью для $F \subset R^n$, если $\sup \{\inf \{|y - x|_1 : x \in E\} : y \in F\} = \varepsilon (< \infty)$.

Говорят, что целая функция $f(z)$, $z \in C^n$, имеет экспоненциальный тип не выше σ , если величина $\sup \{|f(z)| \exp(-A|z|_1) : z \in C^n\}$ конечна при любом $A > \sigma$. Если, кроме того, эта величина бесконечна при любом $A < \sigma$, то экспоненциальный тип $f(z)$ равен σ . Классический результат М. Картрайт [1] описывает важное в приложениях

свойство таких функций: для любой целой функции $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, экспоненциального типа $\sigma < \pi$ справедлива оценка $\sup \{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\} \leq C \sup \{|f(n)| : n \in \mathbb{Z}\}$, где конечная величина $C = C_\sigma$ не зависит от f . Теорема Картрайт неоднократно уточнялась и обобщалась, но при этом до недавнего прошлого речь шла о функциях одного комплексного переменного. Простой многомерный аналог этой теоремы легко получить редукцией к одному переменному, если множество $E \subset \mathbb{R}^n$, на котором целая функция ограничена априори, является прямым произведением подмножеств вещественной оси. В начале семидесятых годов были получены следующие два многомерных аналога результата Картрайт, в которых это дополнительное условие отсутствует.

Теорема А (Б. Я. Левин [2]). Пусть E — относительно плотное подмножество \mathbb{R}^n . Тогда для любой целой функции $f(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, экспоненциального типа не выше σ выполнено неравенство $\sup \{|f(x)| : x \in \mathbb{R}^n\} \leq \Gamma \sup \{|f(x)| : x \in E\}$ (1), где конечная величина $\Gamma = \Gamma(\sigma, E)$ не зависит от f .

В дальнейшем под $\Gamma(\sigma, E)$ понимается наименьшая из величин, для которых неравенство (1) выполнено для всех $f(z)$, удовлетворяющих условию теоремы.

Теорема Б [3]. Пусть E — ε -сеть в \mathbb{R}^n , а для числа $\sigma \in (0, \infty)$ справедлива оценка $\sigma \varepsilon < (2(|en| + 1))^{-1}$. Тогда для любой целой функции $f(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, экспоненциального типа не выше σ выполняется неравенство $\sup \{|f(x)| : x \in \mathbb{R}^n\} \leq (1 - \sigma \varepsilon)^{-1} \sup \{|f(x)| : x \in E\}$.

Используя аппроксимационный метод, развитый в [3], нетрудно доказать теорему А и следующее утверждение, являющееся комбинацией теорем А и Б.

Теорема 1. Пусть F — относительно плотное подмножество \mathbb{R}^n , а E — ε -сеть для F , причем $\Gamma(2(|en| + 1)\sigma, F)\varepsilon < (2(|en| + 1))^{-1}$. Тогда для любой целой функции $f(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, экспоненциального типа не выше σ справедлива оценка $\sup \{|f(x)| : x \in \mathbb{R}^n\} \leq \Gamma(\sigma, F) \times (1 - \Gamma(\sigma, F)\varepsilon)^{-1} \sup \{|f(x)| : x \in E\}$.

Тот же самый метод позволяет изучать поведение на вещественной гиперплоскости целых функций экспоненциального типа, ограниченных априори на подмножествах E , близких к плотным, но таковыми не являющихся. Такие функции не обязаны, вообще говоря, быть ограниченными на \mathbb{R}^n , но, как показывают следующие теоремы, они не могут быстро расти вдоль \mathbb{R}^n .

Теорема 2. Пусть измеримое множество $F \subset \mathbb{R}^n$ таково, что при некотором $\alpha > 0$

$$\int_{CF \setminus B(0, \varepsilon)} (\ln |x|_2)^{-\alpha} dx < \infty, \quad (2)$$

E плотно относительно F . Любой паре положительных чисел σ и η отвечает такая конечная величина $\Delta = \Delta(F, E, \sigma, \eta)$, что для каждой целой функции $f(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, экспоненциального типа не выше σ при любом $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство

$$|f(x)| \leq \Delta \exp \{ \eta (\ln(1 + |x|_2))^{\alpha/n} \} \sup \{|f(x)| : x \in E\}. \quad (3)$$

Оценка (3) точна в следующем смысле. Каковы бы ни были положительное число σ и положительная функция $\psi(r)$, $r \in \mathbf{R}_+$, для которой при любом $\eta > 0$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \psi(r) \exp \{ -\eta (\ln r)^{\alpha/n} \} = 0,$$

найдутся такое измеримое подмножество $F \subset \mathbf{R}^n$, удовлетворяющее условию (2), и такая целая в \mathbf{C}^n функция $f(z)$ экспоненциального типа σ , что $\sup \{ |f(x)| : x \in F \} \leq 1$, а

$$\limsup_{|x|_2 \rightarrow \infty} |f(x)| \{ \psi(|x|_2) \}^{-1} = \infty.$$

Теорема 3. Пусть измеримое множество $F \subset \mathbf{R}^n$ удовлетворяет условию (2), E — ε -сет для F , а число $\sigma \in (0, (4([en] + 1)\varepsilon)^{-1})$. Любому положительному числу η отвечает такая конечная величина $\Delta = \Delta(F, E, \sigma, \varepsilon, \eta)$, что для каждой целой функции $f(z)$, $z \in \mathbf{C}^n$, экспоненциального типа не выше σ при всех $x \in \mathbf{R}^n$ выполняется неравенство

$$|f(x)| \leq \Delta \exp \{ \eta (\ln(1 + |x|_2))^{\alpha(n+2)/n} \} \sup \{ |f(x)| : x \in E \}.$$

Справедливы восходящие к классическим результатам Планшереля — Поля [4] аналоги теорем 1, 2 и 3, в которых вместо равномерных оценок фигурируют оценки в L^p -метрике (соответствующие аналоги теорем А и Б получены в работах [3, 5]). Ограничимся формулировкой аналога теоремы 2.

Теорема 4. Пусть измеримое множество $F \subset \mathbf{R}^n$ удовлетворяет условию (2), а множество E плотно относительно F . Тогда любым положительным числом p , σ и η отвечает такая конечная величина $\Delta = \Delta(F, E, p, \sigma, \eta)$, что для каждой целой функции $f(z)$, $z \in \mathbf{C}^n$, экспоненциального типа не выше σ при всех $x \in \mathbf{R}^n$ выполнена оценка

$$\int_{B(0, R)} |f(x)|^p dx \leq \Delta \exp \{ \eta (\ln(1 + R))^{\alpha/n} \} \int_E |f(x)|^p dx.$$

Эта оценка точна в том же смысле, что и оценка (3).

Список литературы: 1. Cartwright M. L. On certain integral functions of order one // Quart. J. of Math. — 1936. — N7. — P. 36—47. 2. Левин Б. Я. Субгармонические мажоранты и их приложения: Тез. докл. Всесоюз. конф. по теории функций комплекс. переменного. — Х., 1971. — С. 111—113. 3. Логвиненко В. Н. Об одном многомерном обобщении теоремы М. Картрайт // ДАН СССР. — 1974. — 219. — С. 546—549. 4. Plancherel M., Polya G. Fonctions entieres et intégrales de Fourier multiples // Comm. Math. Helv. — 1937. — P. 224—248. 5. Логвиненко В. Н., Середа Ю. Ф. Эквивалентные нормы в пространствах целых функций экспоненциального типа // Теория функций, функцион. анализ и их прил. — 1974. — Вып. 20. — С. 62—78.

Поступила в редколлегию 05.01.87

К СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

1. Основным результатом статьи является построение функциональной модели и вычисление спектральных проекторов абсолютно непрерывного спектра широкого класса ограниченных операторов. Идея построения подобных проекторов возникла в теории несамосопряженных дифференциальных операторов, где исторически первым методом спектрального анализа был риссовский интеграл. Теория дилатаций и использование операторных моделей открыли новый путь, основанный на исследовании свойств характеристической функции оператора. С использованием этого подхода в работе [1] строились спектральные проекторы для диссипативного оператора Шредингера. Естественно было бы обобщить эти результаты на более общий случай, особенно в связи с результатами работ [2, 3].

Здесь эта задача решается для вполне неунитарного ограниченного оператора, характеристическая функция которого ограничена в единичном круге.

2. Предварительные сведения. Пусть T — линейный ограниченный вполне неунитарный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H . Положим

$$D_* = \left| I - TT^* \right|^{\frac{1}{2}}, \quad D = \left| I - T^*T \right|^{\frac{1}{2}}, \\ N_* = \overline{D_*H}, \quad N = \overline{DH}, \\ V_* = \text{sign}(I - TT^*), \quad V = \text{sign}(I - T^*T).$$

Образует гильбертово пространство X из векторов вида

$$h = (\dots, h_{-1}, \boxed{h_0}, h_1, \dots),$$

где $h_0 \in H$, $h_{-n} \in N_*$, $h_n \in N$ ($n \geq 1$) и

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \|h_n\|^2 < \infty.$$

Определим в X операторы U и J :

$$Uh = (\dots, h_{-2}, \boxed{V_* D_* h_{-1} + T h_0}, -T^* h_{-1} + D h_0, h_1, \dots), \\ Jh = (\dots, V_* h_{-2}, V_* h_{-1}, \boxed{h_0}, V h_1, V h_2, \dots).$$

В [3] установлено, что U — J -унитарная дилатация оператора T , т. е. $T^n = P U^n | H$, $[Uf, Ug] = [f, g]$, где $n \in N$, P — ортопроектор на H , $[f, g] = (Jf, g)$. Рассмотрим подпространства

$$M(L) = \bigcup_a V_a U^n L, \quad L = \overline{(U - T)H}, \quad M(L_*) = \bigcup_n V U^n L_*, \\ L_* = \overline{(I - UT^*)H}.$$

Известно, что эти подпространства являются проекционно полными [4]. Этот факт можно более просто получить опираясь на результаты работы [5].

3. Функциональная модель. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что характеристическая функция (см. [2]): $\theta_T(z) = -V_*T + zD_*(I - zT^*)^{-1}D: N \rightarrow N_*$, определена всюду и ограничена в единичном круге: $\sup \{\|\theta_T(z)\|: |z| < 1\} < \infty$.

Рассмотрим ограниченные отображения:

$$S(k, r): H \rightarrow L_2(0, 2\pi; N), \quad S_*(k, r): H \rightarrow L_2(0, 2\pi; N_*),$$

которые определяются равенствами

$$S(k, r)f = \sum_{n=0}^k r^n e^{-int} D T^n f, \quad S_*(k, r)f = \sum_{n=0}^k r^n e^{int} D_* T^{*n} f \quad (r \leq 1).$$

Лемма. *Существуют пределы*

$$S(r) = s - \lim_{k \rightarrow \infty} S(k, r), \quad S_*(r) = s_* - \lim_{k \rightarrow \infty} S_*(k, r).$$

Доказательство. Введем вспомогательный оператор:

$$G_r: L_2(0, 2\pi; H) \rightarrow L_2(0, 2\pi; H) \quad (l \in H, \lambda = e^{it}, 0 \leq r \leq 1),$$

$$G_r(\lambda^s l) = r^s T^s V_* D_* l + \sum_{m=1}^s r^{s-m+1} \lambda^m D T^{s-m} V_* D_* l - \lambda^{s+1} T^s l,$$

$$G_r\left(\sum_{s=1}^N \lambda^s l_s\right) = \sum_{s=0}^N G_r(\lambda^s l_s),$$

определенный вначале на конечных суммах. Непосредственными вычислениями можно показать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{N+1} \|f_m\|^2 &= (V_* \theta_T(r\lambda) \sum_{m=1}^{N+1} \lambda^{m-1} f_m, \sum_{s=0}^N \lambda^s l_s)_{L_2}, \\ (V_* \sum_{s=0}^N \lambda^s l_s, \sum_{s=0}^N \lambda^s l_s)_{L_2} &\geq \|f_0\|^2 + (V \sum_{k=1}^{N+1} \lambda^k f_k, \sum_{k=1}^{N+1} \lambda^k f_k)_{L_2}, \end{aligned}$$

где $\sum_{m=0}^{N+1} \lambda^m f_m = \sum_{s=0}^N G_r(\lambda^s l_s)$, с помощью которых несложно доказать ограниченность оператора G_r . Используя затем равенство

$$(G_r(\sum_{k=0}^N r^k \lambda^k V_* D_* T^{*k} g_0), g_0)_{L_2} = \|\sum_{k=0}^N r^k \lambda^k V_* D_* T^{*k} g_0\|_{L_2}^2,$$

нетрудно видеть, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \|r^k V_* D_* T^{*k} g_0\|^2$ сходится, а из этого сразу следует требуемое утверждение относительно второго предела. Аналогично доказывается существование первого предела.

Введем отображение

$$\Phi_+ : X \rightarrow L_2(0, 2\pi; N), \quad \Phi_- : X \rightarrow L_2(0, 2\pi; N_*),$$

$$\Phi_+ h = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-ikt} \theta_T^* V_* h_{-k} + e^{-it} S(1) h_0 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{i(k-1)t} h_k,$$

$$\Phi_- h = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-ikt} h_{-k} + S_*(1) h_0 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{i(k-1)t} \theta_T V h_k,$$

где $\theta_T = s - \lim_{r \rightarrow 1-0} \theta_T(re^{it})$.

Справедливы следующие утверждения: 1) Φ_{\pm} — ограниченные операторы; 2) $\Phi_{\pm} U h = e^{it} \Phi_{\pm} h$ ($h \in X$), т. е. Φ_{\pm} — спектральны; 3) $\Phi_+ M \times \times (L) = L_2(0, 2\pi; N)$, $\Phi_- M(L_*) = L_2(0, 2\pi; N_*)$ и имеют место равенства $(V\Phi_+ h, \Phi_+ g) = [h, g]$ ($\forall h, g \in M(L)$), $(V_* \Phi_- \varphi, \Phi_- f) = [\varphi, f]$ ($\forall \varphi, f \in M(L_*)$); 4) $\tilde{R} = M(L)^{\perp 1} = \text{Ker } \Phi_+$, $R = M(L_*)^{\perp 1} = \text{Ker } \Phi_-$.

В дальнейшем будем предполагать, что $\dim N = \dim N_* < \infty$. Обозначим через $\{e_k\}$ и $\{\tilde{e}_k\}$ ортонормированные базисы из собственных векторов самосопряженных операторов $\Delta = V - V\theta_T^* V_* \theta_T V : N \rightarrow N$, $\Delta_* = V_* - V_* \theta_T V \theta_T^* V_* : N_* \rightarrow N_*$ и пусть $\delta_k, \tilde{\delta}_k$ — соответствующие собственные числа. Нетрудно показать, что операторы Δ, Δ_* неотрицательны.

Определим пространство $L_2(\Delta, N)$ как множество функций $f(t)$ со значениями в N :

$$\int_0^{2\pi} (\Delta f, f) dt < \infty, \quad \|f\|_{\Delta}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\Delta f, f) dt.$$

Это пространство становится полным после факторизации по $\text{Ker } \Delta$ (в бесконечномерном случае это не всегда верно). Аналогично вводится пространство $L_2(\Delta_*, N_*)$.

Преобразование $\Phi^< : X \rightarrow L_2(\Delta, N)$, определяемое равенством

$$\Phi^< h = \sum_{\delta_k > 0} \frac{1}{\delta_k} ((V\Phi_+ - V\theta_T^* V_* \Phi_-) h, e_k) e_k,$$

обладает следующими свойствами: 1) $\Phi^< X = L_2(\Delta, N)$; 2) $\Phi^<$ — спектральный; 3) $\forall f \in R[f, f] = \|\Phi^< f\|_{\Delta}^2$; 4) $M(L_*) = \text{Ker } \Phi^<$.

Аналогично оператор $\Phi^> : X \rightarrow L_2(\Delta_*, N_*)$, определяемый равенством

$$\Phi^> h = \sum_{\tilde{\delta}_k > 0} \frac{1}{\tilde{\delta}_k} ((V_* \Phi_- - V_* \theta_T V \Phi_+) h, \tilde{e}_k) \tilde{e}_k,$$

обладает следующими свойствами: 1) $\Phi^> X = L_2(\Delta_*, N_*)$; 2) $\Phi^>$ — спектральный; 3) $\forall f \in \tilde{R}[f, f] = \|\Phi^> f\|_{\Delta_*}^2$; 4) $M(L) = \text{Ker } \Phi^>$.

Введем теперь отображения

$$\Phi = \Phi_- + \Phi^< : X \rightarrow L_2(0, 2\pi, N_*) + L_2(\Delta, N),$$

$$\Phi_* = \Phi_+ + \Phi^> : X \rightarrow L_2(0, 2\pi, N) + L_2(\Delta_*, N_*).$$

Операторы Φ , Φ_* представляют собой те отображения, которые задают модельные представления. Отображение Φ_* переводит пространство X в пространство \hat{X} вектор-функций вида $\hat{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$, где $f_1 \times \times (t) \in L_2(0, 2\pi; N)$, $f_2(t) \in L_2(\Delta_*, N_*)$. На X задается индефинитное скалярное произведение:

$$[f, g]_X = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & \Delta_* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \right\rangle dt,$$

где $\left\langle \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & \Delta_* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \right\rangle = (Vf_1, g_1) + (\Delta_* f_2, g_2)$. В такой метрике для оператора Φ_* справедливо равенство $[\Phi_* f, \Phi_* g]_{\hat{X}} = [f, g]$. Аналогичный результат нетрудно сформулировать для отображения Φ . Следует заметить, что подобная функциональная модель ранее несколько иными методами строилась в [4].

4. Спектральные проекторы. По аналогии со случаем сжимающих (диссипативных) операторов (см. [1]) назовем $N_e = \overline{PR}$ абсолютно непрерывным подпространством.

Теорема 1. Если характеристическая функция оператора T ограничена в единичном круге, то оператор P как оператор из R в N_e обратим в широком смысле.

Доказательство. Рассмотрим оператор $\hat{P} = \Phi_* P \Phi_*^{-1}$. В пространстве \hat{X} этот оператор действует следующим образом:

$$\hat{P} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 - P_+ f_1 - \theta_T^* V_* \tilde{P}_- (\theta_T V f_1 + V_* \Delta_* f_2) \\ f_2 - \tilde{P}_- (\theta_T V f_1 + V_* \Delta_* f_2) \end{pmatrix},$$

где P_+ и \tilde{P}_- — ортопроекторы на $H_+^2(N)$ и $H_-^2(N_*)$ соответственно. При этом с точностью до факторизации по Кег Δ справедливо

$$\Phi_* h = \begin{pmatrix} V \Delta \Phi < h \\ -\theta_T V \Phi < h \end{pmatrix} \quad (\forall h \in R).$$

Таким образом, для всех $h \in R$ $\hat{P} \Phi_* h = \begin{pmatrix} P_- V \Delta \Phi < h \\ -\theta_T V \Phi < h \end{pmatrix}$, где P_- — ортопроектор на $H_-^2(N)$.

Рассмотрим теперь уравнение $Ph = 0$ ($h \in R$). Вследствие того что $R = M(L_*)^{(1)}$ нетрудно получить: $h_n = 0$ ($n \leq 0$). Так как $(\Delta \Phi < h, \Delta g) = (V \sum_{k=1}^{\infty} e^{i(k-1)t} h_k, \Delta g)$ ($\forall g \in L_2(0, 2\pi; N)$), то из равенства $\|Ph\|^2 = 0$ имеем $(\Delta_* \theta_T V \Phi < h, \theta_T V \Phi < h) = 0$, т. е. $V_* \theta_T \Delta \Phi < h = 0$.

Из условия ограниченности характеристической функции следует ее факторизация $\theta_T = \theta_i \tilde{\theta}_e$, где θ_i — внутренняя функция; $\tilde{\theta}_e$ — внешняя, что значит: $\tilde{\theta}_e$ обратим в широком смысле как оператор из $H_+^2(N)$ в $H_+^2(N_*)$ (см. [6]). Следовательно, $\Delta \Phi < h = 0$, т. е. $h_k = 0$ ($k > 0$). Таким образом, $h = 0$ и теорема доказана.

Этот результат аналогичен результату Б. С.-Надя, Ч. Фояша для сжатий (см. [6]).

Спектр σ_e оператора $T_e = T|_{N_e}$ назовем абсолютно непрерывным. Он совпадает с множеством чисел e^{it} , для которых оператор $\Delta(t) \neq 0$.

В модельном пространстве \hat{X} определим спектральные проекторы $B_\omega = \hat{P}\chi_\omega\hat{P}^{-1} : \hat{N}_e \rightarrow \hat{N}_e$, где $\hat{N}_e = \Phi_*N_e$ и χ_ω — оператор умножения на индикатор множества ω . В исходном же пространстве спектральные проекторы естественно ввести равенством $B_\omega = \Phi_*^{-1}\hat{B}_\omega\Phi_*$.

Пусть $e^{it} \in \sigma(T)$. Назовем точку e^{it} правильной, если существует окрестность $V_e = \{z : |e^{it} - z| < \varepsilon, |z| < 1\}$, что $\bar{\theta}_e$ обратима в ней и $\|\bar{\theta}_e^{-1}(z)\| \leq \text{const}$ для всех $z \in V_e$. В противном случае назовем ее спектральной особенностью.

Теорема 2. Пусть ω — множество таких точек $t \in [0, 2\pi]$, что e^{it} не является спектральной особенностью, B_ω — соответствующий проектор абсолютно непрерывного спектра. Если $\{f, g\} \subset R$ и $f_0 = Pf$, $g_0 = Pg$, то действие спектральных проекторов описывается следующим образом:

$$(B_\omega f_0, g_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\omega} (\bar{\theta}_T^{-1} V_* \Delta_* \Phi > f_0, \Phi < g_0) dt. \quad (1)$$

Доказательство. Из определения проекторов B_ω имеем

$$[B_\omega \hat{P}\Phi_* f, \Phi_* g]_{\hat{X}} = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega} (\Delta \Phi < f, P_* V \Delta \Phi < g + \bar{\theta}_T^* V_* \bar{\theta}_T V \Phi < g) dt.$$

Так как с точностью до упоминавшейся факторизации справедливы соотношения $\Phi_* g_0 = P_* V \Delta \Phi < g$, $\Phi > g_0 = -\bar{\theta}_T V \Phi < g$, $\Phi < g_0 = \Phi_* g_0 - \bar{\theta}_T^* V_* \Phi > g_0$, то, используя равенство $(B_\omega f_0, g_0) = [B_\omega \hat{P}\Phi_* f, \Phi_* g]_{\hat{X}}$, имеем $(B_\omega f_0, g_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\omega} (\Delta V \bar{\theta}_T^{-1} \Phi > f_0, \Phi < g_0) dt$, что, как нетрудно видеть, совпадает с (1).

Для полноты изложения приведем следующую теорему о разложении (доказательство аналогично [1]).

Теорема 3. Если $f \in PR$, то $\|B_{\omega_\varepsilon} f - f\| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, где ω_ε — множество точек t из $(\varepsilon, 2\pi - \varepsilon) : e^{it}$ не является спектральной особенностью.

В заключение отметим, что результаты этой работы справедливы также для широкого класса неограниченных операторов, для которых характеристическая функция определена и ограничена в одной из полуплоскостей.

Список литературы: 1. Павлов Б. С. Самосопряженная дилатация диссипативного оператора Шредингера и разложение по его собственным функциям // Мат. сб. — 1977. — 102. — С. 511—536. 2. Кужель А. В. Характеристическая оператор-функция произвольного ограниченного оператора // ДАН УССР. — 1968. — № 3. — С. 233—236. 3. Кужель А. В. I -самосопряженные и I -унитарные дилатации линейных операторов // Функцион. анализ и его прил. — 1983. — 17, вып. 1. — С. 84—84. 4. McEnnis B. W. Models for operators with

bounded characteristic function // Acta Sci. Math. — 1981. — 43. — P. 71 — 90.
 5. Кужель А. В. Правильные расширения эрмитовых операторов в пространстве с индефинитной метрикой // ДАН СССР. — 1982. — 265, № 5. — С. 1059 — 1061.
 6. Секефальви-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Мир, 1970. — С. 431.

Поступила в редколлегию 17.04.86

УДК 519.6

Р. Б. ТЮТЮНИКОВ

СОХРАНЕНИЕ СХОДИМОСТИ ТРАЕКТОРИЙ ПРИ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ МНОГООБРАЗИЙ С КРАЕМ

1. Рассмотрим компактное C^1 -гладкое подмногообразие $K \subset R^n$ с кусочно- C^1 -гладким краем (или без края). Обозначим через $C^1(K, K)$ множество гладких отображений (операторов) $K \rightarrow K$, снабженное естественной метрикой d . Обозначим через $D_\delta(F)$ шар радиуса δ с центром $F \in C^1(K, K)$. Оператор $F \in C^1(K, K)$ называется гиперболическим, если все его неподвижные точки гиперболически, т. е. спектр линейного приближения в этих точках не имеет собственных значений на единичной окружности. Множество неподвижных точек гиперболического оператора конечно.

Строгой функцией Ляпунова для оператора F называется такая вещественная непрерывная функция $W(x)$ ($x \in K$), что $W(Fx) \geq W(x)$ (1), если $W(Fx) = W(x)$ (2), то $Fx = x$.

Основным результатом настоящей работы является

Теорема 1. Если гиперболический оператор F обладает строгой функцией Ляпунова W , то существует такое $\delta > 0$, что для любого оператора G из $D_\delta(F)$ все траектории $\{G^m x\}_{m=0}^\infty$ ($x \in K$) сходятся.

Доказательству теоремы 1 предпошлим некоторые вспомогательные рассуждения.

Выбросим из K ε -окрестности неподвижных точек оператора F . Полученный компакт обозначим через K_ε . Из условий (1), (2) следует, что $W(Fx) - W(x) > 0$ для всех $x \in K_\varepsilon$, а из непрерывности W на K_ε — существование такого $\alpha(\varepsilon) > 0$, что $W(Fx) - W(x) > \alpha(\varepsilon)$ ($x \in K_\varepsilon$) (3).

Лемма. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $W(Gx) - W(x) > \frac{1}{2} \alpha(\varepsilon)$ для всех $G \in D_\delta(F)$ и всех $x \in K_\varepsilon$.

Доказательство. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$|W(x) - W(y)| < \frac{\alpha(\varepsilon)}{2} \quad (\|x - y\| < \delta). \quad (4)$$

Возьмем $G \in D_\delta(F)$. Тогда $\|Gx - Fx\| < \delta$ ($x \in K$), откуда в силу неравенств (3), (4)

$$W(Gx) - W(x) > \frac{\alpha(\varepsilon)}{2}.$$

Следствие. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $G \in D_\delta(F)$ любая точка из K под действием итераций оператора G за ограниченное число шагов попадает в ε -окрестность множества неподвижных точек оператора F .

Доказательство. Достаточно взять δ в соответствии с леммой. Если $G \in D_\delta(F)$ и точки $x, Gx, \dots, G^m x$ лежат в K_ε , то по лемме

$$W(G^m x) - W(x) > m \frac{\alpha(\varepsilon)}{2}.$$

Так как W на K ограничена, то ограничено и число m .

Доказательство теоремы 1. Если K -многообразие с краем, то построим компактное гладкое многообразие \tilde{K} с краем так, чтобы $K \subset \text{int } \tilde{K}$, и гладко продолжим [1] все операторы класса $C^1(K, K)$ до гладких отображений $\tilde{K} \rightarrow R^n$. Продолжение произвольного оператора G обозначим через \tilde{G} . Его можно осуществить так, чтобы $d \times \times (\tilde{F}, \tilde{G}) \leq cd(F, G)$ ($c = \text{const}$). В дальнейшем для простоты пишем снова G вместо \tilde{G} . Отметим, что для всех продолженных операторов K инвариантно. Покажем, что можно выбрать такие $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ($\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$) и такое $\delta > 0$, что для любого оператора $G \in D_\delta(F)$ и любой точки $x \in K$ из расходимости последовательности $\{G^i x\}_{i=0}^\infty$ будет следовать, что

а) если $G^i x$ принадлежит ε_2 -окрестности некоторой неподвижной точки оператора F , то найдутся такие j, k ($j > k \geq i$), что $G^i x, \dots, G^k x$ лежат в той же ε_2 -окрестности, $G^{k+1} x, \dots, G^j x$ лежат в K_{ε_2} , а $G^{j+1} x \in K_{\varepsilon_1}$;

б) W на каждом шаге траектории (под действием G) в K_{ε_2} возрастает, а в K_{ε_1} возрастает на величину, вдвое большую той, на которую W может уменьшиться во время пребывания траектории в ε_2 -окрестности множества неподвижных точек оператора F .

В этой ситуации возникает очевидное противоречие с ограниченностью функции W на K .

Множество $\{a_i\}_{i=1}^l$ неподвижных точек оператора F в K конечно и $\|Fx - x\|$ стремится к нулю при приближении x к неподвижной точке. Поэтому можно выбрать такое $\varepsilon_1 > 0$, что для любых двух неподвижных точек a_i и a_j оператора F любая траектория под действием F , выходящая из ε_1 -окрестности $u_{\varepsilon_1}(a_i)$ и попадающая в $u_{\varepsilon_1} \times \times (a_j)$, содержит, по крайней мере, две точки в K_{ε_1} . Можно считать ε_1 столь малым, что ε_1 -окрестности разных неподвижных точек не пересекаются и при итерациях F все траектории, начинающиеся в $u_{2\varepsilon_1}(a_i)$ некоторой неподвижной точки a_i и не лежащие на ее притягивающем многообразии, выталкиваются из $u_{2\varepsilon_1}(a_i)$. Возьмем ε_2 ($0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$) таким, чтобы

$$\max_{a_i} [\max_{u_{\varepsilon_2}(a_i)} W - \min_{u_{\varepsilon_2}(a_i)} W] < \frac{\alpha(\varepsilon_1)}{4}.$$

Обозначим через a' неподвижную точку оператора $G \in D_\delta(F)$, возникающую из неподвижной точки a оператора F при достаточно малом

возмущении*. Пусть $\delta > 0$ таково, что для любого $G \in D_\delta(F)$ траектория (под действием G) любой точки $x \in K$, попадающая из $u_{\varepsilon_1}(a_i)$ в $u_{\varepsilon_1}(a_i)$, делает между ними не менее одного шага; любая траектория, начинающаяся в $u_{\varepsilon_1}(a_i)$ и не лежащая на притягивающем многообразии неподвижной точки a_i , выталкивается из $u_{\varepsilon_1}(a_i)$; в K_{ε_1} на траектории под действием G функция W растет не менее чем на $\alpha(\varepsilon_1)/2$, а в K_{ε_2} — не менее чем на $\alpha(\varepsilon_2)/2$. Здесь дважды была применена лемма.

Для выбранных $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и δ условия а), б) проверяются непосредственно.

2. Исследуем поведение итераций произвольной точки $(n-1)$ -мерного симплекса Δ^{n-1} в R^n под действием оператора $V = FT$, где F — оператор отбора, а $T = (t_{ij})_{i,j=1}^n$ — стохастическая по столбцам матрица мутаций ($t_{ij} < 1$ при $i \neq j$). Оператор F строится по некоторой матрице приспособленности $\Lambda = (\lambda_{ij})_{i,j=1}^n$ ($\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$, $0 < \lambda_{ij} \leq 1$) и действует по формулам

$$p_i' = (Fp)_i = \frac{p_i W_i(p)}{W(p)} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (5)$$

где $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ — точка из Δ^{n-1} ;

$$W_i(p) = \sum_{k=1}^n \lambda_{ik} p_k, \quad W(p) = \sum_{i=1}^n p_i W_i(p) = \sum_{i,k=1}^n \lambda_{ik} p_i p_k.$$

В популяционной генетике оператор (5) описывает действие чистого отбора в аутосомном локусе (время считается дискретным). Гиперболические операторы отбора образуют открытое плотное множество среди всех операторов отбора [2]. Функция $W_i(p)$ называется средней приспособленностью i -го гена в состоянии популяции p , а $W(p)$ — средней приспособленностью популяции. Вопрос о сходимости итераций $F^n(p_0)$ ($n \rightarrow \infty$) для любой начальной точки $p_0 \in \Delta^{n-1}$ в настоящее время решен полностью [3, 4], его изложение имеется в монографии Ю. И. Любича [2]. Оператор $V = FT$ описывает взаимодействие мутаций и отбора. Так как F и T не коммутируют, то итерации V не сводятся к итерациям F и T в отдельности. Благодаря этому можно построить двумерный пример расходимости траекторий для оператора $V = FT$, где F — гиперболический оператор отбора, а T — положительная матрица мутаций. Расходимость возникает, если T значительно отличается от единичной матрицы E , в то время как по биологическому смыслу недиагональные элементы T имеют порядок 10^{-4} и менее.

Зафиксируем любую норму в пространстве матриц. Так как из $\|T - E\| < \delta$ следует $d_{\Delta^{n-1}}(F, T) < \omega(\delta)$, $\omega(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$ и средняя приспособленность популяции $W(p)$ является строгой функцией Ляпунова для оператора вида (5) (см. [2]), то из теоремы 1 вытекает следующий результат:

Теорема 2. Если F — гиперболический оператор отбора, то существует такое $\delta > 0$, что при $\|T - E\| < \delta$ траектории всех точек симплекса под действием оператора $V = FT$ сходятся.

* Существование точки a' обеспечено продолжением всех операторов на \bar{K} .

Рассмотрим теперь одну специальную ситуацию.

Теорема 3. Если оператор отбора F гиперболичен и обладает асимптотически устойчивой неподвижной точкой \bar{a} во внутренней симплекса, то существует такое $\delta > 0$, что если $\|T - E\| < \delta$ и T — матрица без нулей, то FT имеет в Δ^{n-1} ровно одну неподвижную точку и все траектории сходятся к этой точке.

Доказательство. Рассмотрим C^1 — продолжение оператора F в некоторую окрестность симплекса Δ^{n-1} в плоскости $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Так как все внутренние точки симплекса под действием F сходятся к асимптотически устойчивому полному равновесному полиморфизму (см. [2]), то отталкивающее многообразие неподвижной точки на границе симплекса $\partial\Delta^{n-1}$ не лежит целиком в $\partial\Delta^{n-1}$. Выберем $\delta > 0$ так, что при $\|T - E\| < \delta$ характер неподвижных точек оператора FT сохраняется, и если неподвижная точка для FT , возникшая из граничной неподвижной для F точки, лежит в симплексе, то её отталкивающее многообразие пересекает границу. Из-за отсутствия нулей в матрице T FT нет неподвижных точек на границе. Далее предполагаем, что $\|T - E\| < \delta$.

Пусть неподвижная точка оператора FT , возникшая из граничной неподвижной точки, лежит в симплексе. Возьмем точку x , лежащую на отталкивающем многообразии и вне симплекса. Через конечное число шагов траектория x под действием* $(FT)^{-1}$ попадет в некоторую точку $y \in \Delta^{n-1}$. Значит, y под действием FT через конечное число шагов выходит из симплекса. Но симплекс инвариантен относительно FT . Следовательно, на самом деле FT не имеет неподвижных точек в Δ^{n-1} , кроме той, которая возникла из \bar{a} .

Если теперь δ настолько мало, что выполнено заключение теоремы 2, то все траектории под действием FT будут сходить к единственной неподвижной точке.

3. Изучим сходимость траектории произвольной точки декартова квадрата $(n-1)$ -мерного симплекса $\Delta^{n-1} \times \Delta^{n-1}$ под действием оператора S , который строится по двум матрицам приспособленности $\Lambda_f = (\lambda_{ij}^f)_{i,j=1}^n$ и $\Lambda_m = (\lambda_{ij}^m)_{i,j=1}^n$ ($\lambda_{ij}^f = \lambda_{ji}^f$, $\lambda_{ij}^m = \lambda_{ji}^m$, $0 < \lambda_{ij}^f \leq 1$, $0 < \lambda_{ij}^m \leq 1$) и действует по формулам

$$\left. \begin{aligned} p_i' &= \frac{p_i \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}^f q_j + q_i \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}^f p_j}{2 \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij}^f p_i q_j} \quad (1 \leq i \leq n); \\ q_i' &= \frac{p_i \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}^m q_j + q_i \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}^m p_j}{2 \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij}^m p_i q_j} \quad (1 \leq i \leq n), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

* Обратимость оператора F была установлена в [2].

где (p, q) — точка из $\Delta^{n-1} \times \Delta^{n-1}$, (p_1, p_2, \dots, p_n) — координаты точки в первом симплексе, а (q_1, q_2, \dots, q_n) — во втором. Оператор (6) описывает действие отбора в полиаллельном локусе в случае, когда коэффициенты выживания зависят от пола (см. [5]). При $\Lambda_f = \Lambda_m$ оператор S осуществляет вложение $\Delta^{n-1} \times \Delta^{n-1}$ в диагональ Δ ($p_i = q_i$, $i = 1, 2, \dots, n$) за один шаг, а действие S в Δ соответствует действию оператора F вида (5), построенного по $\Lambda = \Lambda_f = \Lambda_m$.

Теорема 4. Если матрица приспособленности Λ отвечает гиперболическому оператору F вида (5), то найдется такое $\delta > 0$, что для любого оператора S вида (6), построенного по матрицам Λ_f, Λ_m , $\|\Lambda - \Lambda_f\| < \delta$, $\|\Lambda - \Lambda_m\| < \delta$ траектории всех точек из $\Delta^{n-1} \times \Delta^{n-1}$ сходятся.

Теорема 4 вытекает из теоремы 1 по следующим причинам:

1) оператор S_0 , построенный по $\Lambda_f^0 = \Lambda$ и $\Lambda_m^0 = \Lambda$, гиперболичесок, так как спектр линейного приближения в неподвижной для S_0 точке является объединением спектра линейного приближения F в соответствующей неподвижной точке оператора F и собственного значения $\beta = 0$, взятого с кратностью $n - 1$ (см. [5]);

2) отождествим S_0 на Δ с F . У S_0 есть строгая функция Ляпунова \tilde{W} в $\Delta^{n-1} \times \Delta^{n-1}$, задаваемая формулой $\tilde{W}((p, q)) = W(F^{-1}S_0 \times \times (p, q)) - \text{dist}((p, q), \Delta)$, где W — средняя приспособленность популяции с матрицей приспособленности Λ ;

3) из $\|\Lambda - \Lambda_f\| < \delta$, $\|\Lambda - \Lambda_m\| < \delta$ следует $d(S_0, S) < \omega(\delta)$, где $\omega(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

4. Аналогично исследуется взаимодействие отбора и малых миграций, отбора и кроссинговера с малой вероятностью обмена локусами.

Список литературы: 1. Мальгранж Б. Идеалы дифференцируемых функций. — М.: Мир, 1968. — 132 с. 2. Любич Ю. И. Математические структуры в популяционной генетике. — К.: Наук. думка, 1983. — 296 с. 3. Любич Ю. И. и др. Сходимость к равновесию под действием отбора в однолокусной популяции / Ю. И. Любич, Г. Д. Майстровский, Ю. Г. Ольховский // Докл. АН СССР. — 1976. — 226, № 1. — С. 58—60. 4. Любич Ю. И. и др. Сходимость к равновесию под действием отбора в однолокусной аутосомной популяции / Ю. И. Любич, Г. Д. Майстровский, Ю. Г. Ольховский // Пробл. передачи информ. — 1980. — 16, № 1. — С. 93—104. 5. Karlin S. Mathematical models, problems and controversies of evolutionary theory // Bull. Amer. Math. Soc. — 1984. — 10, № 2. — p. 221—273.

Поступила в редколлегию 19.03.86

УДК 519.21.5

А. М. УЛАНОВСКИЙ

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ СВЕРТОК МЕР В R^m , $m \geq 2$, СУЖЕНИЯМИ НА МНОЖЕСТВА

1. Изучаются условия однозначной определенности комплекснозначных мер вида μ^{n*} сужением на множества в пространстве R^m . Такие условия для мер на прямой R изучались в ряде работ (см., на-

пример, [1—4] и указанную там литературу). Наиболее общие результаты, содержащие [1—3], получены в [4]. К рассматриваемому вопросу относятся следующие две теоремы.

Теорема 1.1 [4]. Пусть μ и ν — борелевские меры в R , удовлетворяющие условиям

$$|\mu|(R), |\nu|(R) < \infty; \quad (1.1)$$

$$(\text{Supp } \mu \cup \text{Supp } \nu) \cap (-\infty, -r) \neq \emptyset, \quad \forall r > 0; \quad (1.2)$$

$$|\mu|(-\infty, -r), |\nu|(-\infty, -r) = O(e^{-cr}), \quad r \rightarrow +\infty, \quad \forall c > 0. \quad (1.3)$$

Если для некоторых $n \geq 3$ и r сужения μ^{n*} и ν^{n*} на полюсь $(-\infty, -r)$ совпадают, то $\mu^{n*} \equiv \nu^{n*}$, $\mu \equiv \varepsilon \nu$, где ε — постоянная такая, что $\varepsilon^n = 1$.

Теорема 1.2 [4]. Пусть μ и ν — борелевские меры в R , удовлетворяющие условиям (1.1), (1.2) и

$$|\mu|(-\infty, -r), |\nu|(-\infty, -r) = O(e^{-cr \ln r}), \quad r \rightarrow +\infty, \quad \forall c > 0. \quad (1.4)$$

Если для некоторого r сужения μ^{2*} и ν^{2*} на полюсь $(-\infty, -r)$ совпадают, то $\mu^{2*} \equiv \nu^{2*}$, $\mu \equiv \pm \nu$.

Заметим [4], что условия (1.3) и (1.4) нельзя ослабить, заменив квантор « \forall » на « \exists », а условие (1.2) нельзя отбросить.

Для мер в R^m , $m \geq 2$, нам известен лишь один результат, относящийся к рассматриваемому кругу вопросов.

Теорема 1.3. [5]. Пусть Φ_m — стандартный нормальный закон в R^m , μ — безгранично делимая вероятностная мера в R^m , $K \subset R^m$ — выпуклый конус. Если сужения μ и Φ_m на K совпадают, то $\mu \equiv \Phi_m$.

2. Основными результатами заметки являются теоремы 2.1 и 2.2 — многомерные аналоги теорем 1.1 и 1.2.

Обозначим $x = (x_1, \dots, x_m) \in R^m$; $K(r, m) = \{x \in R^m: x_1^2 + \dots + x_m^2 > r^2, x_1 < 0\}$; $L(r, m) = \{x \in R^m: x_1 < -r\}$.

Теорема 2.1. Пусть μ и ν — борелевские меры в R^m , $m \geq 2$, удовлетворяющие условиям

$$|\mu|(R^m), |\nu|(R^m) < \infty; \quad (2.1)$$

$$(\text{Supp } \mu \cup \text{Supp } \nu) \cap L(r, m) \neq \emptyset, \quad \forall r > 0; \quad (2.2)$$

$$|\mu|(K(r, m)), |\nu|(K(r, m)) = O(e^{-cr}), \quad r \rightarrow \infty, \quad \forall c > 0. \quad (2.3)$$

Если для некоторых $n \geq 3$ и r сужения μ^{n*} и ν^{n*} на полупространство $L(r, m)$ совпадают, то $\mu^{n*} \equiv \nu^{n*}$, $\mu \equiv \varepsilon \nu$, где $\varepsilon^n = 1$.

Теорема 2.2. Пусть μ и ν — борелевские меры в R^m , $m \geq 2$, удовлетворяющие условиям (2.1), (2.2) и

$$|\mu|(K(r, m)), |\nu|(K(r, m)) = O(e^{-cr \ln r}), \quad r \rightarrow \infty, \quad \forall c > 0. \quad (2.4)$$

Если для некоторого r сужения μ^{2*} и ν^{2*} на полупространство $L(r, m)$ совпадают, то $\mu^{2*} \equiv \nu^{2*}$, $\mu \equiv \pm \nu$.

В связи с теоремами 1.4, 2.1 и 2.2 возникает вопрос, определяют ли свертки мер, удовлетворяющих (2.1), (2.2) и (2.3) (или (2.4)),

сужениями на более «узкие», чем полупространство $L(r, m)$ множества в R^m ? Оказывается, что это, вообще говоря, не так даже для вероятностных мер.

Теорема 2.3. Пусть множество $M \subset R^m$, $m \geq 2$, таково, что для любого r пересечение $M \cap \{x: x_1 = r\}$ ограничено. Тогда для любого $n \geq 2$ найдутся вероятностные меры μ и ν , удовлетворяющие (2.1), (2.2) и (2.4) такие, что $\mu^{n*} \neq \nu^{n*}$ и сужения μ^{n*} , ν^{n*} на множество M совпадают.

3. Введем обозначения: $t = (t_1, \dots, t_m)$, $t' = (t_2, \dots, t_m)$. Пусть μ — мера в R^m . Обозначим $l_m(\mu) = \inf \{x_1: x \in \text{Supp } \mu\}$. При $m = 1$, $l_1(\mu)$ совпадает с левой границей носителя μ . Очевидно, условие $l_m(\mu) \geq -r$ равносильно тому, что μ обращается в нуль на $L(r, m)$. Положим $\mu_{L(r, m)}(E) = \mu(E \cap L(r, m))$ — сужение μ на $L(r, m)$; μ_t — мера в R , определяемая для $E \subset R$ равенством

$$\mu_t(E) = \int_{E \times R^{m-1}} \exp \{i \langle t', m' \rangle\} \mu(dx_1 \cdot \dots \cdot dx_m),$$

где $\langle t', x' \rangle = t_2 x_2 + \dots + t_m x_m$; $\varphi_m(t, \mu) = \int_{R^m} \exp \{i \langle t, x \rangle\} \mu \times$
 $\times (dx_1 \cdot \dots \cdot dx_m)$ — преобразование Фурье — Стильтьеса μ . Нетрудно убедиться, что верны равенства

$$(\mu_{L(r, m)})_t' \equiv (\mu_t)_{L(r, 1)}; \quad (3.1)$$

$$\varphi_m(t, \mu) = \varphi_1(t_1, \mu_t), \quad t \in R^m, \quad m > 1. \quad (3.2)$$

Лемма 3.1. Пусть μ — борелевская мера в R^m , $m \geq 2$, удовлетворяющая (2.1), (2.3) и $l_m(\mu) = -\infty$. Найдется всюду плотное в R^{m-1} множество E такое, что $l_m(\mu) = l_1(\mu_t)$ при $t' \in E$.

Доказательство. Будем считать, что $\mu \neq 0$. Обозначим $F_N = \{t' \in R^{m-1}: l_1(\mu_t) \geq -N\}$. Тогда $E = R^{m-1} \setminus \bigcup_{N=1}^{\infty} F_N$. Согласно (3.1)

имеем $(\mu_{L(N, m)})_t' \equiv 0$, $t' \in F_N$, поэтому, согласно (3.2), $\varphi_m(t, \mu_{L(N, m)}) = 0$ при $t' \in F_N$ и всех $t_1 \in R$. Из условий (2.1) и (2.3) ([6], с. 36, с. 228) следует, что $\varphi_m(t, \mu_{L(N, m)})$ продолжается до целой функции в C^m , причем из $l_m(\mu) < l_1(\mu_t)$ следует, что $\mu_{L(N, m)} \neq 0$, $\varphi_m(t, \mu_{L(N, m)}) \neq 0$. Если бы множество F_N содержало некоторый открытый шар B , то получилось бы, что $\varphi_m(t, \mu_{L(N, m)})$ обращается в нуль на $B \times R$ и, следовательно, $\varphi_m(t, \mu_{L(N, m)}) \equiv 0$. Значит, поскольку F_N замкнуто, то F_N нигде не плотно в R^{m-1} и из теоремы Бэра следует, что $E = R^{m-1} \setminus \bigcup_{N=1}^{\infty} F_N$ всюду плотно в R^{m-1} .

Лемма 3.2. Пусть мера μ удовлетворяет условиям леммы 3.1 и пусть множество $F \subset R^m$ всех вещественных нулей $\varphi_m(t, \mu)$ содержит некоторый шар. Тогда $\mu \equiv 0$.

Доказательство. Из условий (2.1) и (2.3) следует, что при любом фиксированном $t' \in R^{m-1}$, $\varphi_m(t, \mu) = \varphi_1(t_1, \mu_t)$ аналитически продолжается в полуплоскость $\text{Im } t_1 > 0$ и непрерывна при $\text{Im } t_1 \geq 0$. Найдется такой шар $B \subset R^{m-1}$, что $\varphi_1(t_1, \mu_t)$ при $t' \in B$ обращается

в нуль на некотором интервале вещественной оси. Поэтому в силу граничной теоремы единственности $\varphi_1(t_1, \mu_{t'}) = 0$, $t_1 \in R$, $t' \in B$, значит, $\mu_{t'} = 0$, $t' \in B$. Поскольку множество R^{m-1}/B не является всюду плотным в R^{m-1} , то согласно лемме 3.1 имеем $\mu \equiv 0$.

4. Доказательство теоремы 2.2. Пусть меры μ и ν удовлетворяют (2.1), (2.2), (2.4) и пусть $l_m(\mu^{2*} - \nu^{2*}) \geq -r > -\infty$. Тогда, очевидно, меры $\mu_{t'}$ и $\nu_{t'}$ при любом $t' \in R^{m-1}$ удовлетворяют (1.1), (1.4) и $l_1((\mu_{t'})^{2*} - (\nu_{t'})^{2*}) = l_1((\mu^{2*})_{t'} - (\nu^{2*})_{t'}) \geq l_m(\mu^{2*} - \nu^{2*}) \geq -r$. Ввиду (2.2) и леммы 3.1 найдется всюду плотное в R^{m-1} множество E такое, что $\mu_{t'}$ и $\nu_{t'}$ удовлетворяют (1.2) при $t' \in E$. Применяя теорему 1.2, получаем $(\mu_{t'})^{2*} = (\nu_{t'})^{2*}$, $t' \in E$. Отсюда, согласно (3.2), имеем $\varphi_m^2 \times \times (t, \mu) = \varphi_m^2(t, \nu)$, $t' \in E$, $t_1 \in R$. Поскольку функции $\varphi_m(t, \mu)$, $\varphi_m \times \times (t, \nu)$ непрерывны, а множество $R \times E \subset R^m$ всюду плотно, то $\varphi_m^2(t, \mu) \equiv \varphi_m^2(t, \nu)$, $t \in R^m$, и, значит, $\mu^{2*} \equiv \nu^{2*}$.

Рассмотрим меры $\mu + \nu$ и $\mu - \nu$. Согласно (2.2) имеем $\min\{l_m \times (\mu + \nu), l_m(\mu - \nu)\} = -\infty$. Пусть $l_m(\mu + \nu) = -\infty$. Обозначим $E_1 \dots E_2 \subset R^m$ — нулевые множества $\varphi_m(t, \mu + \nu)$ и $\varphi_m(t, \mu - \nu)$. Множества E_1 и E_2 замкнуты и из $0 \equiv \varphi_m^2(t, \mu) - \varphi_m^2(t, \nu) = \varphi_m(t, \mu + \nu) \times \times \varphi_m(t, \mu - \nu)$ следует, что $E_1 \cup E_2 = R^m$. Далее, из $l_m(\mu + \nu) = -\infty$ и леммы 3.2 вытекает, что E_1 не содержит никакого шара, поэтому $E_2 = R^m$. Отсюда заключаем, что $\varphi_m(t, \mu - \nu) \equiv 0$, $\mu \equiv \nu$. Если $l_m(\mu - \nu) = -\infty$, то аналогично получаем, что $\mu \equiv -\nu$. Теорема 2.2 доказана.

Доказательство теоремы 2.1 проводится аналогично.

5. Доказательство теоремы 2.3. Доказательство состоит в построении примера. Для простоты будем считать $m = 2$, $M = \{x \in R^2 : x_1 < 0, x_1^2 > |x_2|\}$. В общем случае пример строится аналогично.

Пример 5.1. Пусть $\delta_{(u, v)}$ — единичная мера, сосредоточенная в точке (u, v) . Положим

$$\mu = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \delta_{(-k, n^2 k^2)}; \quad \nu = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \delta_{(-k, -n^2 k^2)},$$

где $c_k > 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} c_k = 1$, c_k убывают при $k \rightarrow \infty$ настолько быстро, что μ и ν удовлетворяют (2.4). Ясно, что μ и ν являются вероятностными мерами и удовлетворяют (2.2). Поскольку $n^2(k_1^2 + \dots + k_n^2) > (k_1 + \dots + k_n)^2$, то легко видеть, что сужения μ^{n*} и ν^{n*} на M совпадают и равны нулю, но $\mu^{n*} \neq \nu^{n*}$.

С помощью сходных рассуждений можно построить меры μ и ν , удовлетворяющие (2.2) и (2.4), для которых сужения μ^{n*} и ν^{n*} на M совпадают и не равны нулю, но $\mu^{n*} \neq \nu^{n*}$. Приведем такой пример для $n = 2$.

Пример 5.2. Положим

$$\chi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sum_{j=-k^2}^{k^2+1} \delta_{(-k, j)},$$

где $c_k > 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} (2k^2 + 1) c_k = 1/2$, c_k убывают при $k \rightarrow \infty$ настолько быстро, что γ удовлетворяет (2.4). Пусть $\mu = \gamma + \delta_{(0,0)}/2$, $\nu = \gamma + \delta_{(0,-1)}/2$. Меры μ и ν являются вероятностными, удовлетворяют (2.2) и (2.4),

$$\begin{aligned} \mu^{2*} - \nu^{2*} &= \gamma - \gamma \times \delta_{(0,-1)} + (\delta_{(0,0)} - \delta_{(0,-2)})/4 = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k (\delta_{(-k, k^2+1)} - \delta_{(-k, -k^2-1)}) + (\delta_{(0,0)} - \delta_{(0,-2)})/4. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что сужения μ^{2*} и ν^{2*} на M совпадают, но $\mu^{2*} \neq \nu^{2*}$.

Список литературы: 1. Ибрагимов И. А. Об определении безгранично делимой функции распределения по ее значениям на полупрямой // Теория вероятности и ее применения. — 1977. — 22, вып. 2. — С. 393—399. 2. Тумов А. Н. Об определении свертки одинаковых функций распределения по значениям на полупрямой // Теория вероятности и ее применения. — 1981. — 26, вып. 3. — С. 610—611. 3. Бланк Н. М. О распределениях, свертки которых совпадают на полуоси // Теория функций, функций. анализ и их прил. — 1984. — Вып. 41. — С. 17—25. 4. Ostrovskii J. V. Generalisation of the Titchmarsh convolution theorem and the complex-valued measures uniquely determined by their restriction to a half-line // Lect. Notes in Math. — 1985. — 1155. — P. 256 — 284. 5. Il'inskiĭ A. J. The normality of a multidimensional infinitely divisible distribution which coincides with a normal distribution in a cone // Lect. Notes in Math. — 1985. — 1155. — P. 47—59. 6. Линник Ю. В., Острооский И. В. Разложения случайных величин и векторов. — М.: Наука, 1972. — 480 с.

Поступила в редколлегию 05.01.87

УДК 513.88

В. П. ФОНФ

О БОРЕЛЕВСКОМ ТИПЕ МНОЖЕСТВА СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Известно, что множество сходимости Q последовательности $\{A_n\}$ линейных ограниченных операторов, действующих из банахова пространства X в такое же Z есть линейное многообразие типа $F_{\sigma\delta}$ (напомним, что $Q = \{x \in X : \lim A_n^x \text{ существует}\}$). Статья посвящена выяснению необходимых условий, при которых борелевский тип множества Q «лучше», чем $F_{\sigma\delta}$. Нас будет интересовать ситуация $Q \neq X$.

Очевидно, минимальная дополнительная (по сравнению с общим случаем) информация о борелевском типе множества сходимости состоит в следующем: Q имеет тип $G_{\delta\sigma}$. Рассмотрению случая « Q имеет тип F_σ » посвящена работа Мазура и Штернбаха [1]. Рассмотрению случая « Q имеет тип $G_{\delta\sigma}$ » посвящена работа Банаха и Мазура [2], в которой ошибочно утверждается, что если множество сходимости Q имеет тип $G_{\delta\sigma}$, то оно имеет тип F_σ . В действительности, в этом случае

имеет место несколько более слабый факт: множество Q содержит линейное многообразие L , имеющее тип F_σ и являющееся образом некоторого банахова пространства (см. теорему 3 настоящей работы).

При рассмотрении множества сходимости Q последовательностей линейных ограниченных операторов $\{A_n\}$, действующих из одного банахова пространства X в другое Z , возникает еще одно банахово пространство. Именно, введем на линейном многообразии Q новую норму: $\|x\| = \sup_n \{\|x\|, \|A_n x\|\}, x \in Q$.

Нетрудно проверить, что в этой норме линейное многообразие Q становится банаховым пространством. На протяжении всей работы будем обозначать его через $Y\{A_n\}$ и через T будем обозначать естественное вложение $Y\{A_n\}$ в X . Таким образом, $Q = T(Y\{A_n\})$ и, следовательно, борелевский тип множества Q совпадает с борелевским типом образа пространства $Y\{A_n\}$ при инъекции T , а последний в свою очередь тесно связан со свойствами пространства $Y\{A_n\}$ и предельного оператора A_0 , определенного на множестве Q следующим образом:

$$A_0 x = \lim_n A_n x, x \in Q.$$

Заклучим наше введение примером, показывающим, что множество сходимости может иметь тип $G_{\delta\sigma}$, не будучи множеством типа F_σ . Введем следующие обозначения: $\{v_i\}$ — естественный базис пространства l_2 ; $\{v_i^*\}$ — сопряженная к $\{v_i\}$ система, т. е. тоже естественный базис l_2 ; $\{t_i\}$ — естественный базис пространства c_0 ; $\{e_i\}$ — естественный базис пространства l_1 :

$$u_n = \sum_1^n t_i, u_n^* = e_n - e_{n+1}, (n = 1, 2, \dots).$$

Нетрудно проверить, что $\{u_n\}$ — базис пространства c_0 с сопряженной системой $\{u_n^*\}$, причем подпространство $E = [u_n^*]_1^\infty \subset l_1$, натянутое на множество $\{u_n^*\}_1^\infty$, имеет в l_1 коразмерность единица и ω^* -замыкание единичного шара $U(E)$ подпространства E совпадает с единичным шаром (в эквивалентной норме) пространства l_1 . Определим компактное отображение B пространства l_2 в c_0 по формуле

$$B(\sum a_i v_i) = \sum 2^{-i} a_i u_i, \sum a_i v_i \in l_2.$$

Пользуясь сепарабельностью пространства l_1 и замкнутостью множества $B^*(U(l_1))$, можно показать [3], что образ любого подпространства l_1 при отображении B^* есть множество типа $G_{\delta\sigma}$. В частности, $B^*(E)$ — множество типа $G_{\delta\sigma}$. Для каждого $n = 1, 2, \dots$ определим отображение A_n пространства $l_2 \rightarrow l_1$ по формуле

$$A_n(\sum_{i=1}^\infty a_i v_i^*) = \sum_{i=1}^\infty 2^i a_i u_i^*, \sum_{i=1}^\infty a_i v_i^* \in l_2.$$

Пользуясь базисностью последовательности $\{u_i^*\}$, нетрудно установить, что множество сходимости $Q\{A_n\}$ совпадает с $B^*(E)$ и, следо-

вательно, имеет тип $G_{\delta\sigma}$. Допустим теперь, что множество $Q\{A_n\}$, а значит, и $B^*(E)$ имеет тип F_σ , откуда с помощью леммы 1 делаем вывод: в пространстве E существует эквивалентная норма с единичным шаром $W(E)$ такая, что $B^*(W(E))$ — замкнутое и, следовательно, (B^* — компактное отображение), компактное множество. Но в силу сделанных выше замечаний существует элемент $j_0 \in \omega^*cl W(E) \setminus W(E)$. Последнее утверждение легко приводит к противоречию с компактностью множества $B^*(W(E))$. Итак, множество сходимости $Q\{A_n\}$ имеет тип $G_{\delta\sigma}$, не будучи F_σ -множеством.

Несколько замечаний об обозначениях и определениях. Кроме введенных выше будем использовать следующие. Пусть E — линейное нормированное пространство. Через $U(E)$ ($S(E)$) будем обозначать единичный шар (единичную сферу) пространства E . Если $A \subset E$, то через $[A]$ обозначим замкнутую линейную оболочку множества A .

Линейное многообразие L в пространстве E^* будем называть нормирующим, если

$$\inf_{x \in E} \sup_{f \in S(L)} f(x) > 0.$$

Под термином инъекция будем понимать линейное непрерывное взаимно однозначное отображение. Подпространство — замкнутое линейное многообразие банахова пространства. Все банаховы пространства будем считать вещественными и (если не оговорено противное) бесконечномерными. Если X и Z — банаховы пространства, то через $L(X, Z)$ обозначим пространство всех линейных ограниченных операторов, действующих из X в Z .

Сформулируем несколько лемм. Первая из них доказана в [3].

Лемма 1. Пусть T — инъекция банахова пространства Y в такое же X . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $T(Y)$ — множество типа F_σ в X ;
- 2) существует эквивалентная норма на Y с единичным шаром $W(Y)$ такая, что множество $T(W(Y))$ замкнуто в X . Доказательство следующей леммы содержится в [4].

Лемма 2. Пусть Y — сепарабельное банахово пространство и T — инъекция Y в некоторое банахово пространство X . Тогда следующие утверждения эквивалентны: 1) линейное многообразие $T^*(X^*)$ — нормирующее для Y ; 2) отображение T^{-1} принадлежит первому классу Бэра, т. е. существует последовательность $\{g_i\}$ непрерывных отображений множества $T(Y)$ в Y такая, что для каждого $y \in Y$ $\lim g_i(Ty) = y$.

Лемма 3. Пусть X и Z — банаховы пространства, $\{A_n\} \subset L(X, Z)$ и T — естественное вложение пространства $Y\{A_n\}$ в X . Тогда линейное многообразие $T^*(X^*)$ является нормирующим (даже 1-нормирующим) для пространства $Y\{A_n\}$.

Доказательство. Пусть $y \in S(Y\{A_n\})$, тогда по определению нормы в пространстве $Y\{A_n\}$ имеем $1 = \|y\| = \sup_n \{\|Ty\|, \|A_nTy\|\} =$
 $= \sup_n \{\max \{f(Ty) : f \in U(X^*)\}, \max \{g(A_nTy) : g \in U(Z^*)\}\} =$

$$= \max \{ \max \{ (T^*f)(y) : f \in U(X^*) \}, \sup_n \max \{ ((A_n T)^*g)(y) : g \in U(Z^*) \} \} \quad (1).$$

Заметим, что $\|T\| \leq 1$ и $\|A_n T\| \leq 1$ и, кроме того, для каждого $g \in U(Z^*) : (A_n T)^*g \in T^*(X^*)$. Из сделанных замечаний и из (1) легко следует утверждение леммы.

Наш первый результат носит общий характер и будет использован при доказательстве теорем 2 и 3.

Теорема 1. Пусть X и Y — банаховы пространства, причем существует инъекция T пространства Y в X , обладающая следующими свойствами: 1) T^{-1} — неограниченное отображение первого класса Бэра (т. е. существует последовательность непрерывных отображений $\{g_k\}$ множества $T(Y)$ в Y такая, что для всех $y \in Y : \lim g_k(Ty) = y$; 2) множество $T(Y)$ имеет тип $G_{\delta\sigma}$ в X .

Тогда из всякой последовательности $\{y_i\} \subset S(Y)$ такой, что $\lim \|Ty_i\| = 0$, можно выделить ограниченно полную базисную последовательность $\{y_{i_k}\}$, причем множество $T(\{y_{i_k}\}_{k=1}^\infty)$ имеет тип F_σ в X .

Доказательство. Пусть последовательность $\{y_i\} \subset S(Y)$ такая, что $\lim \|Ty_i\| = 0$. Так как линейное многообразие $T^*(X^*)$ тотально, то по теореме 1.12 ([5], с. 131) из последовательности $\{y_i\}$ можно выделить базисную последовательность. Без ущерба общности будем считать $\{y_i\}$ базисной. По теореме Крейна — Мильмана — Рутмана об устойчивости существует последовательность положительных чисел $\{a_i\}$ такая, что всякая последовательность элементов $\{z_i\} \subset Y$, обладающая свойством $\|y_i - z_i\| \leq a_i, i = 1, 2, \dots$, является базисной и эквивалентной последовательности $\{y_i\}$. Будем считать, что $a_i < 2^{-i}$ ($i = 1, 2, \dots$).

Из того, что $T(Y)$ — множество типа $G_{\delta\sigma}$ и теоремы Бэра о категории следует, что существует последовательность $\{D_k\}$ открытых подмножеств X такая, что $\bigcap_1^\infty D_k \subset T(Y)$ и множество $\text{cl} \bigcap_1^\infty T^{-1}(D_k)$ имеет непустую внутренность в Y . Положим $G_k = T^{-1}(D_k)$, ($k = 1, 2, \dots$) и без ущерба общности будем считать, что $\text{cl} \bigcap_1^\infty G_k \supset 2 \cdot U(Y)$,

$$0 \in \bigcap_1^\infty G_k.$$

Перейдем к построению подпоследовательности $\{y_{i_k}\}$. В силу плотности открытого множества G_1 в шаре $2U(Y)$ существует элемент $u_1 \in G_1$ такой, что: $\|y_1 - u_1\| \leq a_1, -u_1 \in G_1$.

Положим $A_1 = \{u_1, 0, -u_1\}$ и, воспользовавшись тем, что множество D_1 открыто, найдем такое число $b_1 > 0$, что $T(A_1) + b_1 U(X) \subset D_1$.

Пусть g_{n_1} — такое отображение, что для каждого $y \in A_1$ $\|y - g_{n_1}(Ty)\| \leq 2^{-1}$. В силу непрерывности отображения g_{n_1} и конечности множества A_1 существует число $c_1 > 0$ такое, что для всех $y \in A_1$ и всех x , удовлетворяющих условиям $x \in T(Y)$ и $\|x - Ty\| < c_1$, имеет место $\|g_{n_1}(x) - g_{n_1}(Ty)\| \leq 2^{-1}$. Так как $\lim \|Ty_i\| = 0$, то существует элемент y_{i_1} такой, что $\|Ty_{i_1}\| \leq 2^{-3} \min \{b_1, c_1\}$. Восполь-

зовавшись плотностью открытого множества G_2 в шаре $2U(Y)$, можно указать элемент $u_2 \in G_2$ и набор чисел $\{t_{i2}\}_1^m$, такие, что $\|y_{i_1} - u_2\| \leq \min\{a_{i_1}, \|Ty_{i_1}\|/\|T\|\}$ и множество $B_2 = \{t_{i2} u_2\}_1^m$, 2^{-2} -сеть на отрезке, соединяющем u_2 и $-u_2$, и $A_2 = \{u + v \in U(Y) : u \in A_1, v \in B_2\} \subset G_2$. Далее, как выше, находим такое число $b_2 > 0$, что $T(A_2) + b_2 U(X) \subset D_2$ и такое отображение g_{n_2} , что для каждого $y \in A_2 : \|y - g_{n_2}(Ty)\| \leq 2^2$. Воспользовавшись непрерывностью отображения g_{n_2} и конечностью множества A_2 , найдем такое число $c_2 > 0$, что для всех $y \in A_2$ и всех x , удовлетворяющих условиям $x \in T(Y)$ и $\|x - Ty\| < c_2$, имеет место $\|g_{n_2}(x) - g_{n_2}(Ty)\| \leq 2^{-2}$. Элемент y_{i_2} выберем из условия: $\|Ty_{i_1}\| \leq 2^{-4} \min\{b_1, b_2, c_1, c_2\}$. Опираясь теперь на плотность открытого множества G_3 в шаре $2U(Y)$, можно найти элемент $u_3 \in G_3 : \|y_{i_1} - u_3\| \leq \min\{a_{i_1}, \frac{\|Ty_{i_1}\|}{\|T\|}\}$ и набор чисел $\{t_{i3}\}_1^m$, такой, что множество $B_3 = \{t_{i3} u_3\}_1^m$, 2^{-3} -сеть на отрезке, соединяющем u_3 и $-u_3$, и $A_3 = \{u + v + w \in U(Y) : u \in A_1, v \in B_2, w \in B_3\} \subset G_3$. Далее процесс построения последовательностей $\{u_i\}$, $\{y_{i_k}\}$ и множеств $\{t_{ij}\}_{i=1}^{m_j}$ ясен. В силу сделанных в начале доказательства замечаний об устойчивости легко видеть, что $\{u_i\}$ — базисная последовательность. Из построения $\{u_i\}$ легко получить, что $\|Tu_i\| \leq 2^{-i} \min\{b_1, \dots, b_{i-1}, c_1, \dots, c_{i-1}\}$. Нам необходимо доказать, что $\{u_i\}$ — ограниченно полная базисная последовательность. Начнем с более слабого свойства последовательности $\{u_i\}$. Именно: пусть последовательность $\{t_{ij}\}_{j=1}^\infty$ такова, что

$$\sup_n \left\| \sum_{j=1}^n t_{ij} u_j \right\| \leq 1/4, \quad (2)$$

тогда ряд $\sum t_{ij} u_j$ сходится.

Для доказательства заметим, что ряд $\sum t_{ij} Tu_j$ сходится абсолютно. Пусть $x_0 = \sum t_{ij} Tu_j$. Покажем, что для всех n $x_0 \in D_n$. Действительно,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n+1}^\infty t_{ij} Tu_j \right\| &\leq \sum_{n+1}^\infty \|Tu_j\| \leq \sum_{n+1}^\infty 2^{-j} \min\{b_1, \dots, b_{j-1}, c_1, c_{j-1}\} \leq \\ &\leq \min\{b_n, c_n\} \leq b_n. \end{aligned} \quad (3)$$

Но в силу (2) и способа построения $\{u_i\} : \sum_1^n t_{ij} Tu_j \in D_n$, откуда, учитывая определение b_n и (3), получаем $x_0 \in D_n$, $n = 1, 2, \dots$. Итак, $x_0 \in \bigcap_1^\infty D_n$, но $\bigcap_1^\infty D_n \subset T(Y)$ и, следовательно, последовательность $\{g_{n_k}(x_0)\}$ сходится. Имеем

$$\begin{aligned} \|g_{n_m}(x_0) - \sum_1^m t_{i_k k} u_k\| &\leq \|g_{n_m}(\sum_1^m t_{i_k k} Tu_k + \sum_{m+1}^\infty t_{i_k k} Tu_k) - \\ &- g_{n_m}(\sum_1^m t_{i_k k} Tu_k)\| + \|g_{n_m}(\sum_1^m t_{i_k k} Tu_k) - \sum_1^m t_{i_k k} u_k\|. \end{aligned} \quad (4)$$

Так как $\sum_1^m t_{i_k k} u_k \in A_m$, $\|\sum_{m+1}^\infty t_{i_k k} T u_k\| \leq c_m$, то, учитывая определение подпоследовательности $\{g_{n_k}\}$, получаем из (4) $\|g_{n^m}(x_0) - \sum_1^m t_{i_k k} u_k\| \leq 2^{-m} + 2^{-m}$, откуда, воспользовавшись сходимостью последовательности $\{g_{n_m}(x_0)\}$, немедленно получаем сходимость ряда $\sum t_{i_k k} u_k$.

Пусть теперь числовая последовательность $\{p_i\}$ такова, что $\sup_n \|\sum_1^n p_i u_i\| < \infty$. Покажем, что ряд $\sum p_i u_i$ сходится. Без ущерба общности можно считать, что $\sup_n \|\sum_1^n p_i u_i\| \leq 1/8$, значит $\sup_i \|p_i\| \leq 1/2$ и, следовательно, для каждого $k = 1, 2, \dots$ существует число $t_{i_k k}$ такое, что $|p - t_{i_k k}| \leq 2^{-k}$. Нетрудно видеть, что $\sup_n \|\sum_1^\infty t_{i_k k} u_k\| < \infty$ и по уже доказанному ряд $\sum t_{i_k k} u_k$ сходится, что, очевидно, влечет сходимость ряда $\sum p_i u_i$. Итак, $\{u_i\}$ — ограниченно полная базисная последовательность, откуда, пользуясь тем, что $\|u_k - y_{i_k}\| \leq a_{i_k} < 2^{-i_k}$, $k = 1, 2, \dots$, легко получить, что и $\{y_{i_k}\}$ — ограниченно полная базисная последовательность. Из последнего утверждения следует, что множество $T(\{y = \sum p_k y_{i_k} : \sup_n \|\sum_1^n p_k y_{i_k}\| \leq 1\})$ замкнуто в X , откуда немедленно вытекает, что множество $T(\{y_{i_k}\}_1^\infty)$ имеет тип F_σ .

Теорема доказана.

Как показывает следующее предложение, ограничение на борелевский тип образа $T(Y)$ в теореме 1 не может быть ослаблено.

Предложение 1. Пусть Y — произвольное сепарабельное банахово пространство и T — инъекция Y в банахово пространство X такая, что отображение T^{-1} принадлежит первому классу Бэра. Тогда образ $T(Y)$ есть множество типа $F_{\sigma\delta}$ в X .

Доказательство. Без ущерба общности будем считать пространство X сепарабельным и $\text{cl } T(Y) = X$. Согласно лемме 2 линейное многообразие $T^*(X^*)$ — нормирующее для пространства Y , откуда, пользуясь сепарабельностью пространств X и Y , нетрудно получить, что существует возрастающая последовательность конечномерных подпространств $\{E_n\}$, $E_n \subset X^*$, $\dim E_n = n$, $n = 1, 2, \dots$ такая, что линейное многообразие $\bigcup_1^\infty E_n$ — нормирующее для X , а линейное многообразие $\bigcup_1^\infty T^*(E_n)$ — нормирующее для Y . Но тогда в пространстве Y существует полная минимальная система $\{y_i\}$ с сопряженной $\{y_i^*\}$ такой, что для каждого $n = 1, 2, \dots$ $T^*(E_n) = [y_i^*]_1^n$ ([5], теорема 1.6.).

Таким образом, $\{y_i\}$ — полная минимальная система с нормирующей сопряженной и, следовательно, по одной теореме М. И. Кадеца [6] система $\{y_i\}$ — операторный базис, т. е. существует последовательность непрерывных (вообще говоря, нелинейных) операторов T_n , каждый из которых определен в соответствующем подпространстве $\{y_i\}_1^n$, таких, что для каждого $y \in Y: \lim T_n S_n y = y$ (операторы S_n определены стандартно: $S_n y = \sum_1^n y_i^*(y) y_i, y \in Y, n = 1, 2, \dots$). Можно проверить, что система операторов T_n , построенная в [6], обладает следующим свойством (\times): пусть последовательность чисел $\{a_i\}$ такова, что существует предел $\lim T_n (\sum_1^n a_i y_i) = y_0$, тогда для каждого $i = 1, 2, \dots y_i^*(y_0) = a_i$. Положим $x_i = T y_i, x_i^* = T^{*-1} y_i^*, i = 1, 2, \dots$. Легко видеть, что $\{x_i\}$ — полная минимальная система в X с тотальной (даже нормирующей) сопряженной $\{x_i^*\}$. Для каждого натурального n определим отображение g_n пространства X в пространство Y по формуле

$$g_n(x) = T_n \left(\sum_1^n x_i^*(x) y_i \right), x \in X.$$

Легко видеть, что каждое g_n — непрерывное отображение и, кроме того, для каждого $y \in Y: \lim g_n(Ty) = y$. Пусть теперь $x \in X$ такой элемент, что существует предел $\lim g_n(x) = y$. Тогда по свойству (\times) системы $\{T_n\}$ для каждого $i = 1, 2, \dots x_i^*(x) = y_i^*(y)$, откуда, пользуясь тотальностью системы $\{x_i^*\}$, нетрудно получить $x = Ty$. Таким образом, множество сходимости последовательности непрерывных отображений $\{g_n\}$, которое, очевидно, имеет тип $F_{\sigma\delta}$, совпадает с множеством $T(Y)$. Предложение доказано.

Следующее предложение дает критерий наличия в пространстве $Y\{A_n\}$ (см. определение в начале статьи) подпространства, изоморфного c_0 .

Предложение 2. Пусть предельный оператор A_0 (с областью определения $Q\{A_n\}$) не замкнут. Тогда существует последовательность $\{u_i\} \subset S(Y\{A_n\})$, эквивалентная естественному базису c_0 и такая, что $\lim \|Tu_i\| = 0$.

Доказательство. Заметим, что для всех $y \in Y\{A_n\} \max\{\|Ty\|, \|A_0 Ty\|\} \leq \max\{\|Ty\|, \sup_n \|A_n Ty\|\} = \|y\|$, откуда в силу незамкнутости оператора A_0 легко следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует элемент $y = y(\varepsilon) \in S(Y\{A_n\})$ такой, что $\|Ty\| < \varepsilon$ и $\|A_0 Ty\| < \varepsilon$. Воспользовавшись этим замечанием, а также тем, что для всех $y \in Y\{A_n\} A_0 Ty = \lim A_n Ty$, нетрудно построить последовательность элементов $\{u_i\} \subset S(Y\{A_n\})$ и строго возрастающую последовательность номеров $\{m_i\}$ такие, что для всех $i = 1, 2, \dots$:

$$\|Tu_i\| \leq \frac{2^{-i}}{\max\{\|A_k\|: 1 \leq k \leq m_{i-1}\}}; \quad (5)$$

$$\|A_k Tu_i\| \leq 2^{-i}, \quad k = m_i, m_i + 1, \dots \quad (6)$$

Без ущерба общности можно считать последовательность $\{u_i\}$ базисной (см. [5], теорема 1.12).

Положим $v_i = Tu_i$, ($i = 1, 2, \dots$) и пусть $\{i_1 < i_2 < \dots i_p\}$ — произвольное конечное подмножество натурального ряда. Из (5) получаем

$$\left\| \sum_{k=1}^p v_{i_k} \right\| \leq 1. \quad (7)$$

Оценим $\|A_l (\sum_{i=1}^p v_{i_k})\|$, ($l = 1, 2, \dots$). Пусть индекс j таков, что $m_j \leq l < m_{j+1}$ и индекс q таков, что $i_1 < \dots < i_q \leq j < j+1 < i_{q+2} < \dots < i_p$.

Из (6) получаем

$$\|A_l (\sum_{i=1}^q v_{i_k})\| \leq 1, \quad (8)$$

из (5) с учетом $l < m_{j+1} \leq m_{i_{q+2}-1}$ имеем

$$\begin{aligned} \left\| A_l \left(\sum_{k=q+2}^p v_{i_k} \right) \right\| &\leq \sum_{k=q+2}^p \|A_l\| \frac{2^{-i_k}}{\max \{ \|A_t\| : 1 \leq t \leq m_{i_k} - 1 \}} \leq \\ &\leq \sum_{k=q+2}^p 2^{-i_k} \leq 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Наконец, из того, что $\|u_i\| = 1$ ($i = 1, 2, \dots$) вытекает:

$$\|A_l v_{i_{q+1}}\| \leq \max \{ \|v_{i_{q+1}}\|, \sup_n \|A_n v_{i_{q+1}}\| \} \leq 1. \quad (10)$$

Из (7)–(10) и определения нормы в пространстве $Y\{A_n\}$ получаем, что для любого конечного подмножества σ натурального ряда: $\|\sum_{i \in \sigma} u_i\| \leq 3$, откуда, учитывая базисность последовательности $\{u_i\} \subset S(Y\{A_n\})$, нетрудно сделать вывод об эквивалентности $\{u_i\}$ естественному базису c_0 . Предложение доказано.

Замечание. Пусть $\{x_i\}$ — полная минимальная система в банаховом пространстве X с тотальной сопряженной $\{x_i^*\}$ и $S_n x = \sum_{i=1}^n x_i^*(x) x_i$, $x \in X$, $n = 1, 2, \dots$. В [7] доказано, что если $\{x_i\}$ не является базисом пространства X , то пространство $Y\{S_n\}$ нерефлексивно. Из предложения 2 следует более сильный факт: $Y\{S_n\} \supset c_0$.

Теорема 2. Пусть множество сходимости $Q\{A_n\}$ имеет тип $G_{\delta\sigma}$. Тогда предельный оператор A_0 (с областью определения $Q\{A_n\}$) замкнут.

Доказательство. Доказательство от противного получается последовательным применением предложения 2 и теоремы 1.

Теорема 3. Пусть X и Z — банаховы пространства, $\{A_n\} \subset L(X, Z)$, $Q\{A_n\}$ — множество типа $G_{\delta\sigma}$ в X и Q_1 — произвольное линейное подмногообразие многообразия Q . Тогда либо операторы $\{A_n|_{Q_1}\}_{n=1}^\infty$

ограничены в совокупности (и тогда, очевидно, $\text{cl } Q_1 \subset Q$), либо существует линейное подмногообразие $Q_2 \subset \text{cl } Q_1$, обладающее свойствами: 1) Q_2 — имеет тип F_σ в X ; 2) $Z_1 = A_0(Q_2)$ — есть замкнутое бесконечномерное подпространство пространства Z с ограниченным полным базисом, причем оператор $(A_0|_{Q_2})^{-1}$ существует и ограничен; 3) пространства $T^{-1}(Q_2)$ и Z_1 изоморфны.

Доказательство. Пусть операторы $\{A_n|_{Q_1}\}$ не ограничены в совокупности. Без ущерба общности можно считать $Q_1 = Q$, а также пространство X , а вслед за ним Z и Y $\{A_n\}$ сепарабельными. Воспользовавшись последовательно леммами 3 и 2, получаем, что T^{-1} — неограниченный оператор первого класса Бэра. По теореме 1 существует ограниченно полная базисная последовательность $\{y_i\} \subset S(Y\{A_n\})$ такая, что $\|Ty_i\| \leq 2^{-i}$, $i = 1, 2, \dots$ и для всех $m: T(\{y_i\}_m^\infty)$ — множество типа F_σ в X . Но из замкнутости оператора A_0 (теорема 2), базисности последовательности $\{y_i\}$ и условия $\|Ty_i\| \leq 2^{-i}$, ($i = 1, 2, \dots$) нетрудно получить, что при некотором m отображение $A_0 T$ есть изоморфное вложение пространства $Y_1 = \{y_i\}_m^\infty$ в Z . Для завершения доказательства теоремы достаточно положить $Q_2 = T(Y_1)$. Теорема доказана.

Список литературы: 1. Mazur S., Sternbach L. Über Konvergenzmengen von Folgen linearer Operationen//Studia Math.—1933.—IV.—Р. 54—65. 2. Banach S., Mazur S. Eine Bemerkung über die Konvergenzmengen von Folgen linearer Operationen//Studia Math.—1933.—IV.—Р. 90—95. 3. Bourgain J., Rosenthal H. P. Applications of the Theory of Semi-embeddings to Banach Space Theory//I. Funct. Anal.—1983.—52.—Р. 149—188. 4. Петунин Ю. И., Пlichко А. Н. Теория характеристик подпространств и ее приложения.—К.: Вища шк. Изд-во при Киев. ун-те, 1980.—177 с. 5. Мильман В. Д. Геометрическая теория пространств Банаха//Успехи мат. наук.—1970.—XXV, вып. 3 (153).—С. 113—174. 6. Кадец М. И. Нелинейные операторные базисы в пространстве Банаха//Теория функций, функций. анализ и их прил.—1966.—Вып. 2.—С. 128—130. 7. Singer I. Bases in Banach spaces I.—Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag, 1970.—700 p.

Поступила в редколлегию 04.10.86

УДК 517.54+519.98

А. Я. ХЕЙФЕЦ

РАВЕНСТВО ПАРСЕВАЛЯ В АБСТРАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ИНТЕРПОЛЯЦИИ И СОЕДИНЕНИЕ ОТКРЫТЫХ СИСТЕМ. II

§ 2. Абстрактная задача интерполяции. 1. Формулировка задачи. Постановка задачи и ее мотивировка были приведены в [4]*. Здесь мы напомним ее.

Пусть L_1 и L_2 — гильбертовы пространства, X — линейное пространство, T — линейный оператор в X , D — неотрицательная полутора-

* Первая часть статьи опубликована в вып. 49 настоящего сборника. Там же приведен список литературы.

линейная форма на X , E и M — линейные отображения из X в L_1 и L_2 соответственно такие, что имеет место основное тождество (ОТ): $D(x, y) - D(Tx, Ty) = \langle Ex, Ey \rangle - \langle Mx, My \rangle$ (2.1).

Голоморфная в единичном круге функция $\omega(\xi)$, значениями которой являются линейные сжимающие операторы из L_1 в L_2 , называется решением абстрактной интерполяционной задачи, если существует линейное отображение $F: X \rightarrow H^\omega$ со свойствами

$$\langle Fx, Fx \rangle \leq D(x, x); \quad (2.2a)$$

$$FTx = t \cdot Fx - \begin{bmatrix} 1_{L_2} & \omega \\ \omega^* & 1_{L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Mx \\ Ex \end{bmatrix}, \quad (|t| = 1). \quad (2.2b)$$

Требуется доказать существование и описать все решения задачи $\omega(\xi)$, а также соответствующие отображения F .

Отметим, что равенство (2.2b) во многих важных частных случаях может быть переписано в несколько иной форме: пусть при некотором ξ , $|\xi| < 1$, существует $(\xi - T)^{-1}$, тогда при этом $\xi: (Fx)_+(\xi) = (\omega(\xi)E - M)(\xi - T)^{-1}x$ (2.2'+); если же при некотором ξ , $|\xi| < 1$, существует $(1_X - \bar{\xi}T)^{-1}$, то при этом $\xi (Fx)_-(\xi) = \bar{\xi}(E - \omega(\xi)^*M)(1_X - \bar{\xi}T)^{-1}x$ (2.2'—).

2. Узел, ассоциированный с задачей. Так же, как и в [4] предыдущего сборника, свяжем с данными задачи (X, T, D, E, M) открытую систему α . сопоставим каждому $x \in X$ антилинейный функционал на X (который будем обозначать Dx) вида $Dx(y) \equiv D(x, y)$ (2.3). Введем в пространстве $\{Dx\}$ скалярное произведение $\langle Dx_1, Dx_2 \rangle \equiv D(x_1, x_2)$ (2.4). В качестве H^α возьмем пополнение пространства $\{Dx\}$ относительно введенного скалярного произведения. Основное тождество позволяет определить изометрию из $H^\alpha \oplus L_1$ в $H^\alpha \oplus L_2$:

$$V \begin{bmatrix} DTx \\ Ex \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Dx \\ Mx \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Областью определения (d_V) оператора V является замыкание в $H^\alpha \oplus \oplus L_1$ векторов вида $DTx \oplus Ex$, а областью значений (Δ_V) — замыкание в $H^\alpha \oplus L_2$ векторов вида $Dx \oplus Mx$. Через N_V и M_V обозначим дефектные подпространства V :

$$N_V = (H^\alpha \oplus L_1) \ominus d_V, \quad M_V = (H^\alpha \oplus L_2) \ominus \Delta_V. \quad (2.6)$$

Далее изометрия V может быть дополнена (см., например, [1] предыдущего сборника) до унитарного узла, а именно: пусть N_1 и N_2 — вторые экземпляры пространств N_V и M_V соответственно, рассматриваемые как отдельные пространства. Зададим оператор A^α , отображающий $H^\alpha \oplus L_1 \oplus N_2 \equiv d_V \uplus N_V \oplus N_2$ на $H^\alpha \oplus L_2 \oplus N_1 \equiv \Delta_V \oplus M_V \oplus \oplus N_1$, следующим образом:

$$A^\alpha|_{d_V} = V;$$

$$A^\alpha|_{N_V} \text{ — тождественное отображение } N_V \text{ на } N_1;$$

$$A^\alpha|_{N_2} \text{ — тождественное отображение } N_2 \text{ на } M_V.$$

Очевидно, A^α — унитарен. Внешними пространствами узла являются: $N_1^\alpha = N_2 \oplus L_1$, $N_2^\alpha = N_1 \oplus L_2$. Очевидно, что $P_{N_1} A^\alpha|_{N_2} = 0$.

Характеристическую функцию узла α обозначаем через S и разбиваем на блоки:

$$S = \begin{bmatrix} s_{21} & s_{22} \\ s_{11} & s_{12} \end{bmatrix} : N_2 \oplus L_1 \rightarrow N_1 \oplus L_2.$$

3. Построение решений путем замыкания ассоциированного узла. Приведем сейчас конструкцию (по существу совпадающую с конструкцией, применявшейся в [1, 4] предыдущего сборника, позволяющую получать решения абстрактной интерполяционной задачи, а затем покажем, что таким способом получаются все решения. Она основана на замыкании описанного в п. 2 узла α , произвольным узлом β с $N_1^\beta = N_1$, $N_2^\beta = N_2$.

Пусть $\omega(\zeta)$ — характеристическая функция узла β , γ — узел, получающийся замыканием узла α , посредством узла β . Характеристическая функция узла γ равна $\omega = s_{12} + s_{11}\omega(1_{N_1} - s_{21}\omega)^{-1}s_{22}$ (2.7). Она и оказывается решением задачи.

Положим $Fx \equiv G^v D^x$ (2.8), где G^v — представление Фурье, связанное с простой частью узла γ , описанное в § 1.7 (формула (1.24)). В проверке нуждается лишь соотношение (2.2b). Непосредственно из определений следует соотношение

$$G_+^\alpha(\zeta) P_{H^\alpha} (1_{H^\alpha \oplus N_1^\alpha} - \zeta P_{H^\alpha} A^\alpha) = P_{N_1^\alpha} A^\alpha - S(\zeta) P_{N_1^\alpha}; \quad (2.9+)$$

$$G_-^\alpha(\zeta) P_{H^\alpha} (1_{H^\alpha \oplus N_2^\alpha} - \bar{\zeta} P_{H^\alpha} (A^\alpha)^*) = \bar{\zeta} (P_{N_1^\alpha} (A^\alpha)^* - S(\zeta)^* P_{N_1^\alpha}). \quad (2.9-)$$

Из этих соотношений с использованием (1.24) (при $h^v = h^\alpha \oplus 0$) (1.21) и (1.21') получаем

$$\begin{aligned} G_+^v(\zeta) P_{H^\alpha} (1_{H^\alpha \oplus N_1^\alpha} - \zeta P_{H^\alpha} A^\alpha) &= \\ &= (\psi(\zeta) \omega(\zeta) P_{N_1} + P_{L_1}) A^\alpha - (\psi(\zeta) P_{N_1} + \omega(\zeta) P_{L_1}) \end{aligned} \quad (2.10+)$$

и

$$\begin{aligned} G_-^v(\zeta) P_{H^\alpha} (1_{H^\alpha \oplus N_2^\alpha} - \bar{\zeta} P_{H^\alpha} (A^\alpha)^*) &= \\ &= \bar{\zeta} (\varphi(\zeta)^* \omega(\zeta)^* P_{N_2} + P_{L_1}) (A^\alpha)^* - \bar{\zeta} (\varphi(\zeta)^* P_{N_1} + \omega(\zeta)^* P_{L_2}). \end{aligned} \quad (2.10-)$$

Рассматривая (2.10+) на векторах из d_v вида $DTx \oplus Ex$ и (2.10-) — на векторах из Δ_v вида $Dx \oplus Mx$, получим (2.2b). Таким образом, ω — решение.

4. Еще несколько соотношений. Из рассмотрения (2.10+) на векторах из N_v и N_2 и (2.10-) на векторах из M_v и N_1 получается еще несколько соотношений, которые нам понадобятся в дальнейшем:

$$G_+^v(\zeta) P_{H^\alpha} (A^\alpha)^* | N_1 = \psi(\zeta) \omega(\zeta) - \omega(\zeta) \cdot s_{22}(0)^*. \quad (2.11+)$$

$$\zeta G_+^v(\zeta) P_{H^\alpha} A^\alpha | N_2 = \psi(\zeta) - s_{11}(0); \quad (2.12+)$$

$$G_-^v(\zeta) P_{H^\alpha} A^\alpha | N_2 = \bar{\zeta} (\varphi(\zeta)^* \omega(\zeta)^* - \omega(\zeta)^* s_{11}(0)); \quad (2.11-)$$

$$G_-^v(\zeta) | P_{H^\alpha} (A^\alpha)^* | N_1 = \varphi(\zeta)^* - s_{22}(0)^*. \quad (2.12-)$$

Или, записывая эти соотношения в виде пар

$$G^v P_{H^\alpha} (A^\alpha)^* | N_1 = \begin{bmatrix} \psi \omega \\ \varphi^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega \\ 1_{L_1} \end{bmatrix} s_{22}(0)^*; \quad (2.13)$$

$$G^v P_{H^\alpha} A^\alpha | N_2 = \bar{t} \left(\begin{bmatrix} \psi \\ \varphi^* \omega^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1_{L_2} \\ \omega^* \end{bmatrix} s_{11}(0) \right). \quad (2.14)$$

5. Общий вид решений. Пусть $\omega(\zeta)$ — голоморфная в единичном круге, сжимающая оператор-функция (из L_1 в L_2), $F: X \rightarrow H^w$ со свойствами (2.2).

Из свойства (2.2a) следует, что F зависит лишь от Dx и может быть продолжено на H^α по непрерывности. Вспомня соотношения (2.13) и (2.14), положим

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \varphi^* \end{bmatrix} \equiv F P_{H^\alpha} (A^\alpha)^* | N_1 + \begin{bmatrix} \omega \\ 1_{L_1} \end{bmatrix} s_{22}(0)^*; \quad (2.15)$$

$$\begin{bmatrix} \psi \\ \varphi^* \end{bmatrix} \equiv t F P_{H^\alpha} A^\alpha | N_2 + \begin{bmatrix} 1_{L_2} \\ \omega^* \end{bmatrix} s_{11}(0). \quad (2.16)$$

Из этих определений и свойства (2.2b) отображения F , обращая рассуждения пп. 4 и 3, получим формулы типа (2.10+) и (2.10—):

$$\begin{aligned} F_+(\zeta) P_{H^\alpha} (1_{H^\alpha \oplus N_1^\alpha} - \zeta P_{H^\alpha} A^\alpha) = \\ = (\psi_1(\zeta) P_{N_1} + P_- A^\alpha - (\psi(\zeta) P_{N_2} + \omega(\zeta) P_{L_1})) \end{aligned} \quad (2.17)$$

и

$$\begin{aligned} F_-(\zeta) P_{H^\alpha} (1_{H^\alpha \oplus N_2^\alpha} - \bar{\zeta} P_{H^\alpha} (A^\alpha)^*) = \\ = \bar{\zeta} (\varphi_1(\zeta)^* P_{N_2} + P_{L_1}) (A^\alpha)^* - \bar{\zeta} (\varphi(\zeta)^* P_{N_1} + \omega(\zeta)^* P_{L_2}). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Соотношения (2.17) и (2.18) могут быть переписаны в виде соотношения типа (1.24):

$$F h^\alpha = \begin{bmatrix} \psi_1 & 1_{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1^* & 1_{L_1} \end{bmatrix} G^\alpha h^\alpha. \quad (2.19)$$

Кроме того, из рассмотрения (2.17) на векторах вида $(1_{H^\alpha \oplus N_1^\alpha} - \zeta P_{H^\alpha} \times (A^\alpha)^{-1} n_1^\alpha)$ получаем соотношение типа (1.21'): $[\psi, \omega] = [\psi_1, 1_{L_1}] S$ (2.20) (в силу того что $P_{N_1^\alpha} (1_{H^\alpha \oplus N_1^\alpha} - \zeta P_{H^\alpha} A^\alpha)^{-1} n_1^\alpha = n_1^\alpha$). А из рассмотрения (2.18) на векторах вида $(1_{H^\alpha \oplus N_2^\alpha} - \bar{\zeta} P_{H^\alpha} (A^\alpha)^*)^{-1} n_2^\alpha$ получаем соотношение типа (1.21): $[\varphi^*, *] = [\varphi_1^*, 1_{L_1}] S^*$ (2.21). Далее вычисления показывают, что

$$K(\zeta, \mu) \equiv \begin{bmatrix} G_+^w(\zeta) \\ G_-^w(\zeta) \end{bmatrix} (1_{H^w} - F F^*) [G_+^w(\mu)^*, G_-^w(\mu)^*] =$$

$$= \left(\frac{\frac{\psi(\zeta)\psi(\mu)^* - \psi_1(\zeta)\psi_1(\mu)^*}{1 - \bar{\zeta}\mu}}{\bar{\zeta}\frac{\varphi_1(\zeta)^*\psi(\mu)^* - \varphi(\zeta)^*\psi_1(\mu)^*}{\bar{\zeta} - \bar{\mu}}} \middle| \frac{\frac{\psi_1(\zeta)\varphi(\mu) - \psi(\zeta)\varphi_1(\mu)}{\zeta - \mu}\mu}{\bar{\zeta}\frac{\varphi(\zeta)^*\varphi(\mu) - \varphi_1(\zeta)^*\varphi_1(\mu)}{1 - \bar{\zeta}\mu}\mu} \right), \quad (2.22)$$

где G^w — модельные операторы (см. § 1.5).

Откуда ввиду сжимаемости F вытекает важное следствие — ядро $K(\zeta, \mu)$ эрмитово — положительно в поточечном смысле. Но тогда существует голоморфная сжимающая при $|\zeta| < 1$ оператор — функция $\omega(\zeta)$ (из N_1 в N_2) такая, что *) $\psi_1(\zeta) = \psi(\zeta)\omega(\zeta)$ и $\varphi_1(\zeta) = \omega(\zeta)\varphi(\zeta)$, ($|\zeta| < 1$) (2.23).

Из (2.20), (2.21) и (2.23) следует, что φ , ψ и ω вычисляются по формулам (1.22), (1.22') и (1.23) соответственно, а $Fh^\alpha = G^\gamma h^\alpha$, где γ — узел, получающийся замыканием узла α посредством узла β с характеристической функцией $\omega(\zeta)$.

6. Интегральное представление $D(x, x)$. При любом параметре $\omega(\zeta): N_1 \rightarrow N_2$ полное представление $D(x, x)$ получается применением равенства Парсеваля для узла γ (см. § 1.10) к векторам $h^\gamma = h^\alpha \oplus 0$ (где $h^\alpha = Dx$):

$$D(x, x) = \langle F^\omega x, F^\omega x \rangle_{H^\omega} + \langle I^\omega x, I^\omega x \rangle_{H^{d\sigma}} + \langle P_{(H^\alpha)'} Dx, Dx \rangle, \quad (2.24)$$

здесь $P_{(H^\alpha)'}$ — ортопроектор на подпространство изолированной части узла α ; $d\sigma$ — мера, соответствующая функции $a^\omega(\zeta)$, задаваемой формулой (1.28); $I^\omega x$ в силу формулы (1.29) имеет вид (этим же символом мы обозначили в (2.24) и соответствующую векторную меру):

$$(I^\omega x)(\zeta) = \begin{bmatrix} \omega \overset{\circ}{\varphi} & 0 & \overset{\circ}{\psi}^* & 0 \\ \overset{\circ}{\varphi} & 0 & \omega^* \overset{\circ}{\psi}^* & 0 \end{bmatrix} (\zeta) \cdot G^\alpha(\zeta) Dx - \\ - \int_T \frac{1 - |\zeta|^2}{|t - \zeta|^2} \begin{bmatrix} \psi^* & \omega \overset{\circ}{\varphi} \\ \omega^* \psi^* & \overset{\circ}{\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{L_2} & w \\ w^* & 1_{L_1} \end{bmatrix}^{[-1]} F^\omega x dm, \quad (2.25)$$

где G^α — представление Фурье, связанное с простой частью узла α ; φ , ψ определяются по ω формулами (1.22) и (1.22'), $\overset{\circ}{\varphi}$, $\overset{\circ}{\psi}$ — формулами (1.26), скалярное произведение в $H^{d\sigma}$ задается интегралом Хеллингера.

Из формул (2.9) следует, что

$$G^\alpha DTx = tG^\alpha Dx - \begin{bmatrix} 1_{N_1^\alpha} S \\ S^* & 1_{N_1^\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{Mx}{\bar{0}} \\ Ex \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Откуда, в частности, вытекает, что $ITx = tIx$.

* Доказательство этого факта, основанное на рассмотрении интерполяционной задачи с ядром $K(\zeta, \mu)$, автору сообщил П. М. Юдицкий.

Свойство (2.26) позволяет преобразовать выражение для $I^\omega x$ в некоторых важных частных случаях: пусть ξ ($|\xi| < 1$) таково, что существует $(\xi - T)^{-1}$ и $(1_X - \bar{\xi}T)^{-1}$, тогда

$$(I^\omega x)(\xi) = \begin{bmatrix} \psi^* & \omega\varphi \\ \omega^*\psi^* & \varphi \end{bmatrix}(\xi) \cdot \begin{bmatrix} -\bar{\xi}M(1_X - \bar{\xi}T)^{-1}x \\ E(\xi - T)^{-1}x \end{bmatrix} - \\ - \int_T \frac{1 - |\xi|^2}{|t - \xi|^2} \begin{bmatrix} \psi^* & \omega\varphi \\ \omega^*\psi^* & \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1_{L_2} & \omega \\ \omega^* & 1_{L_1} \end{bmatrix}^{[-1]} F^\omega x \, dm.$$

Как было показано в § 1.9, $I^\omega x \equiv 0$ ($\forall x \in X$) тогда и только тогда, когда $d\sigma = 0$ (т. е. $a^\omega(\xi) \equiv 0$).

Последнее же слагаемое в (2.24), отвечающее изолированной части узла α , входит неустранимым образом и не зависит от выбора параметра ω .

Поступила в редколлегию 15.04.86

УДК 519.2

Г. П. ЧИСТЯКОВ.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ТЕОРЕМЫ И. В. ОСТРОВСКОГО — Р. КУППЕНСА НА ГРУППАХ

И. В. Островский, Р. Куппенс [1, с. 258] доказали теорему: если n — мерное безгранично делимое (б. д.) распределение P не имеет гауссовой компоненты, а его спектральная мера F Леви вполне конечна и сосредоточена на множестве с независимыми точками, то $P \in I_0$. При различных дополнительных ограничениях на меру F этот факт доказывался Д. А. Райковым, И. В. Островским, Р. Куппенсом, Г. П. Чистяковым. Хотя в работе автора [2] указанная выше теорема была доказана при ограничении $F(R^n) < \ln 2$, но метод исследования, развивший некоторые идеи Рамачандрана, оказался очень общим и позволил Г. М. Фельдману [3] перенести теорему И. В. Островского — Р. Куппенса на локально компактные сепарабельные абелевы метрические группы X в такой формулировке.

Пусть F — вполне конечная мера на группе X такая, что ее степени относительно свертки попарно сингулярны $F^{n*} \perp F^{m*}$ при любых натуральных $n \neq m$. Тогда обобщенное распределение Пуассона $e(F) = \exp\{-F(X)\} \left(E_0 + F + \frac{1}{2!} F^{2*} + \dots\right)$, где E_0 — распределение, сосредоточенное в точке 0, принадлежит классу I_0 .

В настоящей заметке будут даны оценки устойчивости для этой теоремы, для чего потребовалось усовершенствовать и упростить метод исследования из работы автора [2]. Опишем эффект устойчивости разложений распределения μ на группе X в терминах характеристики В. М. Золотарева $\beta_{d_1, d_2}(\epsilon, \mu)$, $\epsilon > 0$, [4]. Пусть d_1, d_2 — метрики в пространстве распределений μ на группе X , K_μ — множество компонент рас-

пределения μ , $B(\varepsilon, \mu) = \{\nu - \text{распределения: } d_1(\nu, \mu) \leq \varepsilon\}$. Обозначим через

$$\beta_{d_1, d_2}(\varepsilon, \mu) = \sup_{\nu \in B(\varepsilon, \mu)} \sup_{\nu_0 \in K_\nu} \inf_{\mu_0 \in K_\mu} d_2(\mu_0, \nu_0).$$

Будем говорить, что для распределения μ имеет место эффект устойчивости разложений в метриках (d_1, d_2) , если $\beta_{d_1, d_2}(\varepsilon, \mu) \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$. А. П. Ушаковой [5] изучался эффект устойчивости разложений распределений на сепарабельных полных метрических группах без оценок устойчивости.

В качестве метрики d_1 возьмем $\sigma(\mu, \nu) = \sup \{|\mu(A) - \nu(A)| : A \in \mathcal{B}\}$, где \mathcal{B} — множество борелевских множеств на группе X , а в качестве d_2 метрику $\gamma_0(\mu, \nu) = \sup \{|\hat{\mu}(y) - \hat{\nu}(y)| : y \in X^*\}$, где $\hat{\mu}, \hat{\nu}$ — характеристические функции (х. ф.) соответственно распределений μ, ν ; X^* — группа характеров группы X . Наш результат выглядит следующим образом.

Теорема. Пусть F — вполне конечная мера на группе X такая, что $F^{n*} \perp F^{m*}$ при любых натуральных $n \neq m$. Пусть для распределений μ_j , $j = 1, 2$, выполняется неравенство $\sigma(\mu_1 * \mu_2, e(F)) \leq \varepsilon$, $0 < \varepsilon < e^{-2}$ (1). Тогда найдутся элементы $x_1, x_2 \in X$, $x_1 + x_2 = 0$, зависящие лишь от распределений μ_j , что $\mu_j(\{x_j\}) > c_0$, $j = 1, 2$, и справедливы соотношения $\gamma_0(\mu_j, E_{x_j} * e(F_j)) \leq c_1 (\ln \ln(1/\varepsilon) / \ln(1/\varepsilon))$, $j = 1, 2$, где E_{x_j} — распределение, сосредоточенное в точке x_j , F_j — сужение меры $(\mu_j(\{x_j\}))^{-1} (E_{-x_j} * \mu_j)$ на множество $S(F)$, где сосредоточена мера F , $c_0 > 0$, $c_1 > 0$ — постоянные зависящие лишь от распределения $e(F)$.

Эта теорема содержит, как легко видеть, приведенный выше результат Г. М. Фельдмана.

Из этой теоремы также следует такая оценка величины $\beta_{\sigma, \gamma_0}(\varepsilon, e(F))$, где вполне конечная мера F удовлетворяет условиям теоремы, $\beta_{\sigma, \gamma_0}(\varepsilon, e(F)) \leq c_2 (\ln \ln(1/\varepsilon) / \ln(1/\varepsilon))$ (2), $c_2 > 0$ — постоянная, зависящая лишь от распределения $e(F)$. Отметим сразу неулучшаемость оценки (2) в следующем смысле. Пусть $X = \mathbb{R}^1$, F — мера, сосредоточенная в точке $x = 1$. В работе автора [6] были построены последовательности распределений на $\mathbb{R}^1 \{\mu_{jn}\}_{n=1}^\infty$, $j = 1, 2$, такие, что выполняются неравенства $\sigma(\mu_{1n} * \mu_{2n}, e(F)) \leq \exp\{-c_3 n \ln n\}$ (3), где постоянная $c_3 > 0$ зависит лишь от F и не зависит от n . При этом х. ф. распределений μ_{1n} имеют вид

$$\hat{\mu}_{1n}(t) = \exp\left\{\frac{1}{2} \lambda (e^{it} - 1) + \frac{\delta(\lambda)}{n} (e^{2it} - 1)\right\}, \quad t \in \mathbb{R}^1,$$

$\lambda = F(X)$, $\delta(\lambda) > 0$ — достаточно малая постоянная, зависящая лишь от λ . Множество компонент μ_0 распределения $e(F)$ в силу теоремы Д. А. Райкова [1, с. 175] состоит из распределений с х. ф. вида $\hat{\mu}_0(t) = \exp\{\lambda_0 (e^{it} - 1) + i\beta_0 t\}$, $\beta_0 \in \mathbb{R}^1$, $0 \leq \lambda_0 \leq \lambda$. Для х. ф. $\hat{\mu}_{1n}(t)$ и $\hat{\mu}_0(t)$ справедливы очевидные неравенства:

$$\inf_{\mu_0 \in K_{e(F)}} \sup_{t \in \mathbb{R}^1} |\hat{\mu}_{1n}(t) - \hat{\mu}_0(t)| \geq \frac{c_4}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (4)$$

где $c_4 > 0$ — постоянная, зависящая лишь от меры F . Сравнение оценок (3), (4) приводит для одномерного распределения Пуассона $e(F)$ к оценке снизу $\beta_{\sigma, \chi_0}(e, e(F)) \geq c_5 (\ln \ln(1/\varepsilon) / \ln(1/\varepsilon))$, $c_5 > 0$ — постоянная, зависящая лишь от меры F .

Доказательство теоремы. Доказательство будем вести, считая $\varepsilon > 0$ достаточно малым: $\varepsilon \leq \varepsilon(F)$, что, конечно, не уменьшает общности наших выводов. В дальнейшем положительные постоянные, зависящие лишь от распределения $e(F)$, будем обозначать независимо от их величины одной буквой c . Из оценки (1), очевидно, следует неравенство $(\mu_1 * \mu_2)(\{0\}) \geq \frac{1}{2} \exp\{-F(X)\} = \tilde{c}_0$. Поскольку точек $x \in X$, для которых $\max(\mu_1(\{x\}), \mu_2(\{-x\})) \geq \frac{1}{4} \tilde{c}_0$, конечное число, зависящее от меры F , то отсюда легко следует, что найдется элемент $x_0 \in X$ такой, что $\mu_1(\{x_0\}) \geq c$, $\mu_2(\{-x_0\}) \geq c$. Не уменьшая общности, считаем $x_0 = 0$, так как в противном случае перейдем к сдвигам $E_{-x_0} * \mu_1$, $E_{x_0} * \mu_2$. Поэтому с помощью оценки (1) приходим к соотношению $c\mu_j(A) \leq e(F)(A) + \varepsilon$, $\forall A \in \mathcal{B}$, $j = 1, 2$ (5). Рассмотрим сужения распределений μ_j на множества $S(F^{n*})$, где сосредоточены меры F^{n*} , $n \in \mathbb{N}$. Обозначим эти сужения ν_{jn} . Меры ν_{jn} , $j = 1, 2$, в силу неравенства (5) и попарной сингулярности мер F^{n*} при различных n обладают свойством

$$c\nu_{jn}(X) \leq e^{-F(X)} (F(X))^n / n! + \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

Рассмотрим меры

$$\mu_j^* = \sum_{n=0}^T \nu_{jn}, \quad j = 1, 2, \quad \nu_{j0} = \mu_j(\{0\}) E_0, \quad T = \left\lceil \frac{1}{2} \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln \ln(1/\varepsilon)} \right\rceil.$$

Пусть множество $A_T = \bigcup_{n=0}^T S(F^{n*})$. Из соотношения (5) имеем

$$\begin{aligned} \sigma(\mu_j, \mu_j^*) &\leq \mu_j(\bar{A}_T) \leq c(e(F)(\bar{A}_T) + \varepsilon) \leq \\ &\leq c \left(\sum_{n=T+1}^{\infty} e^{-F(X)} \frac{(F(X))^n}{n!} + \varepsilon \right) \leq \varepsilon^{1/4}, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (7)$$

Теперь рассмотрим функции

$$\varphi_j(z, y) = \sum_{n=0}^T z^n \tilde{\nu}_{jn}(y), \quad z \in \mathbb{C}, \quad y \in X^*, \quad j = 1, 2. \quad (8)$$

Эти функции для $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq T/2$ и $y \in X^*$ в силу неравенств (6) допускают оценку $|\varphi_j(z, y)| \leq \exp(c|z|)$, $j = 1, 2$ (9). Запишем

$$\rho_1(z, y) \varphi_2(z, y) = \sum_{n=0}^{2T} z^n b_n(y), \quad z \in \mathbb{C}, \quad y \in X^*.$$

Для величин $b_n(y)$, $n = 0, 1, \dots, 2T$, справедливы оценки

$$\left| b_n(y) - e^{-F(X)} \frac{(F(y))^n}{n!} \right| \leq \left| \sum_{m=0}^n \tilde{v}_{1m}(y) \tilde{v}_{2, n-m}(y) - e^{-F(X)} \frac{(F(y))^n}{n!} \right| + \sum_{\substack{m=0 \\ \{m>T\} \cup \{m<n-T\}}}^n |\tilde{v}_{1m}(y)| |\tilde{v}_{2, n-m}(y)|.$$

Отсюда с помощью неравенств (1), (5), (6) и учетом попарной сингулярности мер F^{n*} при различных натуральных n следуют соотношения

$$q_n(y) = \left| b_n(y) - e^{-F(X)} \frac{(F(y))^n}{n!} \right| \leq c\varepsilon + c \sum_{\substack{m=0 \\ \{m>T\} \cup \{m<n-T\}}}^n \left(\varepsilon + \frac{(F(X))^m}{m!} \right) \times \\ \times \left(\varepsilon + \frac{(F(X))^{n-m}}{(n-m)!} \right) \leq c(F(X) + 1)^n \left(T\varepsilon + \frac{\gamma(n)}{n!} \right),$$

где $\gamma(n) = 0$, если $n \leq T$ и $\gamma(n) = 2^n$, если $T < n \leq 2T$. Из этих соотношений для $|z| \leq \alpha T$, $\alpha = (e^b(F(X) + 1))^{-1}$, $y \in X^*$, получаем неравенство

$$\sum_{n=0}^{2T} (\alpha T)^n q_n(y) \leq cT(\alpha(F(X) + 1)T)^{2T}\varepsilon + \sum_{n=T}^{2T} \frac{(2\alpha T(F(X) + 1))^n}{n!} \leq e^{-3T}. \quad (10)$$

Нам понадобится также следующее неравенство:

$$\sum_{n=2T+1}^{\infty} (\alpha T)^n \frac{(F(X))^n}{n!} \leq e^{-3T}. \quad (11)$$

Из неравенств (10), (11) для $z \in C$, $|z| \leq \alpha T$, и $y \in X^*$ получаем оценку

$$|\varphi_1(z, y) \varphi_2(z, y) - e^{zF(y) - \hat{F}(0)}| \leq \sum_{n=0}^{2T} |z|^n q_n(y) + \\ + \sum_{n=2T+1}^{\infty} e^{-F(X)} \frac{(F(X))^n}{n!} |z|^n \leq 2e^{-3T}.$$

Поскольку для указанных z, y имеет место очевидная оценка снизу

$$|e^{zF(y) - \hat{F}(0)}| \geq e^{-2F(0)\alpha T} \geq e^{-T},$$

то, сравнивая две последние оценки, приходим к выводу, что для рассматриваемых z, y выполняется

$$|\varphi_1(z, y) \varphi_2(z, y) - e^{zF(y) - \hat{F}(0)}| \leq \frac{1}{2} |e^{z\hat{F}(y) - \hat{F}(0)}|.$$

Отсюда приходим к нужному соотношению для $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq \alpha T$, $y \in X^*$,

$$\frac{1}{2} |e^{z\hat{F}(y) - \hat{F}(0)}| \leq |\varphi_1(z, y) \varphi_2(z, y)| \leq \frac{3}{2} |e^{z\hat{F}(y) - \hat{F}(0)}|. \quad (12)$$

Зафиксируем теперь характер y и рассмотрим функции $\varphi_j(z, y)$, $j = 1, 2$, как функции переменной z . Это аналитические функции во всей открытой z -комплексной плоскости и в силу соотношения (12) в круге $|z| \leq \alpha T$ не обращаются в нуль. Поэтому для $|z| < \alpha T$ $\varphi_j(z, y)$ допускают представление $\varphi_j(z, y) = \exp\{f_j(z, y)\}$, $f_j(0, y) < 0$, $j = 1, 2$, где $f_j(z, y)$ — аналитическая в круге $|z| < \alpha T$ функция. Разложим ее в этом круге в ряд Тейлора:

$$f_j(z, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{jn}(y) z^n, \quad j = 1, 2.$$

В силу оценки (9) для функций $f_j(z, y)$, $j = 1, 2$, выполняется неравенство $\operatorname{Re} f_j(z, y) \leq c(|z| + 1)$, $|z| < \alpha T$, $y \in X^*$. Воспользуемся хорошо известной леммой [1, с. 340].

Лемма. Если для аналитической в круге $|z| \leq R$ функции

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

справедливо неравенство $\operatorname{Re} f(z) \leq A$, то $|b_n| \leq 2A/R^n$, $n = 1, 2, \dots$. Из этой леммы ($f(z) = f_j(z, y) - a_{j0}(y)$, $R = \alpha T/2$, $A = cT$) получаем $|a_{jn}(y)| \leq (c/T)^{n-1}$, $n = 2, 3, \dots$, $y \in X^*$. Эти оценки приводят нас к следующему представлению для функций $\varphi_j(z, y)$ при $|z| \leq cT$ и $y \in X^*$: $\varphi_j(z, y) = \exp\{a_{j0}(y) + a_{j1}(y)z\} (1 + H_j(z, y))$, $j = 1, 2$ (13), где $H_j(z, y)$, $H_j^{(p)}(0, y) = 0$, $p = 0, 1$ — аналитические по z в круге $|z| \leq cT$ при каждом фиксированном $y \in X^*$ функции, допускающие оценку: $|H_j(1, y)| \leq c/T$ для всех $y \in X^*$. Сравнивая соотношения (8) и (13) как функции переменной z , заключаем, что для $y \in X^*$

$$e^{a_{j0}(y)} = \mu_j(\{0\}), \quad e^{a_{j0}(y)} a_{j1}(y) = \hat{v}_{j1}(y). \quad (14)$$

В силу оценки (7) имеем $|\varphi_j(1, 0) - 1| \leq c e^{1/4}$, поэтому из соотношений (13) при $z = 1$, $y = 0$ и (14) получаем $|\hat{v}_{j1}(0) + \mu_j(\{0\}) \ln \mu_j(\{0\})| \leq c/T$ (15). Тогда с помощью соотношений (7), (13) — (15) приходим к неравенству

$$|\hat{\mu}_j(y) - e^{\hat{v}_{j1}(y) - \hat{v}_{j1}(0)}/\mu_j(\{0\})| \leq \frac{c}{T}, \quad y \in X^*, \quad j = 1, 2,$$

доказывающему нашу теорему.

Доказательство оценки (2). Оценка (2) следует из доказанной теоремы, если будет показано, что $F_j(A) \leq F(A) + c\varepsilon$, $\forall A \in B$, $j = 1, 2$. Как видно из доказательства теоремы, не уменьшая общности, считаем, что $\mu_j(\{0\}) > c$, $j = 1, 2$. В силу определения мер ν_{jn} , $j = 1, 2$, попарной сингулярности мер F^n при различных n и соотношений (5), (1) легко получаем неравенства

$$\begin{aligned} \mu_2(\{0\}) \nu_{11}(A) + \mu_1(\{0\}) \nu_{21}(A) &\leq e^{-F(X)} F(A) + c\varepsilon, \quad \forall A \in B, \\ |\mu_1(\{0\}) \mu_2(\{0\}) - e^{-F(X)}| &\leq c\varepsilon. \end{aligned}$$

Из последних двух неравенств следует нужное соотношение для мер F_j , $j = 1, 2$, доказывающее оценку (2).

Замечание. Чтобы подчеркнуть простоту предложенного метода исследования, приведем доказательство результата Г. М. Фельдмана, сформулированного в начале заметки. При этом сохраняем все обозначения и определения. Пусть выполнено неравенство (1) при $\varepsilon = 0$. Тогда соотношения (5), (6) имеют место при $\varepsilon = 0$. Образует для всех $z \in C$ и $y \in X^*$ функции $\varphi_j(z, y)$ по формуле (8), где суммирование будем вести по всем $n \in N \cup \{0\}$. Для этих функций неравенство (9) выполняется для всех $z \in C$, $y \in X^*$. Кроме того, легко проверяется соотношение $\varphi_1(z, y) \varphi_2(z, y) = \exp\{z\hat{F}(y) - \hat{F}(0)\}$, из которого следует, что функции $\varphi_j(z, y)$, $j = 1, 2$, как функции переменной z не обращаются в нуль для всех $z \in C$ при фиксированном $y \in X^*$. Поскольку $\varphi_j(z, y)$, $j = 1, 2$ — целые функции по переменной z и допускают оценку (9) для всех $z \in C$, то в силу известной теоремы Адамара [7, с. 38] они имеют вид $\varphi_j(z, y) = \exp\{a_{j0}(y) + a_{j1}(y)z\}$. Сравнивая разложения в ряд по z функции $\varphi_j(z, y)$, получающимся из этого представления с разложением в ряд (8), приходим к доказательству нужного утверждения.

Список литературы: 1. Линник Ю. В., Островский И. В. Разложения случайных величин и векторов. — М.: Наука, 1972. — 480 с. 2. Чистяков Г. П. О принадлежности классу I_0 законов с неаналитическими характеристическими функциями // ДАН СССР. — 1971. — 201, № 2. — С. 280—283. 3. Фельдман Г. М. Обобщенное распределение Пуассона класса I_0 на группах // Теория вероятностей и ее применение. — 1984. — XXXI, № 2. — С. 222—233. 4. Золотарев В. М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. — М.: Наука, 1986. — 415 с. 5. Ушакова А. П. Об устойчивости разложений вероятностных законов // Теория вероятностей и ее применение. — 1983. — XXVIII, № 3. — С. 572—574. 6. Чистяков Г. П. О точности оценок в теоремах об устойчивости разложений нормального распределения и распределения Пуассона // Теория функций, функцией, анализ и их прил. — 1976. — Вып. 26. — С. 119—128. 7. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. — М.: ГИТТЛ, 1956. — 632 с.

Поступила в редколлегию 01.04.86

УДК 517.9

И. Д. ЧУЕШОВ

СВОЙСТВА АТТРАКТОРА В ЗАДАЧЕ О НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ БЕСКОНЕЧНОЙ ПАНЕЛИ

1. Рассмотрим систему уравнений

$$\ddot{u} + \gamma \dot{u} + u'''' + \left(\Gamma - \int_0^\pi |u'(x, t)|^2 dx \right) u'' = p(x) - \rho u', \quad (1)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, \quad u''|_{x=0} = u''|_{x=\pi} = 0, \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \dot{u}|_{t=0} = u_1(x). \quad (3)$$

Здесь $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u' = \frac{\partial u}{\partial x}$; $\gamma > 0$, $\rho \geq 0$, Γ — константы. Предполагается, что $p \in H_0^1(0, \pi)$, $u_0 \in (H_0^1 \cap H^2)(0, \pi)$, $u_1 \in L^2(0, \pi)$, где $H^1(0, \pi)$ —

соболевское пространство порядка l . Задача (1)–(3) описывает нелинейные колебания бесконечной панели ширины π в сверхзвуковом потоке газа. Величина ρ определяется скоростью потока. Параметр Γ пропорционален величине сжимающего усилия.

Как и в [1], для задачи (1)–(3) можно доказать теорему существования и единственности, позволяющую в пространстве $H = (H_0^1 \cap H^2)(0, \pi) \times L^2(0, \pi)$ построить сильно непрерывную нелинейную полугруппу S_t , действующую по формуле $S_t y_0 = (u(t); \dot{u}(t))$, где $u(t)$ — решение задачи (1)–(3) с начальными условиями $y_0 = (u_0; u_1)$. Стандартными методами устанавливается справедливость энергетического равенства:

$$E(y(t_2)) - E(y(t_1)) = - \int_{t_1}^{t_2} (\gamma \|\dot{u}(\tau)\|^2 + \rho(\dot{u}(\tau), u'(\tau))) d\tau, \quad (4)$$

где $y(t) = S_t y_0 = (u(t); \dot{u}(t))$ и для $y = (u_0; u_1)$;

$$E(y) = \frac{1}{2} \left(\|u_1\|^2 + \|\dot{u}_0''\|^2 + \frac{1}{2} \|u_0'\|^4 - \Gamma \|\dot{u}_0'\|^2 \right) - (\rho, u_0), \quad (5)$$

$\|\cdot\|, (\cdot, \cdot)$ — норма и скалярное произведение в $L^2(0, \pi)$.

Норму в пространстве H определим формулой $\|y\|_H^2 = \|\dot{u}_0''\|^2 + \|u_1\|^2$, $y = (u_0; u_1)$. Если $e_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx$, то пространство H можно представить в виде $H = F_1 \times F_0$, где

$$F_\sigma = \left\{ v = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \mid \|v\|_\sigma^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{4\sigma} |c_k|^2 < \infty \right\}.$$

Ниже используются также пространства $H_\sigma = F_{1+\sigma} \times F_\sigma$, $\sigma \geq 0$. Ясно, что $H_0 = H$ и H_{σ_1} компактно вложено в H_{σ_2} , если $\sigma_1 > \sigma_2$.

Основным результатом данной работы является следующее утверждение, анонсированное в докладе [2].

Теорема 1. Для каждого $\rho \geq 0$ полугруппа S_t обладает компактным максимальным H -аттрактором, т. е. существует компактное в H множество A такое, что $S_t A = A$ и для любого ограниченного B из H при $t \rightarrow \infty$ $\rho(S_t B, A) \equiv \sup \{\text{dist}(S_t y, A) \mid y \in B\} \rightarrow 0$. Аттрактор A имеет конечную фрактальную размерность.

Напомним, что фрактальная размерность $\dim_f(A)$ множества A определяется формулой

$$\dim_f(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln n_A(\varepsilon)}{\ln 1/\varepsilon},$$

где $n_A(\varepsilon)$ — минимальное число шаров радиуса не больше ε , необходимое для покрытия множества A . Легко показать, что фрактальная размерность не меньше хаусдорфовой (определение см., например, в [3]).

Доказательство теоремы использует идеи и методы, развитые в [3–5], а также некоторые соображения А. Аро (см. ссылку, приве-

денную в [5]). Излагаемая ниже схема рассуждений носит достаточно общий характер. Она применима, например, при изучении флаттера упругой полой оболочки конечных размеров (см. доклад [6]).

2. Существование аттрактора вытекает из приведенных ниже лемм 1 и 2.

Лемма 1. Система (1)–(3) является диссипативной, т. е. существует $R > 0$ такое, что для любого ограниченного множества B из H $|S_t y|_H \leq R$ для всех $y \in B$ и $t \geq t_0 = t_0(B)$. В качестве радиуса диссипативности R при $\Gamma \geq 0$ можно взять величину $R = c \left[1 + \left(\Gamma + \frac{\rho^2}{\gamma^2} + \gamma^2 \right)^2 + \|p\|^2 \right]^{1/2}$ (6), если же $\Gamma < 0$, то в (6) следует положить $\Gamma = 0$. Здесь и ниже c — некоторая абсолютная константа.

Доказательство. Пусть $\Gamma \geq 0$ (случай $\Gamma < 0$ аналогичен). Положим $\Phi(y) = (u_0, u_1) + \frac{\gamma}{2} \|u_0\|^2$, $V(y) = E(y) + \frac{\gamma}{8} \Phi(y)$. Достаточно показать, что на решениях системы (1)–(3) функционал $V(y)$ обладает свойствами

$$V(y) \geq \frac{1}{4} |y|_H^2 - \frac{1}{4} (\Gamma^2 + 4 \|p\|^2), \quad (7)$$

$$\frac{dV}{dt} + \frac{\gamma}{16} V \leq \gamma c \left[\left(\Gamma + \frac{\rho^2}{\gamma^2} + \gamma^2 \right)^2 + \|p\|^2 \right]. \quad (8)$$

Чтобы установить (7), (8), следует воспользоваться неравенством $|(u, u)| \leq \frac{1}{2\gamma} \|u\|^2 + \frac{\gamma}{2} \|u\|^2$, соотношениями (1), (4) и тем обстоятельством, что $(u, u') = 0$.

Лемма 2. Полу группа S_t является асимптотически гладкой в следующем смысле: существует ограниченное в H_σ , $0 < \sigma < 1/2$, множество K_σ такое, что $\rho(S_t B, K_\sigma) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для любого ограниченного множества B из H .

Доказательство. Пусть $\varphi(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция, такая, что $-\Gamma \leq \varphi(t) \leq R^2 - \Gamma$, $|\dot{\varphi}(t)| \leq 2R^2$. Рассмотрим задачу $\ddot{u} + \gamma \dot{u} + u'''' - \varphi(t) u'' = h(x, t)$ (9) с граничными и начальными условиями (2), (3). Предполагается, что $h(x, t) \in L^\infty(0, \infty; L^2(0, \pi))$. Легко проверить, что задача (9), (2), (3) однозначно разрешима и определяет в пространстве H сильно непрерывное эволюционное семейство $U(t, t_0)$ формулой $U(t, t_0) y_0 = (u(t); \dot{u}(t))$, где $u(t)$ — решение однородной ($h \equiv 0$) задачи (9), (2) с начальными условиями $u|_{t=t_0} = u_0$, $\dot{u}|_{t=t_0} = u_1$, $y_0 = (u_0; u_1)$. Решение неоднородной задачи при этом запишется в виде

$$y(t, t_0) = U(t, t_0) y_0 + \int_{t_0}^t U(t, \tau) (0; h(\tau)) d\tau.$$

При $h \equiv 0$ решение задачи (9), (2), (3) имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) e_k(x),$$

где g_k определяются из соотношений

$$\ddot{g}_k + \gamma \dot{g}_k + (k^4 + \varphi(t) k^2) g_k = 0, \quad (10)$$

$$g_k|_{t=0} = g_{k0} = (u_0, e_k), \quad \dot{g}_k|_{t=0} = g_{k1} = (u_1, e_k).$$

На решениях задачи (10) рассмотрим функционал

$$V_k = \frac{1}{2} \left[\dot{g}_k^2 + (k^4 + \varphi(t) k^2) g_k^2 + \gamma (g_k \dot{g}_k + \frac{\gamma}{2} g_k^2) \right].$$

Непосредственные вычисления показывают, что для всех k , удовлетворяющих неравенствам

$$k^2 \geq 4 \left(\Gamma + \frac{2R^2}{\gamma} \right), \quad \frac{1}{2} k^4 - (R^2 - \Gamma) k^2 - \gamma^2 \geq 0, \quad (11)$$

выполнены соотношения

$$\frac{1}{4} (\dot{g}_k^2 + k^4 g_k^2) \leq V_k \leq \frac{3}{4} (\dot{g}_k^2 + k^4 g_k^2), \quad \frac{dV_k}{dt} + \frac{\gamma}{2} V_k \leq 0.$$

Отсюда извлекается оценка

$$|P_N U(t, t_0)|_{L(H_\sigma, H_\sigma)} \leq c \exp \left[-\frac{\gamma}{4} (t - t_0) \right], \quad N \geq N_0, \quad \sigma \geq 0, \quad (12)$$

где P_N — ортопроектор в H на з. л. о. $\{(e_k; 0), (0; e_k); k \geq N\}$, N_0 — наименьшее натуральное число такое, что (11) справедливо для всех $k \geq N_0$. Очевидно, что N_0 допускает оценку $N_0^2 \leq c(R^2(1 + \gamma^{-1}) + |\Gamma|)$.

Пусть решение $S_t y_0 = (u(t); \dot{u}(t))$ задачи (1)–(3) при $t \geq t_0$ лежит в поглощающем шаре B_R , тогда, полагая $\varphi(t) = -\Gamma + \|u'\|^2$, $h = -ru' + p$, получаем представление

$$S_t y_0 = U(t, t_0) y(t_0) + G(t; t_0, y_0), \quad G = - \int_{t_0}^t U(t, \tau) (0; ru' - p) d\tau. \quad (13)$$

Отсюда можно извлечь утверждение леммы 2. Действительно, при $t \geq t_0$, $\sigma \geq 0$

$$|(1 - P_{N_0}) S_t y_0|_{H_\sigma} \leq N_0^{2\sigma} |S_t y_0|_H \leq R N_0^{2\sigma}. \quad (14)$$

С другой стороны, в силу (12) $P_{N_0} U(t, t_0) y(t_0) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. А для $G(t; t_0, y_0)$ справедлива оценка

$$|P_{N_0} G(t; t_0, y_0)|_{H_\sigma} \leq c \int_{t_0}^t \exp \left(-\frac{\gamma}{4} (t - \tau) \right) \|u'(\tau)\|_\sigma d\tau + c\gamma^{-1}.$$

Но F_σ — интерполяционное пространство между $(H_0^1 \cap H^2)(0, \pi)$ и $L^2(0, \pi)$. Поэтому при $\frac{1}{4} < \sigma < \frac{1}{2}$ $F_\sigma = H^{2\sigma}(0, \pi)$. Следовательно, $\|u'\|_\sigma \leq c \|u''\| \leq cR$. Значит,

$$|P_{N_0} G(t; t_0, y_0)|_{H_\sigma} \leq cR\gamma^{-1}, \quad \sigma < \frac{1}{2}. \quad (15)$$

Из (14), (15) получаем утверждение леммы 2 для

$$K_\sigma = \left\{ y \mid |y|_{H_\sigma} \leq Q_\sigma \equiv cR \left(N_0^{2\sigma} + \frac{\rho}{\gamma} \right), \sigma < \frac{1}{2} \right\}.$$

Леммы 1 и 2 с помощью методики А. Аро (аналогичные рассуждения используются и в [7]) позволяют установить существование аттрактора A , лежащего в K_σ при $\sigma < \frac{1}{2}$.

3. Для доказательства конечномерности аттрактора воспользуемся следующим вариантом теоремы О. А. Ладыженской [4].

Теорема 2. Пусть M — компактное множество в гильбертовом пространстве H , V — преобразование, определенное на M такое, что $M \subset V(M)$ и для любых $v_1, v_2 \in M$ $\|Vv_1 - Vv_2\| \leq l\|v_1 - v_2\|$, $\|Q_n(Vv_1 - Vv_2)\| \leq \delta\|v_1 - v_2\|$, $\delta < 1$, где Q_n — ортопроектор ко-размерности n . Тогда фрактальная размерность $\dim_f(M)$ конечна и допускает оценку

$$\dim_f(M) \leq n \ln \frac{8\kappa^2 l^2}{1 - \delta^2} / \ln \frac{2}{1 + \delta^2},$$

κ — некоторая абсолютная константа.

Отметим, что в [4] теорема 2 доказана для хаусдорфовой размерности. Однако практически дословное повторение рассуждений работы [4] позволяет установить теорему О. А. Ладыженской в приведенной здесь формулировке.

Лемма 3. Пусть $y_1, y_2 \in A$. Тогда

$$|S_t y_1 - S_t y_2|_H \leq \exp(Gt) |y_1 - y_2|_H, \quad (16)$$

$$|P_N(S_t y_1 - S_t y_2)|_H \leq c_1 e^{-\frac{\gamma}{4}t} \left(1 + \frac{L_\sigma}{N^{2\sigma}} e^{Gt} \right) |y_1 - y_2|, \quad (17)$$

при $N \geq N_0$, $\sigma < \frac{1}{2}$, $G = c_2(R^2 + \rho + |\Gamma|)$, $L_\sigma = c_3(R^{2\sigma}(1 + \gamma^{-1})^\sigma + \frac{\rho}{\gamma})$.

Доказательство. Если $u_1(t)$ и $u_2(t)$ — решения задачи (1)–(3) с начальными условиями y_1, y_2 , то функция $v(t) = u_1(t) - u_2(t)$ удовлетворяет уравнению $\ddot{v} + \gamma\dot{v} + v'''' = F(u_1, u_2, t)$ (18), где $F(u_1, u_2, t) = -\Gamma v'' + (\|u_1'\|^2 u_1'' - \|u_2'\|^2 u_2'') - \rho v'$. Очевидно, что $\|F\| \leq c(\rho + R^2 + |\Gamma|)\|v''\|$. Поэтому из (18) с помощью леммы Гронуолла получаем (16).

Установим (17). Ясно, что $P_N S_t y_i = (p_N u_i(t), p_N \dot{u}_i(t))$, где p_N — ортопроектор в $L^2(0, \pi)$ на з. л. о. $\{e_k, k \geq N\}$. Величина $w_N = p_N(u_1 - u_2)$ является решением уравнения $\ddot{w}_N + \gamma\dot{w}_N + w_N'''' + (\Gamma - \|u_1'\|^2)w_N'' = \Phi_N(u_1, u_2, t)$. Здесь $\Phi_N(u_1, u_2, t) = (\|u_1'\|^2 - \|u_2'\|^2) \times p_N u_2'' - \rho p_N(u_1' - u_2')$. Оценим величину $\Phi_N(u_1, u_2, t)$. Так как $|y|_{H_\sigma} \leq Q_\sigma$ для $y \in A$, то

$$\|p_N u_2''\| = \|p_N u_2\|_1 \leq \frac{1}{N^{2\sigma}} \|u_2\|_{1+\sigma} \leq \frac{Q_\sigma}{N^{2\sigma}}, \quad \sigma < \frac{1}{2}.$$

Очевидно, что

$$\|p_N(u'_1 - u'_2)\| \leq \frac{1}{N^{2\sigma}} \|u'_1 - u'_2\|_{\sigma} \leq \frac{c}{N^{2\sigma}} |S_t y_1 - S_t y_2|_H, \quad \sigma < \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\|\Phi_N(u_1, u_2, t)\| \leq \frac{c}{N^{2\sigma}} (\rho + RQ_{\sigma}) |S_t y_1 - S_t y_2|_H.$$

Пользуясь представлением решения неоднородной задачи (9), (2), (3) и оценкой (12) для $\varphi = -\Gamma + \|u'_1\|^2$, $h = \Phi_N$, получаем, что

$$\begin{aligned} |P_N(S_t y_1 - S_t y_2)|_H &\leq c e^{-\frac{\gamma}{4}t} \left\{ |y_1 - y_2|_H + \right. \\ &\left. + \frac{1}{N^{2\sigma}} (\rho + RQ_{\sigma}) \int_0^t e^{\frac{\gamma}{4}\tau} |S_{\tau} y_1 - S_{\tau} y_2|_H d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Подставляя сюда (16), получаем (17).

Выберем t_0 и $N \geq N_0$ так, чтобы $c_1 \exp\left(-\frac{\gamma}{4}t_0\right) = \frac{\delta}{2}$, $L_{\sigma} N^{-2\sigma} \exp(Gt_0) \leq 1$, $\delta < 1$. Лемма 3 позволяет воспользоваться теоремой 2 для $M = A$ и $V = S_{t_0}$. Поэтому фрактальная размерность $\dim_f(A)$ аттрактора конечна и может быть оценена через параметры задачи. В частности, при $\Gamma \geq 0$ $\dim_f(A) \leq c_1 \exp(c_2(\rho + R^2)\gamma^{-1})$.

Таким образом, теорема 1 доказана.

Отметим следующее свойство задачи (1)–(3).

Теорема 3. Пусть $y_1(t)$ и $y_2(t)$ — некоторые решения задачи (1)–(3) из A . Тогда найдется $N \geq N_0$ такое, что из условия $(1 - P_N) \times (y_1(t) - y_2(t)) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$ вытекает, что $|y_1(t) - y_2(t)|_H \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$. Наименьшее N , обладающее таким свойством, допускает оценку $N^{2\sigma} \leq c(\rho + RQ_{\sigma})\gamma^{-1}$.

Для доказательства следует воспользоваться тем, что коэффициент перед интегральным членом в (19) за счет выбора N может быть сделан сколь угодно малым и леммой Гронуолла.

4. Если $\rho = 0$, то из (4) вытекает, что $E(y(t_1)) \geq E(y(t_2))$, $t_1 < t_2$ (20), причем равенство возможно лишь в том случае, когда $y(t) = y_0$, где y_0 — стационарная точка полугруппы S_t . Как и в [3, 8] это обстоятельство позволяет показать, что в случае общего положения аттрактор A является регулярным (определение см. в [3, 8]). Для этого следует воспользоваться теоремой 6.1 [8]. Как и в примере, рассмотренном в [8], используя стандартные методы, удастся доказать выполнение всех условий этой теоремы. Аттрактор при этом имеет вид

$$A = \bigcup_{k=1}^L M(z_k),$$

где $\{z_k, k = 1, 2, \dots, L\}$ — множество стационарных точек полугруппы S_t , $M(z_k)$ — неустойчивое инвариантное многообразие, выходящее из точки z_k .

В случае, когда $p(x) \equiv 0$, стационарные точки могут быть вычислены явно. Оказывается, что $L = 1$, $A = \{0\}$ при $\Gamma < 1$ и $L = 2n + 1$, если $n^2 < \Gamma \leq (n + 1)^2$. В последнем случае неподвижные точки имеют вид $z_k = (\omega_k; 0)$, $k = 0, \pm 1, \dots, \pm n$, где

$$\omega_0(x) = 0, \quad \omega_{\pm k}(x) = \pm \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2}{\pi} (\Gamma - k^2)} \sin kx, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

При этом $E(z_0) = 0$, $E(z_{\pm k}) = -\frac{1}{4}(\Gamma - k^2)^2$, $\dim M(z_0) = n$, $\dim M(z_{\pm k}) = k - 1$, $k = 1, 2, \dots, n$ ($z_{\pm 1}$ — устойчивые стационарные точки). Таким образом, в данной ситуации $\dim A < 1/\bar{\Gamma}$. Это, в частности, показывает, что полученная выше оценка размерности аттрактора является довольно грубой.

Отметим, что регулярность аттрактора сохраняется и при малых $\rho > 0$, а приведенные выше рассмотрения применимы в случае шарнирно закрепленного трубопровода, по которому течет жидкость со скоростью v . В такой ситуации вместо уравнения (1) следует рассмотреть уравнение

$$\ddot{u} + \gamma \dot{u} + u'''' + \left(v^2 - \int_0^\pi |u'|^2 dx \right) u'' = p(x) - 2\beta v u'.$$

Слагаемое $2\beta v u'$ не дает вклада в энергетическое соотношение. Поэтому энергия системы и в данном случае обладает свойством (20). Как и выше, это обстоятельство позволяет доказать регулярность аттрактора.

5. Если в задаче (1)–(3) учесть эффекты вязкоупругости, то в левой части (1) следует добавить слагаемое

$$\alpha \dot{u} u'''' - \sigma \int_0^\pi u'(x, t) \dot{u}'(x, t) dx \cdot u''(x, t), \quad \alpha, \sigma > 0,$$

а вместо (2) рассмотреть граничные условия:

$$u|_{x=0; x=\pi} = 0, \quad \left(1 + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \right) u'' \Big|_{x=0; x=\pi} = 0.$$

Особенностью этой постановки по сравнению с (1)–(3) является наличие конечной точки сгущения у спектра линеаризованной задачи. Однако это обстоятельство не мешает построить соответствующую полугруппу S_t и доказать аналоги теорем 1 и 3 представленным выше методом.

Список литературы: 1. Морозов Н. Ф. Исследование колебаний призматического стержня под действием поперечной нагрузки // Изв. вузов. Математика. — 1965. — № 3. — С. 121–125. 2. Чуешов И. Д. Аттракторы в некоторых задачах нелинейной механики: Тез. докл. Первой Северо-Кавказской региональной конф.: Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения. — Махачкала, 1986. — С. 222–223. 3. Бабин А. В., Вишик М. И. Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерности // Успехи мат. наук. — 1983. — 38, № 4. — С. 133–187. 4. Ладыженская О. А. О конечномерности ограниченных инвариантных множеств для системы Навье-Стокса и других диссипативных систем // Зап. науч. сем. ЛОМИ, 1982, 115. — С. 137–155. 5. Бабин А. В., Ви-

ишник М. И. Максимальные аттракторы полугрупп, соответствующих эволюционным дифференциальным уравнениям//Мат. сб. — 1985. — 126, № 3. — С. 397—419. 6. Чуешов И. Д. О флаттере упругой полой оболочки: Тез. докл. Всесоюз. конф.: Метод функций А. М. Ляпунова в современной математике. — Х., 1986. — С. 142. 7. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984. — 424 с. 8. Babin A. V., Vishik M. I. Regular attractors of semigroups and evolution equations//J. Math. pures et appl. — 1983. — 62. — P. 441—491.

Поступила в редколлегию 11.07.86

УДК 517.5

Ю. И. ЛЮБАРСКИЙ

АНАЛОГИ ПРОСТРАНСТВ В. И. СМИРНОВА ДЛЯ НЕЦЕЛЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

§ 1. Введение. а. Пусть S — функция типа синуса (ф. т. с.) (определение этого класса, введенного Б. Я. Левиным в [1], приведено ниже), $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — множество ее корней, занумерованных в порядке неубывания их вещественных частей. В настоящей работе излучаются свойства систем $\mathcal{E}(\Lambda) = \{\exp(i\lambda_n t)\}_{n=1}^{\infty}$, $\mathcal{E}^+(\Lambda) = \{\exp(i\lambda_n t)\}_{n>0}$, $\mathcal{E}^-(\Lambda) = \{\exp(i\lambda_n t)\}_{n<0}$ в пространствах $L^2(\Gamma)$, где Γ — кусочно-гладкая кривая, соединяющая точки $-\pi$ и $+\pi$. Если дополнительно $\xi + 2\pi \notin \Gamma$, $\forall \xi \in \Gamma \setminus \{-\pi\}$, то при замене переменных $t \mapsto z = \exp(it)$ кривая Γ переходит в простую замкнутую кривую $\exp(i\Gamma)$, охватывающую ноль, а системы $\mathcal{E}(\Lambda)$, $\mathcal{E}^+(\Lambda)$, $\mathcal{E}^-(\Lambda)$ — в системы степеней $\{z^{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{z^{\lambda_n}\}_{n>0}$, $\{z^{\lambda_n}\}_{n<0}$. В случае $\Lambda = \mathbb{Z}$ замыкание линейных оболочек систем $\{z^n\}_{n>0}$, $\{z^n\}_{n<0}$ по норме пространства $L^2(\exp(i\Gamma))$ совпадает с классическими пространствами В. И. Смирнова (определение см., например, в [2]) соответственно во внутренней и внешней, области, ограниченной кривой $\exp(i\Gamma)$. Цель данной работы — установить, при каких условиях свойства классических пространств В. И. Смирнова можно перенести на замыкания линейных оболочек систем $\mathcal{E}^{\pm}(\Lambda)$ в $L^2(\Gamma)$ и, хотя бы частично, провести это перенесение.

б. Перечислим обозначения, принятые на протяжении всей работы. Через Δ обозначается отрезок $[-\pi, \pi]$; $\mathbb{C}^{\pm} = \{z \in \mathbb{C} : \pm \operatorname{Im} z > 0\}$; черта обозначает комплексное сопряжение. При $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ положим $D(a, r) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - a| < r\}$. Через 0 и 1 обозначим функции, равные соответственно нулю и единице на своих областях определения. Пусть \mathcal{H} — нормированное пространство, множество $X \subset \mathcal{H}$. Тогда $B(\mathcal{H}) = \{x \in \mathcal{H} : \|x\| \leq 1\}$; $\operatorname{clos}(X)$, $\operatorname{conv}(X)$, $\operatorname{lin}(X)$ обозначают соответственно замыкание X , выпуклую и линейную оболочки X . Если S — целая функция экспоненциального типа (ц. ф. э. т.), то $\Lambda = \Lambda(S)$ — множество ее корней, $\mathcal{E}(S) = \mathcal{E}(\Lambda)$, $\mathcal{E}^{\pm}(S) = \mathcal{E}^{\pm}(\Lambda)$ — соответствующие системы экспонент.

в. Дополнительные предположения, предварительные сведения.

Определение. Пусть $\theta \in (0, \pi)$. Контур Γ назовем θ -графиком, если при каждом $x \in \mathbf{R}$ прямая $\{z \in \mathbf{C}; z = x + t \exp(i\theta), t \in \mathbf{R}\}$ пересекает Γ не более чем в одной точке.

Всюду ниже будем считать, что при некотором $\theta \in (0, \pi)$ Γ — кусочно-гладкий θ -график, соединяющий точки $-\pi$ и π .

Через D_Γ обозначим объединение связных компонент D_1, \dots, D_n множества $\mathbf{C} \setminus (\Delta \cup \Gamma)$, не содержащих бесконечно удаленной точки, для простоты будем считать, что их — конечное число. Пространством В. И. Смирнова $E^2(D_\Gamma)$ назовем пространство голоморфных в D_Γ функций f таких, что при каждом $j \in 1, \dots, n$ сужение f на D_j принадлежит $E^2(D_j)$ — пространству В. И. Смирнова в D_j .

Напомним, что ц. ф. э. т. S называется ф. т. с., если

i) все ее кони $\{\lambda_k\}$ — простые и

$$\sup_k |\operatorname{Im} \lambda_k| < \infty; \quad \inf_{m \neq k} |\lambda_m - \lambda_k| > 0;$$

ii) при любом $\delta > 0$

$$|S(\lambda)| \exp(-\pi |\operatorname{Im} \lambda|) \asymp 1, \quad \operatorname{dist}(\lambda, \Lambda) > \delta. \quad (1.1)$$

Определим функции $\psi_k \in L^2(\Delta)$ соотношениями

$$\frac{S(\lambda)}{S'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} \psi_k(t) dt, \quad k \in \mathbf{Z}. \quad (1.2)$$

Из (1.2), в частности, следует

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda_m t} \psi_k(t) dt = \delta_{k,m}, \quad k, m \in \mathbf{Z}. \quad (1.3)$$

Двойное интегрирование по частям в (1.2) дает

$$\begin{aligned} S'(\lambda_m) \psi_m(t) &= S'(\lambda_k) \left[i(\lambda_k - \lambda_m) \int_{-\pi}^t e^{i\lambda_m(\tau-t)} \psi_k(\tau) d\tau + \psi_k(t) \right] = \\ &= S'(\lambda_k) \left[-i(\lambda_k - \lambda_m) \int_t^{\pi} e^{i\lambda_m(\tau-t)} \psi_k(\tau) d\tau + \psi_k(t) \right]. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Мы будем использовать следующую теорему (см. [3], с. 77) о полноте и минимальности системы $\mathcal{E}(S)$ в $L^2(\Gamma)$.

Теорема А. В сделанных выше предположениях

i) система $\mathcal{E}(S)$ полна в пространстве $L^2(\Gamma)$;

ii) для минимальности $\mathcal{E}(S)$ в $L^2(\Gamma)$ необходимо и достаточно существование функции $f_0 \in E^2(D_\Gamma)$ такой, что $f_0|_\Delta = \psi_0$ (1.5).

Всюду ниже будет рассмотрен случай, когда $\mathcal{E}(S)$ минимальна в $L^2(\Gamma)$. В этом случае из теоремы А, (1.4) при $k=0$ и (1.5) следует, что все функции ψ_m продолжаются с Δ до функций из пространства $E^2(D_\Gamma)$ и их сужение на Γ образуют систему, биортогональную на Γ к $\mathcal{E}(S)$. Будем рассматривать следующие системы функций в $L^2(\Gamma)$: $\Psi(S) = \{\psi_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$; $\Psi^+(S) = \{\psi_k\}_{k>0}$; $\Psi^-(S) = \{\psi_k\}_{k<0}$.

В § 2 будет доказана полнота системы $\Psi(S)$ в $L^2(\Gamma)$, в § 3 исследуются свойства подпространств $L^2(\Gamma)$, порожденных системами $\Psi^\pm(S)$, $\xi^\pm(S)$.

§ 2. Полнота биортогональной системы. а. Теорема 1. Система $\Psi(S)$ полна в пространстве $L^2(\Gamma)$.

б. Доказательство проведем, считая для простоты, что $\theta = \pi/2$, ниже в п^о г будут указаны изменения в рассуждениях, которые нужно внести при $\theta \neq \pi/2$.

Пусть $\Psi(S)$ не полна в $L^2(\Gamma)$. Тогда для некоторой $\varphi \in L^2(\Gamma)$, $\varphi \neq 0$

$$\int_{\Gamma} \varphi(s) \psi_m(s) ds = 0, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (2.1)$$

Для $\xi \in \Gamma$ через $\Gamma^\pm(\xi)$ обозначим дуги контура Γ , соединяющие точку ξ с точками $\pm\pi$ соответственно. Пусть для простоты $\lambda_0 = 0$. Соотношения (1.4) при $k = 0$ и (2.1) дают

$$i\lambda_m \int_{\Gamma} \varphi(\xi) e^{-i\lambda_m \zeta} \int_{\Gamma^\pm(\xi)} e^{i\lambda_m s} \psi_0(s) ds d\zeta = 0, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Докажем, что каждая из ц. ф. э. т.

$$\Omega^\pm(\lambda) = \lambda \int_{\Gamma} \varphi(\xi) e^{-i\lambda \xi} \int_{\Gamma^\pm(\xi)} e^{i\lambda s} \psi_0(s) ds d\zeta, \quad (2.2)$$

обращающихся в ноль на Λ , тождественно равна нулю. Рассмотрим, например, функцию Ω^+ . Ее индикаторная диаграмма $I_{\Omega^+} \subset \text{con v}(iG_{\Gamma}^+)$, где $G_{\Gamma}^+ = \{s - \xi, \xi \in \Gamma, s \in \Gamma^+(\xi)\}$. Из того, что Γ — $\pi/2$ -график, следует, что при $s \in \Gamma^+(\xi)$ верно $0 < \text{Re}(s - \xi) < \pi - \text{Re} \xi$. Поэтому все множество G_{Γ}^+ расположено в вертикальной полосе $\{\xi \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Re} \xi \leq 2\pi\}$. Легко видеть, что единственный отрезок длиной 2π , параллельный вещественной оси и содержащийся в G_{Γ}^+ , есть отрезок $[0, 2\pi]$. Соответственно $[-2i\pi, 0]$ — единственный отрезок длиной 2π , параллельный мнимой оси и содержащийся в $\text{con v}(iG_{\Gamma}^+)$. Из теоремы о сложении индикаторов ([4], гл. III, теорема 5) следует, что целая функция $\Delta^+(\lambda) = e^{-i\lambda\pi} \Omega^+(\lambda) S(\lambda)^{-1}$ есть ц. ф. э. т. ноль. Грубые оценки функции Δ^+ на мнимой оси дают

$$|\Delta^+(i\eta)| \stackrel{\text{ac}}{\leq} C_1 |\Omega^+(i\eta)| \leq C_2 |\eta| \max_{z \in G_{\Gamma}^+} \{e^{-\text{Re} \eta z}\} \leq C_3 \eta, \quad \eta \rightarrow +\infty;$$

$$|\Delta^+(i\eta)| \stackrel{\text{ac}}{\leq} C_4 |e^{2i\pi(i\eta)} \Omega^+(i\eta)| \leq C_5 |\eta| \max_{z \in G_{\Gamma}^+} \{e^{-\text{Re}(\eta z + 2\eta\pi)}\} \leq C_6 |\eta|,$$

$$\eta \rightarrow -\infty.$$

Из этих оценок следует, что при некоторых $a, b \in \mathbb{C}$ верно

$$\Delta^+(\lambda) = a\lambda + b \quad (2.3).$$

Лемма 1.

$$\int_1^{\infty} |\Delta^+(-i\eta)| \eta^{-1} d\eta < \infty. \quad (2.4)$$

Доказательство этой леммы будет дано ниже.

Из (2.3), (2.4) следует $\Delta^+ = 0$, откуда, в свою очередь, $\Omega^+ = 0$. Равенство $\Omega^- = 0$ устанавливается аналогично. Имеем теперь

$$\begin{aligned} 0 &= \Omega^-(\lambda) + \Omega^+(\lambda) = \lambda \int_{\Gamma} \varphi(\xi) e^{-i\lambda\xi} \left(\int_{\Gamma^-(\xi)} + \int_{\Gamma^+(\xi)} \right) e^{i\lambda s} \psi_0(s) ds d\xi = \\ &= \lambda \int_{\Gamma} \varphi(\xi) e^{-i\lambda\xi} \int_{\Gamma} e^{i\lambda s} \psi_0(s) ds d\xi = S(\lambda) \int_{\Gamma} \varphi(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\int_{\Gamma} \varphi(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi = 0$$

и $\varphi = 0$. С точностью до леммы 1 теорема 1 доказана.

в. Доказательство леммы 1 основано на следующем утверждении.

Лемма 2. Пусть c — кусочно-гладкий контур конечной длины в C и $h(-\omega)$ — опорная функция множества $\text{con}(c)$. Для каждого $\omega \in [0, 2\pi]$ соотношения $T_\omega: f \rightarrow (T_\omega f)(r) = \int f(\xi) \exp[r(\xi e^{i\omega} - h(\omega))] d\xi$ определяют ограниченный оператор из $L^2(c)$ в $L^2(0, \infty)$.

Утверждение этой леммы есть простое следствие из теоремы о мерах Карлесона (см., например, [5], гл. 1, теорема 5.6).

Замечание. При этом легко видеть, что норма операторов T_ω допускает равномерную по $\omega \in [0, 2\pi]$ оценку, зависящую только от максимума по $\omega \in [0, 2\pi]$ нормы Карлесона (см., например [5], с. 40) меры, порожденной в левой полуплоскости длиной дуги кривой $c \exp(-i\omega) - h(-\omega)$.

Из (1.1) следует, что для доказательства (2.4) достаточно установить

$$\int_1^{\infty} |\Omega^+(-i\eta)| e^{-2\pi\eta} \eta^{-1} d\eta < \infty. \quad (2.5)$$

Выделим на Γ дуги $I_1 = \{\xi \in \Gamma, \text{Re } \xi < -\pi + \varepsilon\}$, $I_2 = \Gamma \setminus I_1$; $m_1 = \{\xi \in \Gamma, \text{Re } \xi < \pi - \varepsilon\}$, $m_2 = \Gamma \setminus m_1$, ориентированные в направлении возрастания $\text{Re } \xi$. Имеем

$$\begin{aligned} \Omega^+(\lambda) &= \lambda \left(\int_{I_1} + \int_{I_2} \right) \varphi(\xi) e^{-i\lambda\xi} \int_{\Gamma^+(\xi)} e^{i\lambda s} \psi_0(s) ds d\xi = \\ &= -\lambda \int_{I_1} \varphi(\xi) e^{-i\lambda\xi} \int_{m_2} e^{i\lambda s} \psi_0(s) ds d\xi + \lambda \int_{I_1} \varphi(\xi) e^{-i\lambda\xi} \int_{\Gamma^+(\xi) \setminus m_2} e^{i\lambda s} \psi_0(s) ds d\xi + \\ &\quad + \lambda \int_{I_2} \varphi(\xi) e^{-i\lambda\xi} \int_{\Gamma^+(\xi)} e^{i\lambda s} \psi_0(s) ds d\xi = \Omega_1^+ + \Omega_2^+ + \Omega_3^+. \end{aligned}$$

Очевидно, $I_{\Omega_1^+}, I_{\Omega_2^+} \subset \{\xi : \operatorname{Im} \xi > -2\pi + \varepsilon\}$, поэтому соотношение (2.5) с заменой Ω^+ на Ω_2^+, Ω_3^+ заведомо выполнено и для доказательства леммы 1 достаточно установить

$$\int_1^\infty |\Omega_1^+(-i\eta)| e^{-2\pi\eta} \eta^{-1} d\eta < \infty. \quad (2.6)$$

Положим $\Omega_1(\lambda) = \lambda M(\lambda) L(\lambda)$, где

$$L(\lambda) = \int_{l_1} \varphi(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi; \quad M(\lambda) = \int_{m_2} e^{i\lambda s} \psi_0(s) ds.$$

Лемма 2 дает теперь

$$\int_1^\infty |L(-i\eta)|^2 e^{-2\pi\eta} d\eta < \infty, \quad \int_1^\infty |M(-i\eta)|^2 e^{-2\pi\eta} d\eta < \infty.$$

Отсюда с помощью неравенства Коши—Буняковского следует (2.6). Лемма 1, а с ней и теорема 1 доказаны.

г. В случае $\theta \neq \pi/2$ рассуждения проводятся аналогично с той разницей, что оценки даются вдоль прямых, определяемых по величине θ . Так, индикаторная диаграмма функции Ω^+ лежит в полосе $\{z: 0 > \operatorname{Im}(iz \exp(+i\theta)) > -2\pi \sin \theta\}$, оценки функции Δ^+ (определяемой тем же соотношением, что и в п⁰ б) даются не на мнимой оси, а на прямой $R \exp(i\theta)$, в лемме 1 вместо интеграла по лучу $[-i, -i\infty)$ нужно взять интеграл по лучу $(-\infty, -1] \exp(i\theta)$ и т. д.

§ 3. Аналоги пространств В. И. Смирнова. а) Если H_1, H_2 — замкнутые подпространства гильбертова пространства H , такие, что $H_1 \cap H_2 = \{0\}$, то через $\langle H_1, H_2 \rangle$ будем обозначать угол между этими подпространствами, а через $\mathcal{P}_{H_1 \| H_2}$ — проектор (возможно неограниченный) прямой суммы $H_1 + H_2$ на H_1 параллельно H_2 .

Рассмотрим следующие подпространства пространства $L^2(\Gamma)$:

$$E_+ = E_+^2(\Gamma) = \operatorname{clos}(\operatorname{lin}(\{e^{i\lambda n \xi}\}_{n>0}));$$

$$E_- = E_-^2(\Gamma) = \operatorname{clos}(\operatorname{lin}(\{e^{i\lambda n \xi}\}_{n<0}));$$

$$B_+ = B_+^2(\Gamma) = \operatorname{clos}(\operatorname{lin}(\{\psi_n\}_{n>0})); \quad B_- = B_-^2(\Gamma) = \operatorname{clos}(\operatorname{lin}(\{\psi_n\}_{n<0})).$$

Эти подпространства являются аналогами пространств В. И. Смирнова для последовательности показателей Λ . Заметим, что в случае $\Lambda = \mathbb{Z}$ имеет место совпадение $\mathcal{E}(S) = \Psi(S)$ и возникает только одна пара подпространств.

Теорему о разложении пространства $L^2(\)$ в прямую сумму пространств E_+, E_- удастся доказать при дополнительных ограничениях на функцию S .

Теорема 2. Пусть f т. с. такова, что функция ψ_0 , определенная соотношением (1.2) при $k=0$, имеет производную $\psi'_0 \in E^2(D_\Gamma)$. Тогда $\langle E_+^2(\Gamma), E_-^2(\Gamma) \rangle > 0$; $\langle B_+^2(\Gamma), B_-^2(\Gamma) \rangle > 0$ и, таким образом, имеют

место равенства $L^2(\Gamma) = E_+^2(\Gamma) \dot{+} E_-^2(\Gamma) = B_+^2(\Gamma) \dot{+} B_-^2(\Gamma)$. При этом проектор $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{E_- || E_+}$ имеет вид

$$\mathcal{P}: f \mapsto \frac{1}{2} f(z) - \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{i}{2\pi} \frac{\psi_0(\pi)}{\psi_0(-\pi)} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{2\pi - z + \xi} d\xi + \\ + \frac{i}{2\pi} \frac{\psi_0(-\pi)}{\psi_0(\pi)} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{-2\pi - z + \xi} d\xi + \int_{\Gamma} f(\xi) l(z, \xi) d\xi, \quad (3.1)$$

где функция $l(z, \xi)$ определена и голоморфна по z и ξ при $z \in \Pi_\theta = \{z: z = x + y \exp(i\theta), -\pi < x < \pi, y \in \mathbb{R}\}$, $\xi \in D_\Gamma$, при каждом $z \in \Pi_\theta$ принадлежит пространству $E^2(D_\Gamma)$ как функция от ξ и порождает вполне непрерывный оператор в пространстве $L^2(\Gamma)$.

б. Доказательство теоремы 2 проведем, считая для простоты $\theta = \pi/2$. В π^0 и будет указано, какие изменения нужно провести в общем случае. Кроме того, будем для простоты считать, что $\Gamma \setminus \{-\pi, \pi\} \subset C_-$. В этом случае D_Γ связна.

Достаточно построить ограниченный проектор $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{E_- || E_+}$. Для этого рассмотрим ряд

$$k(\xi, s) = \sum_{m < 0} \psi_m(\xi) e^{i\lambda_m s}. \quad (3.2)$$

Легко видеть, что при каждом $s \in C_-$ ряд (3.2) сходится равномерно по $\xi \in \Delta$. Положим $\Pi = \Pi_{\pi/2}$ и при каждом $s \in C_- \cap \Pi$ найдем сумму ряда (3.2) в смысле слабой сходимости в $L^2(\Delta)$, т. е. функцию $k(\cdot, s) \in L^2(\Delta)$ такую, что при любой $\varphi \in L^2(\Delta)$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=-N}^{-1} e^{i\lambda_m s} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\xi) \psi_m(\xi) d\xi = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\xi) k(\xi, s) d\xi.$$

Функция $k(\xi, s)$ будет суммой ряда (3.2) и в смысле сходимости в $L^2(\Delta)$. Имеем

$$k_N(\xi, s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=-N}^{-1} e^{i\lambda_m s} \psi_m(\xi) = \sum_{m=-N}^{-1} e^{i\lambda_m s} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(\lambda) e^{-i\lambda \xi} d\lambda}{S'(\lambda_m)(\lambda - \lambda_m)} = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\lambda) e^{-i\lambda \xi} \left(\sum_{m=-N}^{-1} \frac{e^{i\lambda_m s}}{S'(\lambda_m)(\lambda - \lambda_m)} \right) d\lambda. \quad (3.3)$$

Пусть для простоты $\lambda_0 = 0$ и $\pm \operatorname{Re} \lambda_m > 0$ при $\pm m > 0$. Для вычисления внутренней суммы в правой части (3.3) рассмотрим расширяющуюся последовательность областей $\{D_N\}$, ограниченных контурами $C_N = L_N \cup \cup K_N \cup T_\delta$, где $L_N = [-iR_N, -i\delta] \cup [i\delta iR_N]$, $K_N = \{\lambda: |\lambda| = R_N, \operatorname{Re} \lambda \leq 0\}$, $T_\delta = \{\lambda: |\lambda| = \delta, \operatorname{Re} \lambda \leq 0\}$, здесь не зависящее от N число $\delta > 0$ и последовательность $R_N \nearrow +\infty$ выбраны таким образом, чтобы $D_N \cap \Lambda = \{\lambda_m\}_{m=-N}^{-1}$; $\inf \{\operatorname{dist}(C_N, \Lambda)\} > 0$. Положим $\chi_N(\lambda) = 1, \lambda \in D_N$; $\chi_N(\lambda) = 0, \lambda \notin D_N$. По теореме о вычетах

$$\sum_{m=-N}^{-1} \frac{e^{i\lambda_m s}}{S'(\lambda_m)(\lambda - \lambda_m)} = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_N} \frac{e^{i\mu s} d\mu}{S(\mu)(\lambda - \mu)} + \chi_N(\lambda) \frac{e^{i\lambda s}}{S(\lambda)},$$

Возвращаясь к (3.3), имеем

$$k_N(\xi, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-R_N}^{-\delta} e^{i\lambda(s-\xi)} d\lambda + \frac{1}{4i\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} S(\lambda) e^{i\lambda s} \left(\int_{L_N} \frac{e^{i\mu s}}{S(\mu)(\lambda-\mu)} d\mu \right) d\lambda + \\ + \frac{1}{4i\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} S(\lambda) e^{-i\lambda \xi} \int_{K_N} \frac{e^{i\mu s}}{S(\mu)(\lambda-\mu)} d\mu d\lambda = k_N^{(1)} + k_N^{(2)} + k_N^{(3)}. \quad (3.4)$$

В. Слагаемое $k_N^{(1)}$ вычисляется явно:

$$k_N^{(1)}(\xi, s) = \frac{1}{2i\pi} \frac{e^{-i\delta(s-\xi)} - e^{-iR_N(s-\xi)}}{s-\xi} \rightarrow \frac{1}{2i\pi} \frac{e^{-i\delta(s-\xi)}}{s-\xi}. \quad (3.5)$$

Докажем, что в смысле слабой сходимости в $L^2(\Delta)$ $k_N^{(3)}(\cdot, s) \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ (3.6). При $\varphi \in L^2(\Delta)$ положим

$$\Phi(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\xi) e^{-i\lambda \xi} d\xi.$$

Имеем при $s \in C_-$

$$I_N \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\xi) k_N^{(3)}(\xi, s) d\xi = \frac{1}{4i\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} S(\lambda) \Phi(\lambda) \int_{K_N} \frac{e^{i\mu s}}{S(\mu)(\lambda-\mu)} d\mu d\lambda = \\ = \frac{1}{4i\pi^2} \int_{K_N} \frac{e^{i\mu s}}{S(\mu)} V(\mu) d\mu, \quad (3.7)$$

где

$$V(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(\lambda) \Phi(\lambda)}{\lambda-\mu} d\lambda. \quad (3.8)$$

Справедливо соотношение $V(\mu) \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow \infty$ (3.9). При $|\operatorname{Im} \mu| > 1$ это очевидно, для того, чтобы получить (3.9) при $|\operatorname{Im} \mu| < 1$, нужно сдвинуть контур интегрирования в (3.8), заменив его на $R \mp 2i$ при $\pm \operatorname{Im} \mu > 0$. Соотношение $I_N \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ следует теперь из (3.7) и (3.9) с помощью леммы Жордана.

Непосредственно проверяется, что в слабой $L^2(\Delta)$ -топологии

$$k_N^{(2)}(\xi, \eta) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} S(\lambda) e^{-i\lambda \xi} \int_L \frac{e^{i\mu \eta}}{S(\mu)(\lambda-\mu)} d\mu d\lambda, \quad (3.10)$$

где $L = (iR \setminus [-i\delta, i\delta]) \cup T_\delta$.

Объединяя соотношения (3.4)–(3.6), (3.10), имеем

$$\begin{aligned} k(\xi, s) &= \sum_{m < 0} e^{i\lambda_m s} \psi_m(\xi) = -\frac{e^{-i\delta(s-\xi)}}{2i\pi(s-\xi)} + \\ &+ \frac{1}{4i\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} S(\lambda) e^{-i\lambda\xi} \int_L \frac{e^{i\mu s}}{S(\mu)(\lambda-\mu)} d\mu d\lambda = \\ &= k_I(\xi, s) + k_{II}(\xi, s), \quad \xi \in \Delta, s \in D_\Gamma. \end{aligned} \quad (3.11)$$

г. Ядро $k_I(\xi, s)$ как функция от s, ξ аналитически продолжается во всю комплексную плоскость с условием $s \neq \xi$. Для исследования аналитических свойств ядра $k_{II}(\xi, s)$ представим его в виде

$$\begin{aligned} k_{II}(\xi, s) &= \frac{1}{4i\pi^2} \left(\int_{-i\infty}^{-i\delta} + \int_{i\delta}^{i\infty} + \int_{i\delta}^{i\infty} \right) \frac{e^{i\mu s}}{S(\mu)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(\lambda) e^{-i\lambda\xi}}{\lambda-\mu} d\lambda d\mu = \\ &= k_{II}^-(\xi, s) + k_{II}^0(\xi, s) + k_{II}^+(\xi, s). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Для исследования внутренних интегралов в средней части (3.12) воспользуемся представлением (1.2) при $k=0$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(\lambda) e^{-i\lambda\xi}}{\lambda-\mu} d\lambda &= \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{\lambda}{\lambda-\mu} - 1 \right) \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} \psi_0(t) dt + \right. \\ &+ \left. \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} \psi_0(t) dt \right] e^{-i\lambda\xi} d\lambda = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu}{\lambda-\mu} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} \psi_0(t) dt e^{-i\lambda\xi} d\lambda - i\psi_0(\xi) = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \psi_0(t) \frac{\mu}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda(t-\xi)}}{\lambda-\mu} d\lambda dt - i\psi_0(\xi). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Внутренний интеграл в правой части (3.13) вычисляется непосредственно. При $\text{Im } \mu < 0$ имеем

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda(t-\xi)}}{\lambda-\mu} d\lambda = \begin{cases} 0, & \xi < t; \\ -e^{i\mu(t-\xi)}, & \xi > t. \end{cases}$$

Окончательно

$$k_{II}^-(\xi, s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{-i\delta} \frac{e^{i\mu s}}{S(\mu)} \left[\psi_0(\xi) - i\mu \int_{-\pi}^{\xi} e^{i\mu(t-\xi)} \psi_0(t) dt \right] d\mu \quad (3.14)$$

и аналогично

$$k_{II}^+(\xi, s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{i\delta}^{i\infty} \frac{e^{i\mu s}}{S(\mu)} \left[\psi_0(\xi) + i\mu \int_{\xi}^{\pi} e^{i\mu(t-\xi)} \psi_0(t) dt \right] d\mu. \quad (3.15)$$

Соответственно, полагая $T_\delta^\pm = T_\delta \cap C_\pm$, имеем $k_{II}^0 = \hat{k}_{II}^+ + \hat{k}_{II}^-$, где

$$\hat{k}_{II}^\pm(\xi, s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{T_\delta^\pm} \frac{e^{i\mu s}}{S(\mu)} \left[\psi_0(\xi) - i\mu \int_{\pm\pi}^\xi e^{i\mu(t-\xi)} \psi_0(t) dt \right] d\mu. \quad (3.16)$$

Используя то, что Γ является $\pi/2$ -графиком, легко установить равномерную сходимость и, следовательно, голоморфность правых частей соотношений (3.14—3.16) при всех $\xi \in D_\Gamma$, $s \in \Pi$. Доопределим сразу функции \hat{k}_{II}^\pm на множество этих значений аргументов. Отметим сразу, что ядра \hat{k}_{II}^\pm порождают вполне непрерывный оператор в пространстве $L^2(\Gamma)$.

д. Для исследования операторов, порождаемых ядрами k_{II}^\pm , воспользуемся тем, что $\psi_0' \in E^2(D_\Gamma)$. При этом определены значения $\psi_0'(\pm\pi)$, причем $\psi_0'(\pm\pi) \neq 0$, иначе S не могла бы быть ф. т. с. Интегрирование по частям в правой части (3.14) дает

$$\begin{aligned} \psi_0(\xi) - i\mu e^{-i\mu\xi} \int_{-\pi}^\xi e^{i\mu t} \psi_0(t) dt = \\ = e^{-i\mu(\pi+\xi)} \psi_0(-\pi) + e^{-i\mu\xi} \int_{-\pi}^\xi e^{i\mu t} \psi_0'(t) dt. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Также интегрированием по частям и простыми преобразованиями устанавливается асимптотика функции $S^{-1}(\mu)$ при $\mu \rightarrow i\infty$:

$$\frac{1}{S(i\eta)} = \frac{ie^{\eta\pi}}{\psi_0(\pi)} + \hat{\varphi}_-(\eta)e^{\eta\pi}; \quad \eta < -\delta, \quad \hat{\varphi}_- \in L^2(-\infty, -\delta) \cap L^\infty(-\infty, -\delta). \quad (3.18)$$

Подставляя (3.17), (3.18) в (3.14), имеем

$$\begin{aligned} k_{II}^-(\xi, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-\delta} e^{-\eta s} \left[\frac{ie^{\eta\pi}}{\psi_0(\pi)} + e^{\eta\pi} \hat{\varphi}_-(\eta) \right] [e^{\eta(\pi+\xi)} \psi_0(-\pi) + \\ + e^{\eta\xi} \int_{-\pi}^\xi e^{-\eta t} \psi_0'(t) dt] d\eta = \frac{i}{2\pi} \frac{\psi_0(-\pi)}{\psi_0(\pi)} \int_{-\infty}^{-\delta} e^{\eta(2\pi+\xi-s)} d\eta + \\ + \frac{\psi_0(-\pi)}{2\pi} \int_{-\infty}^{-\delta} e^{\eta(2\pi+\xi-s)} \hat{\varphi}_-(\eta) d\eta + \frac{i}{2\pi\psi_0(\pi)} \int_{-\infty}^{-\delta} e^{\eta(\pi-s+\xi)} \int_{-\pi}^\xi e^{-\eta t} \psi_0'(t) dt d\eta + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-\delta} e^{\eta(\pi-s+\xi)} \left(\int_{-\pi}^\xi e^{-\eta t} \psi_0'(t) dt \right) \hat{\varphi}_-(\eta) d\eta = \\ = k_1^-(\xi, s) + k_2^-(\xi, s) + k_3^-(\xi, s) + k_4^-(\xi, s). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Интегралы, стоящие в этих равенствах, очевидно, сходятся при почти всех $\xi, s \in \Gamma$.

Для исследования ядер k_j^- понадобятся следующие леммы, доказательство которых дано ниже в п⁰ 3. $\text{сопн}(\bigcup \{i(\Gamma^-(z) - z), z \in \Gamma\})$.

Лемма 3. Пусть $h(-\omega)$ — опорная функция множества $\text{сопн}(\bigcup \{i(\Gamma^-(z) - z), z \in \Gamma\})$. Для каждого $\omega \in [0, 2\pi]$ соотношение

$$R_\omega: (\varphi, \psi) \mapsto (R_\omega(\varphi, \psi))(r) = \int_{\Gamma} \varphi(z) \int_{\Gamma^-(z)} \psi(t) e^{-ir(z-t)\exp(i\omega)} dt dz e^{-rh(\omega)}$$

определяет ограниченный оператор из $L^1(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$ в $L^2(0, \infty)$.

Лемма 4. Пусть c — кусочно-гладкий контур конечной длины, лежащий в левой полуплоскости. Тогда соотношение

$$Q: \psi \rightarrow (Q\psi)(\sigma) = \int_c \frac{\psi(v)}{\sigma - v} dv$$

определяет ограниченный оператор из $L^2(c)$ в $H^2(C_{\text{пр}})$ — пространство Харди в правой полуплоскости. При этом норма этого оператора оценивается величиной, зависящей только от нормы Карлесона, меры, порожденной в левой полуплоскости длиной дуги контура c .

е. Ядро $k_1^-(\xi, s)$ вычисляется непосредственно:

$$\begin{aligned} k_1^-(\xi, s) &= \frac{i}{2\pi} \frac{\psi_0(-\pi)}{\psi_0(\pi)} \frac{\exp(-\delta(2\pi - s + \xi))}{2\pi - s + \xi} = \\ &= \frac{i}{2\pi} \frac{\psi_0(-\pi)}{\psi_0(\pi)} \frac{1}{2\pi - s + \xi} + \hat{k}_1 - (\xi, s). \end{aligned} \quad (3.20)$$

При этом функция \hat{k}_1^- , очевидно, является ядром вполне непрерывного оператора \hat{K}_1^- в пространстве $L^2(\Gamma)$.

Обозначим через $K_j^-: L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma)$ операторы, порожденные ядрами k_j^- , $j = 2, 3, 4$. Положим $\mathfrak{M} = \{f \in B(L^2(\Gamma)); f \text{ обращается в ноль в окрестности точек } \pm\pi\}$. Это множество, очевидно, плотно в $B(L^2(\Gamma))$. Рассмотрим также операторы

$$T^\pm: f \mapsto e^{\pi\eta} \int_{\Gamma} f(\xi) e^{\pm\xi\eta} d\xi.$$

Из леммы 2 следует, что T^\pm — ограниченные операторы из $L^2(\Gamma)$ в $L^2(-\infty, -\delta)$.

Для доказательства полной непрерывности оператора K_2^- достаточно доказать, что любую, слабо сходящуюся к нулю, последовательность функций $\{g_n\} \subset L^2(\Gamma)$ он переводит в сильно сходящуюся. Другими словами,

$$\sup \left\{ \left| \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} f(\xi) g_n(s) k_2^-(\xi, s) d\xi ds \right|, f \in \mathfrak{M} \right\} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \quad (3.21)$$

Воспользуемся соотношением

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma} \int_{\Gamma} f(\xi) g_n(s) k_2^-(\xi, s) ds d\xi = \\ &= \frac{\psi_0(-\pi)}{2\pi} \int_{-\infty}^{-\delta} \hat{\varphi}_-(\eta) (T^+f)(\eta) (T^-g)(\eta) d\eta. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Без уменьшения общности можно считать $\|g_n\|_{L^2(\Gamma)} \leq 1$. Отсюда и из слабой сходимости $\{g_n\}$ к нулю следует $\forall M > 0, T^-g_n(\eta) \rightrightarrows 0, n \rightarrow \infty, \eta \in (-M, -\delta)$ и, кроме того, $A \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{|(T^-g_n)(\eta)|, n \in N, \eta \in (-\infty, -\delta)\} < \infty$. Из (3.22) следует

$$\begin{aligned} & \left| \iint_{\Gamma \times \Gamma} f(\xi) g_n(s) k_2^-(\xi, s) ds d\xi \right| \leq \left| \frac{1}{2\pi} \psi_0(-\pi) \right| \times \\ & \left(A \int_{-\infty}^{-M} |\hat{\varphi}_-(\eta) T^+ f(\eta)| d\eta + \sup_{\eta \in (-M, -\delta)} \{|T^-g_n(\eta)|\} \int_{-M}^{-\delta} |\hat{\varphi}_-(\eta) T^+ f(\eta)| d\eta \right) \leq \\ & \leq \left| \frac{\psi_0(\pi)}{2\pi} \right| \left\{ A \left(\int_{-\infty}^{-M} |\hat{\varphi}_-(\eta)|^2 d\eta \right)^{1/2} \|T^+\| + \right. \\ & \left. + \sup_{-M < \eta < -\delta} \{|T^-g_n(\eta)|\} \cdot \|T^-\| \|\hat{\varphi}_-\| \right\}. \quad (3.23) \end{aligned}$$

Выбирая по заданному $\varepsilon > 0$ вначале M таким образом, чтобы первое слагаемое правой части (3.23) не превосходило $\varepsilon/2$, а затем по этому M подходящий номер $n_0 = n_0(M)$, добьемся того, чтобы при $n > n_0$ выражение в левой части (3.23) не превосходило ε . В силу произвольности ε отсюда следует (3.21).

Преобразуем ядро оператора k_3^- :

$$\begin{aligned} k_3^-(\xi, s) &= \frac{i}{2\pi\psi_0(\pi)} \int_{\Gamma^-(\xi)} \psi_0'(t) \int_{-\infty}^{-\delta} e^{\eta(\pi-s+\xi-t)} d\eta dt = \\ &= \frac{i}{2\pi\psi_0(\pi)} \int_{\Gamma^-(\xi)} \psi_0'(t) \frac{\exp(-\delta(\pi-s+\xi-t))}{\pi-s+\xi-t} dt. \end{aligned}$$

Для доказательства полной непрерывности K_3^- достаточно установить полную непрерывность оператора

$$A: g \mapsto \int_{\Gamma} g(s) a(\xi, s) ds; \quad a(\xi, s) = \int_{\Gamma^-(\xi)} \frac{\psi_0'(t)}{\pi-s+\xi-t} dt.$$

В частности, достаточно доказать, что при некотором $C > 0$

$$\int_{\Gamma} |a(\xi, s)|^2 |ds| < C, \quad \forall \xi \in \Gamma. \quad (3.24)$$

Для каждого $\xi \in \Gamma$ рассмотрим функцию

$$\Omega_{\xi}(\sigma) = \int_{\Gamma^-(\xi)} \frac{\psi_0'(t)}{\sigma+\xi-t} dt = \int_{\Gamma^-(\xi)-\xi} \frac{\psi_0'(v+\xi)}{\sigma-v} dv.$$

Из леммы 4 следует, что $\Omega_{\xi} \in H^2(C_{\text{пр}})$, причем

$$\sup_{\xi \in \Gamma} \|\Omega_{\xi}\|_{H^2(C_{\text{пр}})} < \infty.$$

Для получения оценки (3.24) остается заметить, что

$$\int_{\Gamma} |a(\xi, s)|^2 ds = \int_{-\Gamma+\pi} |\Omega_{\xi}(\sigma)|^2 d\sigma,$$

и еще раз воспользоваться теоремой о мерах Карлесона.

Доказательство полной непрерывности оператора K_4^- может быть проведено одним из двух способов: аналогично доказательству для K_3^- с использованием леммы 3 вместо леммы 2 либо аналогично доказательству для K_3^- .

Окончательно ядро k_{II}^- имеет вид

$$k_{II}^-(\xi, s) = \frac{i}{2\pi} \frac{\psi_0(-\pi)}{\psi_0(\pi)} \frac{1}{2\pi - s + \xi} + \hat{l}_-(\xi, s),$$

где функция $\hat{l}_-(\xi, s)$ определена при $\xi \in \text{clos}(D_{\Gamma})$, $s \in \Pi$ и является ядром вполне непрерывного оператора в $L^2(\Gamma)$. Аналогично доказывается, что

$$k_{II}^+(\xi, s) = \frac{i}{2\pi} \frac{\psi_0(\pi)}{\psi_0(-\pi)} \frac{1}{-2\pi - s + \xi} + \hat{l}_+(\xi, s),$$

окончательно

$$k(\xi, s) = \frac{1}{2i\pi(s - \xi)} + \frac{i}{2\pi} \frac{\psi_0(-\pi)}{\psi_0(-\pi)} \frac{1}{2\pi - s + \xi} + \\ + \frac{i}{2\pi} \frac{\psi_0(\pi)}{\psi_0(-\pi)} \frac{1}{-2\pi - s + \xi} + l(\xi, s),$$

где функция $l(\xi, s)$ определена при $\xi \in \text{clos}(D_{\Gamma})$, $s \in \Pi$ голоморфна при $\xi \in D_{\Gamma}$, $s \in \Pi$ и является ядром вполне непрерывного оператора в пространстве $L^2(\Gamma)$.

ж. Зафиксируем $s \in \Pi$ так, чтобы $\text{Im } s < \inf \{\text{Im } \sigma, \sigma \in \Gamma\}$. Имеем при $n \in \mathbb{Z}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} k(\xi, s) e^{i\lambda n \xi} d\xi = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n \xi} \sum_{-N}^{-1} \psi_m(\xi) e^{i\lambda m s} d\xi = \\ = \begin{cases} e^{i\lambda n s}, & n < 0; \\ 0, & n \geq 0. \end{cases} \quad (3.26)$$

Деформируя путь интегрирования в этом соотношении, имеем

$$\int_{\Gamma} k(\xi, s) e^{i\lambda n \xi} d\xi = \begin{cases} e^{i\lambda n s}, & n < 0; \\ 0, & n \geq 0. \end{cases}$$

Зафиксировав $\xi_0 \in \Gamma$, перейдем к пределу в (3.26), устремив s снизу к точке ξ_0 . Имеем

$$\lim_{s \rightarrow \xi_0 - i0} \int_{\Gamma} \left\{ \frac{1}{2i\pi(s - \xi)} + \frac{i}{2\pi} \frac{\psi_0(\pi)}{\psi_0(-\pi)} \frac{1}{2\pi - s + \xi} + \frac{\psi_0(-\pi)}{\psi_0(\pi)} \frac{1}{-2\pi - s + \xi} + \right. \\ \left. + l(\xi, s) \right\} e^{i\lambda n \xi} d\xi = \frac{1}{2} e^{i\lambda n \xi_0} + \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{e^{i\lambda n \xi} d\xi}{\xi_0 - \xi} + \frac{i}{2\pi} \frac{\psi_0(\pi)}{\psi_0(-\pi)} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \int_{\Gamma} \frac{e^{i\lambda n \xi} d\xi}{\xi - \xi_0} + \frac{i}{2\pi} \frac{\psi_0(-\pi)}{\psi_0(\pi)} \int_{\Gamma} \frac{e^{i\lambda n \xi} d\xi}{-2\pi - \xi_0 + \xi} + \int_{\Gamma} e^{i\lambda n \xi} I(\xi, \xi_0) d\xi = \\ & = \begin{cases} e^{i\lambda n \xi_0} & n < 0; \\ 0 & n \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Оператор, определенный равенством (3.1), очевидно, ограничен в $L^2(\Gamma)$. Из (3.27) следует, что он является проектором на E_- параллельно E_+ . С точностью до лемм 3, 4 теорема 2 доказана.

3. Доказательство леммы 3 проведем для случая $\omega = 0$. Пусть $h_z(-\omega)$ — опорная функция множества $i(\Gamma^-(z) - z)$. Из леммы 2 следует, что функции

$$F_z(r) = \int_{\Gamma^-(z)} \psi(t) e^{-ir(z-t) - rh_z(0)} dt$$

принадлежат пространству $L^2(0, \infty)$ и $\|F_z\|_{L^2(0, \infty)} \leq \text{const} \|\psi\|_{L^2(\Gamma)}$, где константа — общая для всех $z \in \Gamma$. Кроме того, при любом $z \in \Gamma$, очевидно, $h_z(\omega) \leq h(\omega)$. Утверждение леммы 3 следует отсюда и из неравенства треугольника.

Для доказательства леммы 4 достаточно установить, что при некоторой константе C , зависящей только от нормы Карлесона, меры, порожденной в левой полуплоскости длиной дуги контура c , и при любом $\delta > 0$ выполнено

$$\sup \left\{ \left| \int_0^\infty f(\sigma) \int_c \frac{\psi(v)}{v - \sigma} dv d\sigma \right|; f \in B(L^2(iR + \delta)) \right\} < C.$$

Функция

$$F(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{iR+\delta} \frac{f(\sigma)}{v - \sigma} d\sigma \in B(H^2(C_{\text{лев}} + \delta))$$

и для доказательства (3.28) достаточно изменить порядок интегрирования в стоящем там интеграле и еще раз использовать теорему о мерах Карлесона.

и. В случае $\theta \neq \pi/2$ доказательство теоремы проводится аналогично с той разницей, что вместо контуров C_N нужно взять контуры $C_{N, \theta} = L_{N, \theta} \cup K_{N, \theta} \cup T_{\sigma, \theta}$ где $L_{N, \theta} = \{-R_N, -\delta\} \cup [\delta, R_N] \exp(i(\pi - \theta))$; $K_{N, \theta} = \{\lambda : |\lambda| = R_N, \arg \lambda \in (\pi - \theta, 2\pi - \theta)\}$; $T_{\sigma, \theta} = \{\lambda : |\lambda| = \delta, \arg \lambda \in (-\theta, 2\pi - \theta)\}$.

Список литературы: 1. Левин Б. Я. О базисах показательных функций в $L^2(-\pi, \pi)$ // Зап. мат. отд. физ.-мат. ф-та Харьк. гос. ун-та и Харьк. мат. об-ва (сер. 4), 27. — 1961. — С. 39—48. 2. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. — М.—Л.: Гостехтеориздат. — 1950. — С. 336. 3. Любарский Ю. И. Системы экспонент в пространствах функций, заданных на кривых. — Х., 1987. — С. 40. — (Препринт/АН УССР, ФТИНТ; № 677877—87). 4. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. — М.: Гостехтеориздат. — 1956. — 632 с. 5. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. — М.: Мир. 1984. — 469 с

Поступила в редколлегию 01.12.86

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ОБЛАСТЯХ С РАЗРЕЗОМ

Задача Неймана в случае области с гладкой границей сводится, как известно, к интегральному уравнению с помощью представления решения в виде потенциала простого слоя. В областях с разрезом, например, в $R^3\Sigma$, где Σ — кусок гладкой поверхности, это, как легко видеть, невозможно. Ниже будет показано, что в этом случае решение представимо в виде потенциала двойного слоя на Σ .

В работе автора [1] изучен вопрос о представимости решения внешней краевой задачи Неймана с гладкой границей в виде потенциала двойного слоя. Там показано, что если S — гладкая граница односвязной конечной области $\Omega \subset R^3$ и $f(x) \in L^2(S)$ ортогональна константе на S , то граничное интегродифференциальное уравнение вида

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial n(x)} \int_S \frac{\partial}{\partial n(y)} \frac{1}{|x + \varepsilon n(x) - y|} \varphi(y) ds = f(x), \quad x \in S \quad (1)$$

к которому сводится задача в случае представления решения в виде потенциала двойного слоя, разрешимо, и

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} K (K_1^{*2} - I)^{-1} f + \text{const.} \quad (2)$$

Здесь K, K_1 — интегральные операторы вида

$$(Ku)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{u(y) ds}{|x - y|}, \quad x \in S,$$

$$(K_1^* u)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{(y - x, n(x))}{|x - y|^3} u(y) ds, \quad x \in S.$$

Как известно [2], оператор $I + K_1^*$, а вместе с ним и $K_1^{*2} - I$ не имеет обратного, так как

$$((I + K_1^*)e)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial n(x)} (Ke)(x - \varepsilon n(x)) = 0$$

для $e(x)$, равной плотности электростатически равновесного распределения заряда на S . Под $(K_1^{*2} - I)^{-1}f$ в (2) понимается одно из решений уравнения $(K_1^{*2} - I)u = f$, разрешимо в силу условия $\int_S f(x) dx = 0$ с точностью до слагаемого $Ce(x)$.

В [1] показано, что уравнение (1) можно переписать в виде

$$\int_S (n(x), n(y)) \frac{(y - x, \nabla \varphi(y))}{|x - y|^3} ds + \int_S (n(x), \nabla \varphi(y)) \frac{\partial}{\partial n(y)} \frac{1}{|x - y|} ds = f(x). \quad (1')$$

Под $\nabla\varphi(y)$ следует понимать здесь $\nabla\hat{\varphi}(y)$ ($y \in S$), где $\hat{\varphi}(y)$ в окрестности S определяется равенством $\hat{\varphi}(y) = \varphi(\hat{y})$, где \hat{y} — точка, в которой пересекается с S опущенный на нее из y перпендикуляр.

В уравнении (1) на φ действует оператор $L_s = L_s^1 + L_s^2$ и L_s^1 представляет собой «суперпозицию» операторов ∇ и сингулярного интегрального оператора. Поэтому в область определения L_s входят все достаточно гладкие функции $\varphi(x)$. В частности, если $\varphi = K\mu$, $\mu \in L^2(S)$, то (1') перепишется в форме

$$L_s K\mu = 2\pi (K_1^{*2} - I)\mu = f.$$

Лемма 1. Сужение \tilde{L}_s оператора L_s на множество всех непрерывно дифференцируемых функций представляет собой положительно определенный оператор, причем

$$(\tilde{L}_s \varphi, \psi) = \pi \int_{R^3} (\nabla \hat{K}_1 \varphi, \nabla \hat{K}_1 \psi) d^3x, \quad (3)$$

где

$$(\hat{K}_1 \varphi)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \varphi(y) \frac{\partial}{\partial n(y)} \frac{1}{|x-y|} ds -$$

потенциал двойного слоя.

Равенство (3), а с ним и положительность оператора \tilde{L}_s , непосредственно вытекает из соотношения

$$\frac{1}{|x|} = \frac{1}{4\pi} \int_{R^3} \left(\nabla \frac{1}{|x-y|}, \nabla \frac{1}{|y|} \right) d^3y.$$

Достаточно только заметить, что для непрерывно дифференцируемой $\varphi(x)$ векторное поле $\nabla(\hat{K}_1 \varphi)(x)$ непрерывно во всем R^3 и для больших $|x|$ $|\nabla(\hat{K}_1 \varphi)(x)| = O\left(\frac{1}{|x|^3}\right)$.

Лемма 2. L_s — неотрицательный самосопряженный неограниченный оператор с дискретным спектром, причем нулевому собственному значению отвечает единственная собственная функция — константа.

Из равенства (3) вытекает, что L_s переводит в нуль только константу. Тем самым L_s , имеющий, как это видно из (2), вполне непрерывный обратный оператор в $H_1 \subset L^2(S)$ -ортогональном дополнении константы, является самосопряженным расширением \tilde{L}_s , полученным простым замыканием. Из неотрицательности \tilde{L}_s и равенства (2) вытекают, таким образом, все утверждения леммы.

Рассмотрим теперь уравнение (1) в случае, когда интеграл слева берется по множеству Σ , представляющему собой часть гладкой замкнутой поверхности S и открытому в топологии на S . Определим оператор L_Σ как самосопряженное положительное расширение оператора $\chi_\Sigma L_s \chi_\Sigma$ с областью определения, состоящей из функций на S вида $\chi_\Sigma \varphi$, где χ_Σ — характеристическая функция Σ , таких, что $\chi_\Sigma \varphi \in D_{L_s}$.

Теорема 1. Если $\Sigma \neq S$ и удовлетворяет перечисленным выше требованиям, то уравнение

$$(L_{\Sigma}\varphi)(x) = f(x), \quad x \in \Sigma,$$

имеет единственное решение при любой $f \in L^2(\Sigma)$.

Доказательство. Покажем прежде всего, что для $\varphi = \chi_{\Sigma}\varphi$ по области определения оператора L_{Σ}

$$(L_{\Sigma}\varphi\varphi) \geq K_{\Sigma}^2(\varphi, \varphi) > 0 \quad (4).$$

Действительно, поскольку $(L_{\Sigma}\varphi, \varphi) = (L_s\varphi, \varphi)$, $(L_{\Sigma}\varphi, \varphi) = (L_s\varphi_1, \varphi_1)$, где $\varphi_1(x) = \varphi(x) - \frac{1}{|S|} \int_S \varphi(x) ds$. Легко показать, что $\inf_{\|\varphi\|=1} \|\varphi_1\| = a > 0$.

В противном случае найдется слабо сходящаяся последовательность φ^n , $\|\varphi^n\| = 1$, такая, что $\varphi_1^n \rightarrow 0$. Но тогда φ^n будет сходиться к отличной от нуля константе на S , что абсурдно. Поэтому если λ_1 — наименьшее отличное от нуля собственное значение L_s , то $(L_s\varphi_1, \varphi_1) \geq \lambda_1 \|\varphi_1\|^2 \geq \lambda_1 a^2 \|\varphi\|^2$, что и доказывает неравенство (4).

Теперь доказательство теоремы завершается с помощью стандартного приема. А именно, построим гильбертово пространство H_{Σ} , представляющее собой замыкание области определения оператора L_{Σ} на норме $\|\cdot\|_1$, порожденной скалярным произведением $(\varphi, \psi)_1 = (L_{\Sigma}\varphi, \psi)$. В силу неравенства (4) оно обладает всеми необходимыми свойствами. Функционал $l(\varphi) = (f, \varphi)$ для произвольной $f \in L^2(\Sigma)$ допускает в H_{Σ} оценку

$$|(f, \varphi)| \leq \|f\| \|\varphi\| \leq \frac{\|f\|}{k_{\Sigma}} \|\varphi\|_1$$

и в силу теоремы Рисса $(f, \varphi) = l(\varphi) = (f, \varphi)_1 = (L_{\Sigma}f, \varphi)$. Поскольку H_{Σ} плотно в $L^2(\Sigma)$, то $L_{\Sigma}f = f$, что и доказывает теорему.

Рассмотрим теперь задачу Неймана для области $\Omega \setminus \Sigma$, где Ω — односвязная ограниченная область с гладкой границей S , а разрез Σ обладает перечисленными выше свойствами и находится на конечном расстоянии от S .

Справедлива следующая

Теорема 2. Задача Неймана

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega \setminus \Sigma, \quad \frac{\partial u(x)}{\partial n} = f_1(x), \quad x \in \Sigma, \quad \frac{du(x)}{\partial n} = f_2(x), \quad x \in S$$

при произвольной $f_1 \in z^2(\Sigma)$ и $f_2 \in L^2(S)$, $\int_S f_2(x) ds = 0$, имеет решение, представимое в виде суммы потенциалов двойного слоя по Σ и S .

Доказательство. Из сказанного ранее вытекает, что система уравнений

$$\begin{cases} (L_{\Sigma}\varphi_1)(x) + \frac{\partial}{\partial n} (\hat{K}_1^s\varphi_2)(x) = f_1(x), & x \in \Sigma, \\ \frac{\partial}{\partial n} (\hat{K}_1^s\varphi_1)(x) + (L_s\varphi_2)(x) = f_2(x), & x \in S \end{cases}$$

сводится к системе уравнений Фредгольма второго рода после обращения диагональной части матрицы, стоящей в левой части. Таким образом, оператор в левой части системы имеет дискретный неотрицательный спектр и для доказательства теоремы достаточно проверить, что однородная система имеет лишь тривиальное решение в пространстве векторов $\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$, ортогональных вектору $\begin{pmatrix} 0 \\ \text{const} \end{pmatrix}$. Но если φ_1^0, φ_2^0 — решение однородной системы, то функция $(K_1^\Sigma \varphi_1^0)(x) + (K_1^s \varphi_2^0)(x)$ равна нулю вне Ω и константе внутри Ω . В силу обратимости L_Σ сразу получаем, что $\varphi_1^0 = 0$, а в силу (2) $\varphi_2^0 = \text{const}$. Тем самым теорема полностью доказана.

Список литературы: 1. Щербина В. А. Граничные операторы и один вариант метода дискретных вихрей в задаче Неймана// Теория функций, функцион. анализ и их прил. — 1984. — Вып. 43. — С. 136—143. 2. Смирнов В. И. Курс Высшей математики, IV. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1951. — 804 с.

Поступила в редколлегию 16.09.85

УДК 517.98

Ф. ЛЕФФЛЕР, В. ТИММЕРМАНН

О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ НОРМАЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ НА МАКСИМАЛЬНЫХ Op^* -АЛГЕБРАХ

1. Известно, что пространство нормальных функционалов на алгебре всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве является ω^* -секвенциально полным. Более того, ω^* -последовательность Коши векторных состояний сходится к векторному состоянию. В [1] рассматриваются аналогичные вопросы для максимальной Op^* -алгебры неограниченных операторов. Оказывается, что первое свойство в этом случае не имеет места, а второе легко переносится. Открытым оставался вопрос о том, сходится ли σ_0 -последовательность Коши нормальных состояний к нормальному в случае, если максимальная Op^* -алгебра $L^+(D)$ в равномерной топологии неборнологична. В настоящей работе дается положительный ответ на этот вопрос для широкого класса пространств D , описываемых условием (+) (3.1).

Изложим вначале необходимые сведения из теории Op^* -алгебр.

2. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Через $B(H)$, $S_\infty(H)$, $S_1(H)$, $F(H)$ обозначим соответственно множество всех ограниченных, компактных, ядерных и конечномерных операторов в H . Пусть D — плотное, линейное подмножество в H . Максимальной Op^* -алгеброй над D , обозначаемой $L^+(D)$, называется множество всех (ограниченных и неограниченных) операторов в H , которые вместе со своими сопряженными оставляют D инвариантным. Топология t на D определяется полунормами $\varphi \rightarrow \|A\varphi\|$, где $A \in L^+(D)$. Алгебра $L^+(D)$ называется замкнутой, если $D = \bigcap D(\bar{A})$ или, что равносильно, если

$D[t]$ полно. В $L^+(D)$ будем рассматривать так называемую равномерную топологию τ_D , задающуюся полунормами

$$\tau_D : A \rightarrow p_V(A) = \sup_{\varphi, \psi \in V} |(\varphi, A\psi)|,$$

где V пробегает семейство всех l -ограниченных подмножеств.

3. Пространство D называется областью Фреше, если существует последовательность операторов A_k из $L^+(D)$ такая, что

$$I \leq A_k, A_k^2 \leq A_{k+1}, D = \bigcap_{k \geq 1} D(A_k) \text{ и } D[t] \text{ — полно.}$$

3.1. Мы будем рассматривать класс областей Фреше D , удовлетворяющих следующему условию (+):

Существует последовательность взаимно ортогональных, одномерных проекторов P_k из $L^+(D)$ таких, что

$$(+)\ a) \sum_{k \in N} P_k = I, \ b) \sum_{k \in M} P_k = P_M \in L^+(D) \text{ для всех } M \subset N.$$

Этот класс содержит все области Фреше с безусловным базисом ([2], с.210) и, в частности, все строго коммутирующие области Фреше. Уже в последнем случае алгебра $L^*(D)[\tau_D]$ не обязательно борнологична ([3], п. 4). Таким образом, основной результат настоящей работы является усилением предложения 3.12 из [1], где борнологичность алгебры $L^+(D)[\tau_D]$ играла существенную роль.

4. Мы часто будем параллельно рассматривать ограниченный оператор $A \in L^+(D)$ и его замыкание $\bar{A} \in B(H)$, обозначая их одной и той же буквой A .

Ниже нам понадобятся следующие множества:

$$F(D) = \{T \in L^+(D), \dim TD < \infty\},$$

$$S_1(D) = \{T \in L^+(D), \forall A, B \in L^+(D) : ATB \in S_1(H)\}.$$

Состоянием f на $L^+(D)$ называется любой нормированный ($f(I) = 1$), положительный ($f(A) \geq 0$ для всех $A \geq 0$), линейный функционал. Под $A \geq 0$ понимаем, что $(A\varphi, \varphi) \geq 0$ для всех $\varphi \in D$. Линейный функционал f на $L^+(D)$ называется нормальным, если существует оператор $C \in S_1(D)$ такой, что $f(A) = \text{Tr } AC$ для всех $A \in L^+(D)$. Нормальные функционалы τ_D — непрерывны [4].

Пусть $L^+(D)'$ — множество всех линейных, τ_D — непрерывных функционалов на $L^+(D)$ и $\sigma_0 = \sigma(L^+(D)', L^+(D))$ обозначает w^* -топологию на $L^+(D)'$.

Всякий нормальный функционал на $L^+(D)$ можно рассматривать как нормальный функционал на $B(H)$ в силу очевидного включения $S_1(D) \subset S_1(H)$. Наоборот, если $C \in S_1(D)$ и $f_1(A) = \text{Tr } AC$ для всех $A \in B(H)$, то f_1 можно рассматривать как нормальный функционал на $L^+(D)$. Поэтому если нормальные функционалы f на $L^+(D)$ и f_1 на $B(H)$ порождаются одним оператором $C \in S_1(D)$, будем их обозначать одним символом f .

Напомним, что если нормальный функционал f порождается оператором $C \in S_1(H)$, то $\|f\| = \|C\|_1 = \text{Tr}(C^*C)^{1/2}$.

Нам понадобится один общий результат.

5. Лемма. Пусть (g_n) — последовательность нормальных состояний на $B(H)$ и пусть существует такое нормальное состояние g на $B(H)$, что $\forall A \in S_\infty(H) : \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(A) = g(A)$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(A) = g(A)$ для всех $A \in B(H)$.

Доказательство. Покажем сначала, что

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists P = P^2 = P^* \in F(H)) (\forall n \geq 1) (g_n(I - P) < \varepsilon). \quad (1)$$

Допустим противное, т. е. существование $\varepsilon_0 > 0$ такого, что для любого проектора $P \in F(H)$ найдется $n = n(P)$, для которого выполняется $g_n(I - P) \geq \varepsilon_0$. Выберем возрастающую последовательность (P_k) конечномерных проекторов, для которых $\sup_{k \geq 1} P_k = I$. Это возможно

в силу сепарабельности H . По предположению, существует такая подпоследовательность (n_k) , что $g_{n_k}(I - P_k) \geq \varepsilon_0$. С другой стороны, g — нормален и тогда имеем $\lim_{k \rightarrow \infty} g(I - P_k) = 0$. Подберем k_0 так, что

$g(I - P_{k_0}) < \frac{\varepsilon_0}{2}$. Для всех $k \geq k_0$ в силу положительности g_n имеем $\varepsilon_0 \leq g_{n_k}(I - P_k) \leq g_{n_k}(I - P_{k_0})$. По условию выполняется $\lim_{k \rightarrow \infty} g_{n_k} \times (I - P_{k_0}) = g(I - P_{k_0})$ (именно здесь использовано, что g — состояние). Но тогда получаем противоречие: $\varepsilon_0 \leq g(I - P_{k_0}) < \frac{\varepsilon_0}{2}$. Это доказывает (1).

По теореме 3.51 из [5] с учетом (1) множество (g_n) слабокомпактно в том смысле, что существуют подпоследовательность (g_{n_k}) и нормальное состояние h на $B(H)$, для которых верно $\lim_{k \rightarrow \infty} g_{n_k}(A) = h(A)$ для всех $A \in B(H)$. Заметим, что $h = g$, так как их значения на $S_\infty(H)$ совпадают.

Рассмотрим последовательность $(g_n(A))$ для произвольного, но фиксированного оператора $A \in B(H)$. Допустим, что $(g_n(A))$ не сходится. Тогда существует подпоследовательность (n_s) такая, что $\lim_{s \rightarrow \infty} g_{n_s}(A) = a \neq g(A)$. Для последовательности (g_{n_s}) выполняется условие леммы, что согласно первой части доказательства приводит к противоречию. Значит, на самом деле $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(A) = g(A)$ для всех $A \in B(H)$.

5.1. Следствие. Пусть для последовательности положительных, нормальных функционалов (g_n) на $B(H)$ существует положительный, нормальный функционал g такой, что выполняется

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(A) = g(A) \quad (A \in S_\infty(H)) \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(I) = g(I).$$

Тогда для любого $A \in B(H)$ $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(A) = g(A)$.

Доказательство. В случае $g(I) = 0$, т. е. $g \equiv 0$, имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(I) = 0$, что и требуется. Если же $g(I) > 0$, то без ограничения общности можно считать, что $g_n(I) > 0$ ($n \geq 1$). Но тогда $\frac{g_n}{g_n(I)}$ и $\frac{g}{g(I)}$ удовлетворяют условиям леммы 5, откуда $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(A) = g(A)$ ($A \in B(H)$).

Установим теперь основной результат этой работы.

6. Теорема. Если D удовлетворяет условию (+), то множество N_0 нормальных состояний на $L^+(D)$ является σ_0 -секвенциально полным.

Доказательство. Пусть $(f_n) \subset N_0$ — последовательность Коши в σ_0 -топологии, $f(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(A)$ ($A \in L^+(D)$). Нужно показать, что положительный функционал f нормален.

Обозначим через K замыкание по норме $B(H)$ алгебры всех ограниченных операторов из $L^+(D)$. Тогда на C^* -алгебре K существует состояние g , что для всех $A \in K$ верно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Tr } AC_n = g(A), \text{ где } C_n \in S_1(D), C_n \geq 0, \text{Tr } C_n = 1.$$

Продолжение g до состояния на $B(H)$ также будем обозначать через g . Существует разложение $g = g_1 + g_2$, где $0 \leq g_1$ — нормален, $0 \leq g_2$ — сингулярен ($\forall A \in S_\infty(D) : g_2(A) = 0$).

Рассмотрим теперь последовательность $h_n = f_n - g_1 - g_2$ ($n \geq 1$) функционалов на $B(H)$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(A) = 0$ ($A \in K$). (2)

Основным моментом рассуждения является доказательство того факта, что $g = g_1$. Для этого воспользуемся условием (+) и известной леммой Филлипса.

Определим последовательность функций множества d_n на подмножествах N по правилу:

$$d_n(M) = h_n\left(\sum_{m \in M} P_m\right) = h_n(P_M) \quad (M \subset N).$$

Легко видеть, что d_n — конечно-аддитивные функции множества с равномерно ограниченным изменением. Кроме того, в силу условия (+) и (2) выполняется $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n(M) = 0$ для всех $M \subset N$. По лемме Филлипса имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in N} |d_n(\{k\})| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in N} |h_n(P_k)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in N} |f_n(P_k) - g_1(P_k)| = 0.$$

Но тогда

$$\begin{aligned} |f_n(I) - g_1(I)| &= |(f_n - g_1)\left(\sum_{k \geq 1} P_k\right)| = \\ &= \left|\sum_{k \geq 1} [f_n(P_k) - g_1(P_k)]\right| \leq \sum_{k \geq 1} |f_n(P_k) - g_1(P_k)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Отсюда, так как $f_n(I) = 1$, получаем $g_1(I) = 1$ и, значит, $g = g_1$.

Теперь можно применить лемму 5 для g и (f_n) , учитывая, что $S_\infty(H) \subset K$. Она дает $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(A) = g(A)$ ($A \in B(H)$).

По теореме 1 из [6] имеет место соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - g\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|C_n - C\|_1 = 0, \text{ где } C \in S_1(H), C \geq 0, \operatorname{Tr} C = 1$$

и $g(A) = \operatorname{Tr} AC$ для всех $A \in B(H)$.

Проверим, что на самом деле $C \in S_1(D)$. Для этого воспользуемся тем фактом, что f представим в виде $f(A) = \operatorname{Tr} AR + h(A)$, $A \in L^+(D)$, где $R \in S_1(D)$, $R \geq 0$ и $h(A) = 0$ ($\forall A \in F(D)$) (см. [4]). Заметим, что $\operatorname{Tr} AR = \operatorname{Tr} AC$ для всех $A \in F(D)$. В таком случае из плотности D в H вытекает, что $C = R \in S_1(D)$.

Зафиксируем $k \in N$. Рассмотрим на $L^+(D)$ положительные, нормальные функционалы $f_{n,k}$, определяемые соотношениями $f_{n,k}(A) = f_n \times (A_k A A_k) = \operatorname{Tr} AC_{n,k}$ ($n \geq 1$), где $C_{n,k} = A_k C_n A_k \geq 0$, $C_{n,k} \in S_1(D)$. Ясно, что $(f_{n,k})_n$ являются σ_0 -последовательностью Коши. Из соотношений $f_{n,k}(I) = f_n(A_k^2) = a_n \geq 1$ и того факта, что (a_n) последовательность Коши, получаем $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(A_k^2) = a \geq 1$. К последовательности

$\left(\frac{f_{n,k}}{a_n}\right)_n$ применимы рассуждения первой части доказательства теоремы. Это значит, существует нормальное состояние g^0 , для которого $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n,k}(A)}{a_n} = g^0(A)$, $A \in B(H)$. Еще раз применяя стандартные рассуждения о совпадении нормальных функционалов, имеем

$$g^0(A) = \frac{g_k(A)}{a} = \frac{\operatorname{Tr}(A_k C A_k) A}{a}$$

или

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{n,k}(A) = g_k(A) \quad (\forall A \in B(H)).$$

Но тогда снова из теоремы 1 [6] вытекает

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_{n,k} - g_k\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_k C_n A_k - A_k C A_k\|_1 = 0.$$

Пользуясь произвольностью k и тем, что D — область Фреше, для всех $A, B \in L^+(D)$ получаем $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A(C_n - C)B\|_1 = 0$.

Зафиксируем произвольный элемент $A \in L^+(D)$. Покажем, что $f(A) = g(A)$. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем n таким образом, что выполняется $|f(A) - f_n(A)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ и $\|A(C_n - C)\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда:

$$\begin{aligned} |f(A) - g(A)| &\leq |f(A) - f_n(A)| + |f_n(A) - g(A)| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + |\operatorname{Tr} A(C_n - C)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \|A(C_n - C)\|_1 \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $f \equiv g$ — нормальное состояние на $L^+(D)$ и тем самым теорема доказана.

6.1. Следствие. Если D удовлетворяет условию (+), то множество положительных, нормальных функционалов на $L^+(D)$ является σ_0 -секвенциально полным.

Доказательство аналогично доказательству следствия 5.1.

Сформулируем теорему 6 в терминах, близких к [6].

6.2. Назовем последовательность нормальных функционалов (f_n) на $L^+(D)$, равномерно сходящейся к нормальному функционалу f , если для $f_{n, A, B}(X) = \text{Tr } AC_nBX$ и $f_{A, B}(X) = \text{Tr } ACBX$ ($X \in L^+(D)$) выполняется $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_{n, A, B} - f_{A, B}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|AC_nB - ACB\|_1 = 0$.

Теорема 6 равносильна следующей теореме.

6.3. **Теорема.** Пусть D удовлетворяет условию (+). Тогда любая σ_0 -сходящаяся последовательность нормальных состояний на $L^+(D)$ сходится равномерно к некоторому нормальному состоянию.

7. Наконец заметим, что факт принадлежности оператора C к $S_1(D)$ из доказательства теоремы 6 не зависит от условия (+). А именно справедлива следующая лемма:

7.1. **Лемма.** Пусть $(C_n) \subset S_1(D)$ и $L^+(D)$ замкнута. Если $\|AC_nB\|_1 \leq q_{A, B}$ для всех $A, B \in L^+(D)$ и (C_n) является слабой последовательностью Коши на D , то существует $C \in S_1(D)$, такой что (C_n) слабо сходится к C .

Доказательство. Из условий непосредственно вытекает существование таких C и $T_{A, B}$ из $B(H)$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (C_n\varphi, \psi) = (C\varphi, \psi)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} (AC_nB\varphi, \psi) = (T_{A, B}\varphi, \psi)$; $\varphi, \psi \in H$. Кроме того, для всех $\varphi \in D$, $\psi \in D(A^*)$ верно $\lim_{n \rightarrow \infty} (C_nB\varphi, A^*\psi) = (CB\varphi, A^*\psi)$. Это значит $(T_{A, B}\varphi, \psi) = (CB\varphi, A^*\psi)$. Отсюда $CB\varphi \in D(A^{**}) = D(\bar{A})$. В силу произвольности $A \in L^+(D)$ и замкнутости $L^+(D)$ получаем $CB\varphi \in D$. Но тогда $T_{A, B} = ACB$ и $ACB \in S_1(H)$. Тем самым $C \in S_1(D)$, что и требуется.

Список литературы: 1. Löffler F., Timmermann W. On the structure of the state space of maximal O_p^* -algebras // Prepr.—Dubna, 1985, E5-85—727.—18 p. 2. Lassner G., Timmermann W. Classifications of domains of operator algebras // Rep. math. physics.—1976.—9.—P. 205—217. 3. Schmüdgen K. On topologization of unbounded operator algebras // Rep. math. physics.—1980.—17.—P. 359—371. 4. Schmüdgen K. On trace representation of linear functionals on unbounded operator algebras // Comm. Math. Phys.—1978.—63.—P. 113—130. 5. Сарымсаков Т. А. Введение в квантовую теорию вероятностей.—Ташкент: Фан, 1985.—184 с. 6. Dell'Antonio G. F. On the limits of sequences of normal states // Comm. Pure and Applied Math.—1967.—20.—P. 413—429.

Поступила в редколлегию 03.02.86

УДК 517.53

В. С. БОЯЧУК

ПРОСТОЕ ПОСТРОЕНИЕ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ С ЗАДАНЫМ ИНДИКАТОРОМ ОТНОСИТЕЛЬНО ЗАДАННОГО ЦЕЛОГО УТОЧНЕННОГО ПОРЯДКА

Задача, сформулированная в названии заметки, впервые решена В. Н. Логвиненко в [1]. Мы приведем более простое решение этой задачи другим, чем использованный в [1], методом, который, возможно, может быть использован для решения иных задач.

Пусть $\rho(r)$ — уточненный порядок,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \rho, \quad \rho \in N,$$

и $h(\theta)$ — ρ -тригонометрически выпуклая 2π -периодическая функция. Для построения целой функции с индикатором $h(\theta)$ относительно уточненного порядка $\rho(r)$ достаточно построить ([2], с. 156) не более чем счетное множество комплексных чисел $\{a_n\}$, удовлетворяющее при заданном комплексном числе $a \neq 0$ условиям

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{L(r)} \sum_{|a_n| \leq r} a_n^{-\rho} = a, \quad (1)$$

$$n(r) = o(r^{\rho(r)}), \quad r \rightarrow \infty, \quad (2)$$

где $L(r) = r^{\rho(r)-\rho}$, а $n(r)$ — считающая функция множества $\{a_n\}$.

Пусть $r_n = 2^n$, $n = 1, 2, \dots$. В силу известных свойств уточненного порядка:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{L(r)}{L(vr)} = 1 \quad (3)$$

равномерно относительно v , $0 < \alpha \leq v \leq \beta < \infty$, и

$$\frac{r^{\rho(r)}}{t^{\rho(t)}} \leq \left(\frac{r}{t}\right)^\lambda, \quad (4)$$

где $0 < \lambda < \rho$, $t \geq r \geq r_0(\lambda)$. Положим $L(r_0) = 0$ и определим последовательность целых чисел q_n и последовательность неотрицательных чисел $p_n < r_n^{-\rho}$ из условий $L(r_n) - L(r_{n-1}) = q_n r_n^{-\rho} + p_n$, $n = 1, 2, \dots$ (5). Для каждого $n \in N$ положим

$$b_{n1} = r_n \exp \left\{ \frac{\pi i}{2\rho} (\operatorname{sign} q_n - 1) \right\},$$

если $q_n \neq 0$, и

$$b_{n2} = r_n \exp \left\{ \frac{i}{\rho} \arccos \frac{1}{2} p_n r_n^\rho \right\}, \quad b_{n3} = \bar{b}_{n2},$$

если $p_n \neq 0$. Припишем каждой точке b_{n1} соответствующую кратность $|q_n|$. Тогда, складывая равенства (5) по n , $1 \leq n \leq k$, и учитывая выбор точек b_{nm} , получим

$$\sum_{|b_{nm}| \leq r_k} b_{nm}^{-\rho} = L(r_k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Занумеровав точки b_{nm} (с учетом их кратности) в порядке неубывания их модулей, получим не более чем счетное множество $\{b_n\}$. Из (3) и (6) видно, что множество $\{b_n\}$ удовлетворяет условию (1) при $a = 1$.

Пусть $n_1(r)$ — считающая функция этого множества. Используя (3) — (5) и учитывая монотонность $r^{\rho(r)}$, получим

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{n_1(r)}{r^{\rho(r)}} &= \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{n_1(r_k)}{r_k^{\rho(r_k)}} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^k (|q_n| + 2)}{r_k^{\rho(r_k)}} \leq \\ &\leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^k (r_n^{\rho} |L(r_n) - L(r_{n-1})| + 3)}{r_k^{\rho(r_k)}} \triangleleft \\ &\leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^k r_n^{\rho(r_n)} \left| 1 - \frac{L(r_{n-1})}{L(r_n)} \right|}{r_k^{\rho(r_k)}} + 3 \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{r_k^{\rho(r_k)}} = \\ &= \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \frac{r_n^{\rho(r_n)}}{r_k^{\rho(r_k)}} \left| 1 - \frac{L(r_{n-1})}{L(r_n)} \right| + 3 \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\log_2 r_k}{r_k^{\rho(r_k)}} \triangleleft \\ &\triangleleft \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k 2^{-\lambda(k-n)} \left| 1 - \frac{L(r_{n-1})}{L(r_n)} \right| = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, множество $\{b_n\}$ также удовлетворяет условию (2). Наконец, учитывая (3) и (4), легко видеть, что множество $\{a^{-1/\rho} b_n\}$ — искомое.

Список литературы: 1. Логвиненко В. Н. Построение целой функции с заданным индикатором при заданном целом уточненном порядке // Функцион. анализ и его прил. — 1972. — 6, вып. 4. — С. 87—88. 2. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. — М.: ГИТТЛ, 1956. — 632 с.

Поступила в редколлегию 06.04.86

СОДЕРЖАНИЕ

Анощенко О. А. О разложении по собственным функциям уравнения Шредингера с потенциалом, имеющим периодическую асимптотику	3
Арлинский Ю. М., Цекановский Э. Р. Квазисамосопряженные сжимающие расширения эрмитова сжатия	9
Ахизер Т. А. Итерационные процессы, связанные с нерастягивающими отображениями	17
Белицкий Г. Р. Конечная определенность ростков C^∞ -дiffeоморфизмов . .	20
Болотников В. А. Описание решений вырожденной проблемы моментов на оси и полуоси	25
Гольдберг А. А., Соколовская О. П. О росте по лучу субгармонической функции с массой, распределенной на отрицательной полуоси	31
Бу Куок Фонг, Любич Ю. И. Спектральный критерий асимптотической почти периодичности для равномерно непрерывных представлений абелевых полугрупп	38
Голодец В. Я., Даниленко А. И. Эргодические действия абелевых групп и свойства их совместных действий	43
Гришин А. Ф., Содин М. Л. Рост по лучу, распределение корней по аргументам целой функции конечного порядка и одна теорема единственности . .	47
Ковалишина И. В. Теория кратной j -элементарной матрицы-функции с полюсом на границе единичного круга	62
Логвиненко В. Н. О целых функциях экспоненциального типа, медленно растущих вдоль вещественной гиперплоскости	74
Петров А. М. К спектральной теории ограниченных операторов	77
Тютюников Р. Б. Сохранение сходимости траекторий при малых возмущениях гиперболических отображений многообразий с краем	82
Улановский А. М. Об однозначной определенности сверток мер в R^m , $m \geq 2$, сужениями на множества	86
Фонф В. П. О борелевском типе множества сходимости последовательности линейных ограниченных операторов в банаховом пространстве	90
Хейфец А. Я. Равенство Парсеваля в абстрактной задаче интерполяции и соединении открытых систем. II	98
Чистяков Г. П. Об устойчивости для теоремы И. В. Островского — Р. Купенса на группах	103
Чуешов И. Д. Свойства аттрактора в задаче о нелинейных колебаниях бесконечной панели	108
Любарский Ю. И. Аналоги пространств В. И. Смирнова для нецелых показателей	115
Шербина В. А. Метод граничных интегральных уравнений второй краевой задачи в областях с разрезом	128
Леффлер Ф., Тиммерман В. О последовательностях нормальных состояний на максимальных O_p^* -алгебрах	131
Бойчук В. С. Простое построение целой функции с заданным индикатором относительно заданного целого уточненного порядка	136

УДК 517.9 + 517.4

О разложении по собственным функциям уравнения Шредингера с потенциалом, имеющим периодическую асимптотику / О. А. Анощенко // Теория функций, функций, анализ и их прил. — 1988. — Вып. 50. — С. 3—8.

Доказывается теорема о разложении по собственным функциям одномерного оператора Шредингера $L = -d^2/dx^2 + q(x)$ ($-\infty < x < \infty$) с потенциалом $q(x)$, удовлетворяющим условию

$$\int_0^{+\infty} (1+x^2) |q(x) - q_{\pm}(x)| dx < \infty,$$

где $q_{\pm}(x)$ — периодические функции.

Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.984.7

Квазисамосопряженные сжимающие расширения эрмитова сжатия / Ю. М. Арлинский, Э. Р. Цекановский // Теория функций, функций, анализ и их прил. — 1988. — Вып. 50. — С. 9—16.

Вводится новый класс $C(\alpha)$ квазисамосопряженных сжимающих расширений эрмитова сжатия. Устанавливается параметрическое представление операторов этого класса и дается описание всех канонических резольвент.

Библиогр.: 8 назв.

УДК 517.938

Итерационные процессы, связанные с нерастягивающими отображениями / Т. А. Ахизер // Теория функций, функций, анализ и их прил. — 1988. — Вып. 50. — С. 17—20.

В работе доказана теорема: если V — нерастягивающее отображение выпуклого компакта X в банаховом пространстве в себя, то итерационная последовательность $x_{n+1} = \alpha x_n + (1 - \alpha)Vx_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$; $0 < \alpha < 1$) при любом начальном условии $x_0 \in X$ сходится к неподвижной точке отображения V , причем имеет место оценка

$$\|x_{n+1} - x_n\| = O\left(\frac{1}{\ln n}\right).$$

УДК 517

Конечная определенность ростков C^∞ -диффеоморфизмов / Г. Р. Белицкий // Теория функций, функций, анализ и их прил. — 1988. — Вып. 50. — С. 20—24.

Получен критерий гладкой конечной определенности ростков C^∞ -диффеоморфизмов.

Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.5

Описание решений вырожденной проблемы моментов на оси и полуоси / В. А. Бологников // Теория функций, функций, анализ и их прил. — 1988. — Вып. 50. — С. 25—31.

Построен пошаговый алгоритм Шура для вырожденных матричных проблем моментов на оси и на полуоси, дающий полное описание их решений.

Библиогр.: 5 назв.

УДК 517.53

О росте по лучу субгармонической функции с массой, распределенной на отрицательной полуоси / А. А. Гольдберг, О. П. Соколовская // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1988.— Вып. 50.— С. 31—38.

Пусть U — субгармоническая в S функция с массой Рисса μ , распределенной на отрицательной полуоси без некоторой окрестности нуля, ρ и λ — ее порядок и нижний порядок, $B(r, U)$ — максимум $U(z)$ при $|z| = r$. Получены оценки меры множеств значений $r \geq 0$, для которых выполняются некоторые неравенства. Следующий результат типичен. Пусть $E = \{r : u(re^{i\theta}) - \cos \theta \sigma B \leq (r, U) > 0\}$. Если $\rho < \sigma < 1$, $|\Theta| = \pi$, то нижняя логарифмическая плотность множества E не меньше $1 - \rho/\sigma$. Если $\lambda < \sigma < 1$, $|\Theta| \leq \pi$, то верхняя логарифмическая плотность множества E не меньше $1 - \lambda/\sigma$.

Библиогр.: 6 назв.

УДК 513.88

Спектральный критерий асимптотический почти периодичности для равномерных непрерывных представлений абелевых полугрупп / Ву Куок Фонг, Ю. И. Лубич // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1988.— Вып. 50 — С. 38—43.

Пусть унитарный асимптотический спектр представления T не более чем счетен. Тогда для асимптотической почти периодичности необходимо и достаточно, чтобы собственные подпространства представлений T , T^* , отвечающие унитарным весам, находились в двойственности.

Библиогр.: 7 назв.

УДК 519 + 517.46

Эргодические действия абелевых групп и свойства их совместных действий / В. Я. Голодец, А. И. Даниленко // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1988.— Вып. 50.— С. 43—47.

Вводится понятие совместного действия. Изучается совместное действие двух эргодинамических, сохраняющих меру действий произвольной локально-компактной абелевой группы на пространствах Лебега. Доказывается, что оно будет эргодическим с чисто точечным спектром. Вычислен спектр совместного действия. При доказательстве использована индивидуальная эргодическая теорема Эмерсона—Гринлифа для аменабельных групп. Результаты статьи обобщают известную теорему Т. Хамачи и М. Осикавы для действий группы вещественных чисел.

Библиогр.: 6 назв.

УДК 517.53

Рост по лучу, распределение корней по аргументам целой функции конечного порядка и одна теорема единственности / А. Ф. Гришин, М. Л. Содин // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1988.— Вып. 50.— С. 47—61.

Для целой функции f нормального типа при порядке $\rho > 0$ исследуется асимптотика величины

$$I_f(R, \varphi) = \int_1^R \frac{\ln |f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho+1}} dr$$

и ее связь с распределением по аргументам корней функции f .

Библиогр.: 8 назв.

УДК 517.5

Теория кратной j -элементарной матрицы-функции с полюсом на границе единичного круга / И. В. Ковалишина // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1988.— Вып. 50.— С. 62—74.

В статье рассматривается теория j -элементарной в единичном круге матрицы-функции $\omega(\xi)$ с кратным полюсом в точке ξ на границе единичного круга $|\xi_0| = 1$. Определяется структура $\omega(\xi)$, формируются условия отщепляемости $\omega(\xi)$ от произвольной j -растягивающей в $|\xi| < 1$ матрицы-функции $W(\xi)$, доказывается теорема о параметризации j -элементарной матрицы-функции $\omega(\xi)$ полного ранга, найдено разложение $\omega(\xi)$ полного ранга в произведение параметризованных j -элементарных множителей полного ранга с простыми полюсами в точке ξ_0 .

Библиогр.: 5 назв.

УДК 517.55

О целых функциях экспоненциального типа, медленно растущих вдоль вещественной гиперплоскости / В. Н. Логвиненко // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1988.— Вып. 50.— С. 74—76.

В работе изучаются целые функции $f(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, экспоненциального типа не выше σ , ограниченные на подмножествах E вещественной гиперплоскости. Известно, что если E относительно плотно по мере Лебега или является ε -сетью в \mathbb{R}^n , то такие $f(z)$ ограничены на всем \mathbb{R}^n (для ε -сети при достаточно малых σ). В работе показывается, что если E в некотором смысле близко либо к относительно плотному подмножеству \mathbb{R}^n , либо к ε -сети, то $f(z)$ не может быстро расти вдоль \mathbb{R}^n . Аналогичные оценки установлены для интегральных метрик.

Библиогр.: 5 назв.

УДК 517.432

К спектральной теории ограниченных операторов / А. М. Петров // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1988.— Вып. 50.— С. 77—82.

В статье построена функциональная модель непрерывного оператора, характеристическая функция которого ограничена в единичном круге. Определены и вычислены спектральные проекторы абсолютно непрерывного спектра.

Библиогр.: 6 назв.

УДК 519.6

Сохранение сходимости траекторий при малых возмущениях гиперболических отображений многообразий с краем / Р. Б. Тютюников // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1988.— Вып. 50.— С. 82—86.

Доказана теорема о сохранении сходимости траекторий при малых возмущениях гиперболических отображений, обладающих строгой функцией Ляпунова. Этот результат применяется к некоторым моделям популяционной генетики.

Библиогр.: 5 назв.

УДК 519.21.5

Об однозначной определенности сверток мер в \mathbb{R}^m , $m \geq 2$, сужениями на множества / А. М. Улановский // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1988.— Вып. 50.— С. 86—90.

Указаны ограничения на комплекснозначную меру μ в пространстве \mathbb{R}^m , $m \geq 2$, при которых n -кратная свертка μ^{n*} , $n \geq 2$, однозначно определяется своими значениями на любом подпространстве $x_1 < r$, $r \in \mathbb{R}$.

Библиогр.: 6 назв.

УДК 513.82

О борелевском типе множества сходимости последовательности линейных ограниченных операторов в банаховом пространстве / В. П. Ф о н ф // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1988.— Вып. 50.—С. 90—98.

В работе изучается связь между борелевским типом множества сходимости последовательности линейных ограниченных операторов, действующих из одного банахова пространства в другое, и линейно-топологическими свойствами этого последнего пространства.

Библиогр.: 7 назв.

УДК 517.54 + 519.98

Равенство Парсеваля в абстрактной задаче интерполяции и соединение открытых систем. II / А. Я. Х е й ф е ц // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1988.— Вып. 50.—С. 98—103.

Конструкции, описанные в § 1, применяются к изучению абстрактной задачи интерполяции. Общее решение задачи является характеристической функцией операторного узла, получающегося замыканием фиксированного узла посредством произвольного узла с определенными внешними пространствами. Полное интегральное представление неотрицательной квадратичной формы получается применением равенства Парсеваля, рассмотренного в § 1.

УДК 519.2

Об устойчивости для теоремы И. В. Островского — Р. Куппенса на группах / Г. П. Ч и с т я к о в // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1988.— Вып. 50.—С. 103—108.

Пусть X — локально-компактная сепарабельная метрическая абелева группа. Получены неулучшаемые оценки устойчивости разложений обобщенного распределения Пуассона $e(F)$ на X , где F — вполне конечная мера на X такая, что ее степени F^n относительно свертки попарно сингулярны для различных натуральных n .

Библиогр.: 7 назв.

УДК 517.9

Свойства аттрактора в задаче о нелинейных колебаниях бесконечной панели / И. Д. Ч у е ш о в // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1988.— Вып. 50.—С. 108—115.

В задаче о нелинейных колебаниях бесконечной панели в сверхзвуковом потоке газа доказывается существование максимального аттрактора и конечность его фрактальной размерности. Величина размерности оценивается сверху через параметры задачи. Указываются случаи, в которых аттрактор имеет регулярную структуру.

Библиогр.: 8 назв.

УДК 517.5

Аналоги пространств В. И. Смирнова для нецелых показателей / Ю. И. Л ю - б а р с к и й // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1988.— Вып. 50.—С. 115—128.

Исследованы вопросы полноты и минимальности систем экспонент на кривых. Рассмотрены аналоги классических пространств Харди.

Библиогр.: 5 назв.

УДК 517.95

Метод граничных интегральных уравнений для второй краевой задачи в областях с разрезом / В. А. Щербина // Теория функций, функциональный анализ и их прил.— 1988.— Вып. 50.— С. 128—131.

Решение второй краевой задачи в R^3 с разрезом сводится к интегро-дифференциальному уравнению, для решения которого удается привлечь операторные методы теории расширений симметричных операторов. В работе доказывается ограниченная разрешимость соответствующей задачи операторного уравнения.

Библиогр.: 2 назв.

УДК 517.98

О последовательностях нормальных состояний на максимальных Op^* -алгебрах / Ф. Леффлер, В. Тиммерманн // Теория функций, функциональный анализ и их прил.— 1988.— Вып. 50.— С. 131—136.

Показано, что последовательность (f_n) нормальных состояний на максимальных Op^* -алгебрах $L^+(D)$ сходится к нормальному состоянию, если $f_n(A)$ — последовательность Коши для всех $A \in L^+(D)$, а D удовлетворяет некоторому дополнительному условию.

Библиогр.: 6 назв.

УДК 517. 53

Простое построение целой функции с заданным индикатором относительно заданного целого уточненного порядка / В. С. Бойчук // Теория функций, функциональный анализ и их прил.— 1988.— Вып. 50.— С. 136—138.

Дается чрезвычайно простое доказательство важной теоремы В. Н. Логвиненко о существовании целой функции с заданным индикатором.

Библиогр.: 2 назв.

1 р. 40 к.

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

РЕСПУБЛИКАНСКИЙ
МЕЖДУВЕДОМСТВЕННЫЙ
НАУЧНЫЙ
СБОРНИК

Основан в 1965г.

ISSN 0321-4427. Теория функций, функционал. анализ и их прил. 1988. Вып. 50.
1-144.

