УДК 517.9

Д. Ш. ЛУНДИНА

ТОЧНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ АСИМПТОТИЧЕСКИМИ РАЗЛОЖЕНИЯМИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ И ГЛАДКОСТЬЮ ПОТЕНЦИАЛА

В статье рассматриваются краевые задачи, порождаемые на интервале $(a,\ b)$ одним и тем же уравнением Штурма — Лиувилля $-y''+q(x)y=\mu y$ (1) с комплекснозначным потенциалом $q(x)\in\in L_2(a,\ b)$ и всевозможными регулярными граничными условиями

$$\begin{aligned} &a_{11}y(a)+a_{12}y'(a)+a_{13}y(b)+a_{14}y'(b)=0;\\ &a_{21}y(a)+a_{22}y'(a)+a_{23}y(b)+a_{24}y'(b)=0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Обозначим через $I_{\alpha\beta}=a_{1\alpha}a_{2\beta}-a_{2\alpha}a_{1\beta}$ определители, составленные из α-го и β-го столбцов матрицы коэффициентов граничных условий. Напомним, что граничные условия (2) называются регулярными в следующих трех случаях:

1) $I_{24}\neq 0$ 2) $I_{24}=0,\ I_{14}+I_{32}\neq 0$;

3) $I_{24}=I_{14}=I_{12}=I_{34}=0,\ I_{13}\neq 0$.

Для собственных значений μ_k регулярных краевых задач давно известны асимптотические разложения по отрицательным степеням k тем более точные, чем больше производных имеет потенциал $q(x)$. С другой стороны, из результатов, полученных при решении обратных задач, следует, что в самосопряженном случае из существования асимптотических разложений для собственных значений двух краевых задач с разделенными граничными условиями, совпадающими на одном из концов интервала $(a,\ b)$, вытекает существование соответствующего числа производных у потенциала, хотя из справедливости асимптотического разложения для собственных значений лишь одной краевой задачи никакого значения о гладкости потенциала извлечь нельзя ([1], [2]).

Попытка распространить этот результат на другие регулярные граничные условия показала, что в общем случае из справедливости асимптотических разложений для собственных значений двух краевых задач вытекает лишь существование соответствующего числа производных у потенциала отдельно на левой и правой половине интервала (a, b). В средней точке интервала $(a+b)/2$ потенциал и его производные могут терпеть разрывы ([3], [4]).

Нами будет установлена точная зависимость (в обе стороны) между гладкостью потенциала и числом членов в асимптотических формулах для собственных значений двух краевых задач с регулярными граничными условиями общего вида.

Вид асимптотических разложений для собственных значений регулярной краевой задачи существенно зависит от того, равна нулю сумма $I_{12}+I_{34}$ или нет. Регулярные граничные условия мы относим к классу A, если $I_{12}+I_{34}=0$, и к классу B, если $I_{12}+I_{34}\neq 0$. Собственные значения краевой задачи класса A удовлетворяют единой асимптотической формуле, а собственные значения краевой задачи класса B распадаются на две серии, для каждой из которых справедлива своя асимптотическая формула.

Основной результат настоящей статьи качественно состоит в том, что ***для существования асимптотических разложений данной точности у собственных значений двух краевых задач необходимо и достаточно, чтобы потенциал*** $q(x)$ ***имел соответствующее число производных на всем интервале*** (a, b)***, если эти задачи принадлежат классу A, и отдельно на каждом из интервалов*** $(a, (a+b)/2, (a+b)/2, b$***, если они принадлежат классу B.***

Для доказательства этих утверждений (оно содержится в § 4) нам пришлось уточнить известные ранее асимптотические разложения собственных значений, выделив главные части их остаточных членов в явном виде. Подходящий для этой цели аппарат развит в § 1, который имеет и самостоятельный интерес.

§ 1. **Алгебры $A(n)$ и асимптотические формулы для решений уравнения Штурма — Лиувилля.** Введем следующие обозначения.

1) $\tilde{K}_2$ — множество всех функций экспоненциального типа с суммируемым квадратом на вещественной оси, совпадающее в силу теоремы Винера — Пели с множеством преобразований Фурье всех финитных функций, принадлежащих пространству $L_2(-\infty, \infty)$. Легко проверить, что множество $\tilde{K}_2$ является алгеброй относительно обычных арифметических операций, и операция дифференцирования не выводит функции из этого множества.

Важную роль в дальнейшем будет играть следующее простое свойство множества $\tilde{K}_2$.

Если $f(z) \in \tilde{K}_2$, то последовательность $\{f(k)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ принадлежит пространству l_2, т. е. $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |f(k)|^2 < \infty$.

Действительно, по теореме Винера—Пели $f(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi\,(t)\, l^{-izt}\, dt$, где финитная функция $\varphi(t) \in L_2(-\infty, \infty)$. Поэтому

$$f(k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, e^{-ikt} dt = \int\limits_{0}^{2\pi} \Big[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n + t)\Big]\, e^{-ikt} dt$$

и согласно равенству Парсеваля

$$\sum |f(k)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} \Big| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n) + t)/^2 dt < \infty,$$

поскольку $\sum \varphi(2\pi n + t) \in L_2(0, 2\pi)$ вследствие финитности функции $\varphi(t) \in L_2(-\infty, \infty)$.

2) G^+, G^-—множества комплексных чисел z вида

$$G^+ = \{z: Rez > G(|Imz|)\},\quad G^- = \{z: Rez < -G(|Imz|)\}, \qquad (1.1)$$

где $G(x)$ $(0 \leqslant x < \infty)$ —произвольные функции, монотонно растущие $k + \infty$ при $x \to +\infty$.

3) $f(z) = 0\,(z^{-p})$, $(f(z), = o\,(z^{-p})$, если область определения функции $f(z)$ содержит некоторые множества G^+, G^- вида (1) и при любом $C \geqslant 0$ $\lim\limits_{|Rez| \to \infty} \sup\limits_{|Imz| < C} |z^p f(z)| < \infty$ $(\lim\limits_{|Rez| \to \infty} \sup\limits_{|Imz| < C} |z^p f(z)| = 0)$.

4) $A(n)$ $(n = 0, 1 \ldots)$ — множество функций $f(z)$ комплексного переменного z, обладающих такими свойствами:

а) область определения функции $f(z) \in A(n)$ содержит некоторые множества G^+, G^- вида (1. 1), и ее сужения на эти множества являются голоморфными функциями;

б) для любого целого числа $N \geqslant n$ найдется такая голоморфная в окрестности бесконечно удаленной точки функция $\sum\limits_{k=1}^{\infty} r_k z^{-k}$ и такие функции $\rho_k(z) \in \widetilde{K}^2$, что

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} r_k z^{-k} + \sum_{k=n}^{N} \rho_k(z)\, z^{-k} + o\,(z^{-N-1}). \qquad (1.2)$$

Заметим, что в формуле (1.2) однозначно определены только коэффициенты r_k при $k \leqslant n$, так что представление функции $f(z) \in A(n)$ в виде (1.2) неоднозначно. Существенна лишь возможность такого представления, которое в дальнейшем мы будем называть асимптотическим, а функцию $\sum\limits_{k=1}^{\infty} r_k z^{-k}$ — его регулярной частью.

5) $\{n;\, C, a(z), b(z)\}$—функция, принадлежащая множеству $A(n)$ и допускающая асимптотическое представление (1.2), в котором $r_1 = C$, $\rho_n(z) = a(z)$, $\rho_{n+1} = b(z)$.

Вводя обозначение $f(z) = \{n; C, a(z), b(z)\}$, подчеркиваем принадлежность функции $f(z)$ множеству $A(n)$ и выделяем в ее асимптотическом представлении коэффициенты $r_1, \rho_n(z), \rho_{n+1}(z)$, поскольку именно эти характеристики функций будут играть основную роль в дальнейшем.

Перечислим некоторые элементарно проверяемые свойства множеств $A(n)$. Так как K_2 является алгеброй, то множества $A(n)$ тоже являются алгебрами относительно обычных арифметических операций. В принятых выше обозначениях эти операции производятся по таким правилам: $\sum W_e\{n; C_e, a_e(z), b_e(z)\} = \{n; \sum W_e C_e, \sum W_e a_e(z), \sum W_e b_e(z)\}$ (W_e — произвольные комплексные числа). $\{n; C_1, a_1(z), b_1(z)\}\{n; C_2, a_2(z), b_2(z) = \{n; 0, a(z), b(z)\}$, где $a(z) = \delta(n) a_1(z) a_2(z)$, $b(z) = C_1 a_2(z) + C_2 a_1(z) + \delta(n)[a_1(z) b_2(z) + a_2(z) b_1(z)] + \delta(n-1) a_1(z) a_2(z)$ и $\delta(k)$ — дискретная δ-функция: $\delta(0) = 1$, $\delta(k) = 0$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

В частности, $\prod_{k=1}^{p} f_k(z) = \{n; 0, 0, 0\}$, если $f_k(z) \in A(n)$, $n \geqslant 1$ и $p \geqslant 3$

Отметим, что при арифметических действиях с символами $\{n; C_1, a(z), b(z)\}$ символ $\{n; 0, 0, 0\}$ играет роль нуля.

Лемма 1. *Если функция* $F(W_1, W_2, \ldots, W_p) = \sum_{l=1}^{p} F_l W_l +$

$$+ \sum_{l_1 l_2 = 1}^{p} F_{l_1 l_2} W_{l_1} W_{l_2} + \ldots \qquad (1.3)$$

голоморфна в окрестности нуля, $f_l(z) = \{n; C_l, a_l(z), b_l(z)\}$ $(l = 1, 2, \ldots, p)$ **(1.4)**

и $n \geqslant 1$, *то* $F(f_1(z), f_2(z), \ldots, f_p(z)) = \{n; C, a(z), b(z)\}$, **(1.5)**

где $C = \sum_{l=1}^{p} F_l C_l$; $a(z) = \sum_{l=1}^{p} F_l a_l(z)$; **(1.6)**

$$b(z) = \sum_{l=1}^{p} F_l b_l(z) + \sum_{l_1, l_2 = 1}^{p} F_{l_1 l_2}[C_{l_1} a_{l_2}(z) + C_{l_2} a_{l_1}(z) + \delta(n-1) a_{l_1}(z) a_{l_2}(z)]. \qquad (1.6')$$

Доказательство. Из определения множества $A(n)$ следует, что функции $f_l(z) \in A(n)$ при $n \geqslant 1$ удовлетворяют условиям $f_l(z) = 0(z^{-1})$, и пересечение их областей определения содержит некоторые множества G^+, G^- вида (1.1). Поэтому функция $F(f_1(z), \ldots, f_p(z))$ тоже определена и голоморфна на некоторых множествах вида (1.1), причем согласно (1.3)

$$F(f_1(z), \ldots, f_p(z)) = g(z) + O(z^{-N-2}); \qquad (1.7)$$

$$g(z) = \sum_{l=1}^{p} F_l f_l(z) + \sum_{l_1 l_2 = 1}^{p} F_{l_1, l_2} f_{l_1}(z) f_{z_2}(z) + \ldots +$$

$$+ \sum_{l_1, l_2, \ldots, l_{N+1} = 1}^{p} F_{l_1, l_2, \ldots, l_{N+1}} f_{l_1}(z) \ldots f_{N+1}(z).$$

Подставляя в последнее равенство вместо функций $f_l(z)$ их асимптотические представления (1.4) и производя необходимые арифметические действия по установленным выше правилам, находим, что $g = (z)\{n; C, a(z), b(z)\}$, где коэффициенты $C, a(z), b(z)$ определяются формулами (1.6)—(1.6′), откуда согласно (1.7) вытекает равенство (1.5).

Например, если $F(W) = \ln(1+W) = W - \frac{1}{2}W^2 + \ldots$ и $f(z) = \{n; C, a(z), b(z)\}$, $n \geqslant 1$, то согласно лемме 1, $ln(1+f(z)) = \{n; C, a(z), \beta(z)\}$ **(1.8′)**, где $\beta(z) = b(z) - Ca(z) - \frac{\delta(n-1)}{2}a^2(z)$ **(1.8).**

Так как в принятых нами обозначениях равенства $g(z) = \{n; C, a(z), b(z)\}$; $(g(-z) = \{n; -C, (-1)^n a(-z), (-1)^{n+1} b(-z)\}$ **(1.9)** эквивалентны друг другу, то из (1.8) следует также, что $\ln\frac{1+f(z)}{1+f(-z)} = \{n; 2C, a(z) - (-1)^n a(-z), \beta(z) - (-1)^{n+1}\beta(-z)\}$. (1.10)

Лемма 2. *Если $f(\lambda) = \{n; C, a(\lambda), b(\lambda)\}$ и $n \geqslant 1$, то в каждой полосе $|\mathrm{Im}\, z| < C$ при достаточно больших $|z|$ уравнение $\lambda = z + f(\lambda)$* **(1.11)** *имеет единственное решение $\lambda = \lambda(z)$. При этом $\lambda = z + \theta(z)$, где $\theta(z) = \{n; C, a(z), \tilde{b}(z)\}$ и $\tilde{b}(z) = b(z) + Ca'(z) + \delta(n-1)a'(z)a(z)$* **(1.12).**

Доказательство. Существование и единственность решения $\lambda = \lambda(z)$ уравнения (1.11) при больших $|z|$ в любой полосе $|\mathrm{Im}\, z| < C$, а также голоморфность функции $\lambda(z)$ в областях вида (1.1) вместе с оценкой $\theta(z) = \lambda(z) - z = O(z^{-1})$ вытекают из теоремы Руше, если учесть, что $f(\lambda) = O(\lambda)^{-1}$, поскольку $n \geqslant 1$. Перейдя в уравнении (1.11) к функции $\theta = \theta(z)$, приходим к равенству $\theta = f(z+\theta)$.

По условию функция $f(\lambda)$ допускает асимптотическое представление $f(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} r_k \lambda^{-k} + \sum_{k=n}^{N} \rho_k(\lambda)\lambda^{-k} + o(\lambda^{-N-1})$, в котором $r_1 = C$, $\rho_n(\lambda) = a(\lambda)$, $\rho_{n+1}(\lambda) = b(\lambda)$ **(1.13).**

Используя это представление и разлагая функцию $\sum_{k=1}^{\infty} r_k(z+\theta)^{-k} + \sum_{k=n}^{N} \rho_k(z+\theta)(z+\theta)^{-k}$ по степеням $\theta = \theta(z) = O(z^{-1})$, находим, что $f(z+\theta) = \sum_{l=0}^{N+1} \gamma_l(z)\,\theta^l + \gamma_{N+2}(z)$, где $\gamma_{N+2}(z) = o(z^{-N-1})$, а

$$\gamma_l(z) = \frac{1}{l!}\frac{d^l}{dz^l}\left[\sum_{k=1}^{\infty} r_k z^{-k} + \sum_{k=n}^{N} \rho_k(z) z^{-k}\right] (0 \leqslant l \leqslant N+1). \qquad \textbf{(1.14)}$$

Следовательно, функция $\theta(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\theta = \sum_{l=0}^{N+1} \gamma_l(z)\,\theta^l + \gamma_{N+2}(z), \qquad (1.15)$$

в котором $\gamma_{N+2}(z) = o(z^{-N-1})$, а определенные равенствами (1.14) функции $\gamma_l(z)$ принадлежат, очевидно, алгебре $A(n)$. Кроме того, из (1. 13), (1. 14) следует также, что $\gamma_l(z) = \frac{1}{l!}\{n;\ \delta(l)\ C,\ a^{(l)}(z),$ $b^l(z) - \ln a^{(l-1)}(z)\}$ **(1. 16)**

По теореме о неявных функциях уравнение $t = \sum_{l=0}^{N+1} W_l t^l +$ $+ W_{N+2}$ **(1.17)**
имеет единственное решение $t = t(W_0, W_1, \ldots, W_{N+2})$ в достаточно малой окрестности нуля переменных $W_0, W_1, \ldots, W_{N+2}$, и оно является голоморфной функцией от них:

$$t(W_0, W_1, \ldots, W_{N+2}) = \sum_{l=0}^{N+2} t_l W_l + \sum_{l_1, l_2=0}^{N+2} t_{l_1, l_2} W_{l_1} W_{l_2} + \ldots$$

Подставляя этот ряд в уравнение (1. 17), находим, что $t_0 = t_{N+2} = 1,\ t_l = 0\ (1 \leqslant l \leqslant N+1),\ t_{1,0} = t_{0,1} = t_{1,N+2} = t_{N+2,1} = \frac{1}{2}$ и $t_{l_1, l_2} = 0$ при всех других значениях $l_1,\ l_2$. Поэтому $t(W_0, W_1, \ldots, W_{N+2}) = W_0 + W_{N+2} + W_1 W_0 + W_1 W_{N+2} + \sum_{l_1, l_2, l_3=0}^{N+2} t_{l_1, l_2, l_3} W_{l_1} W_{l_2} W_{l_3} + \ldots$ или $t(W_0, W_1, \ldots, W_{N+2}) = t_1(W_0, W_1, \ldots, W_{N+1}) + W_{N+2}\, t_2(W_0,$ $W_1, \ldots, W_{N+2})$, где функции $t_1(W_0, W_1, \ldots, W_{N+1}) = W_0 + W_1 W_0 + \sum_{l_1, l_2, l_3=0}^{N+1} t_{l_1, l_2, l_3} W_{l_1} W_{l_2} W_{l_3} + \ldots$ (1. 18) и $t_2(W_0, W_1, \ldots,$ $W_{N+2})$ голоморфны и ограничены в окрестности нуля. Сравнивая уравнения (1. 15), (1. 17) и замечая при этом, что $\gamma_l(z) = o(z^{-1})$ $(0 \leqslant l \leqslant N+1)$; $\gamma_{N+2}(z) = o(z^{-N-1})$, находим, что $\theta(z) = t(\gamma_0(z),$ $\gamma_1(z), \ldots, \gamma_{N+2}(z)) = t_1(\gamma_0(z), \gamma_1(z), \ldots, \gamma_{N+1}(z)) + o(z^{-N-1})$. Но из равенств (1.16), (1.18) и леммы 1 следует, что $t_1(\gamma_0(z),$ $\gamma_1(z), \ldots, \gamma_{N+1}(z)) = \{n; C, a(z), \hat{b}(z)\}$, а значит, и $\theta(z) = \{n;\ C,$ $a(z),\ \hat{b}(z)\}$, где функция $\hat{b}(z)$ определена формулой (1.12).

Обозначим через $W_2^n[a,\ b]$ пространство С. Л. Соболева, состоящее из заданных на сегменте $[a,\ b]$ комплекснозначных функций $f(x)$, имеющих $n-1$ абсолютно непрерывную производную и производную n-го порядка, принадлежащую пространству L_2 $[a,\ b]$.

Лемма 3. *Если в уравнении* $-y'' + q(x)\, y = \lambda^2 y \quad (0 \leqslant x \leqslant b)$ **(1. 19)**,
потенциал $q(x) \in W_2^n[0,\ b]$, *то оно имеет решения* $y(\lambda,\ x)$, $y(-$

$$-\lambda,\ x) \text{ вида } y(\lambda,\ x) = \exp\{i\lambda x + \int_0^x \sigma(\lambda,\ t)\, dt\}, \qquad \textbf{(1. 20)}$$

причем для функций комплексного переменного λ $\sigma(\lambda,\ x)$, $\int_0^x \sigma(\lambda,$ $t)\, dt$ *при каждом фиксированном значении* $x \in [0,\ b]$ *выполняются равенства* $\sigma(\lambda,\ x) = \{n;\ C_0(x), -2ia(\lambda,\ x),\ b_0(\lambda,\ x)\}$ **(1.21)**;

$\int\limits_0^x \sigma(\lambda, t)\, dt = \{n+1;\ C_1(x),\ a(\lambda, x),\ b_1(\lambda, x)\}$ **(1.22)**, *в которых*

$$C_0(x) = (1-\delta(n))\ (2i)^{-1}\ q(x),\quad C_1(x) = (2i)^{-1}\int\limits_0^x q(t)\, dt; \qquad \textbf{(1.23)}$$

$a(\lambda, x) = -(2i)^{-n-1}\int\limits_0^x u'_{n+1}(x-t)\, e^{-2i\lambda t}\, dt$ (1.23′) и $u'_{n+1}(x-t) =$
$= (-1)^n q^{(n)}(x-t) + p_{n+1}(x-t),\ p_{n+1}(x-t) \in W_2^1[0, b]$. **(1.24)**

Доказательство. Если $q(x) \in W_2^n\ [0, a]$, то, согласно лемме 1.4.1 из [5], уравнение (1.19) имеет решения $y(\lambda, x)$, $y(-\lambda, x)$ вида

$$y(\lambda, x) = e^{i\lambda x}[\sum_{k=0}^{n} u_k(x)\ (2i\lambda)^{-k} + u_{n+1}(\lambda, x)\ (2i\lambda)^{-n-1}], \qquad (1.25)$$

$$\text{где}\quad u_0(x) \equiv 1,\ u_k(x) = \int\limits_0^x \{-u''_{k-1}(t) + q(t)\ u_{k-1}(t)\}\ dt, \qquad (1.26)$$

а функция $u_{n+1}(\lambda, x)$ и ее производная допускают представления $u_{n+1}(\lambda, x) = u_{n+1}(x) + (2i\lambda)^{-1}\int\limits_0^x q(t)\ u_{n+1}(t)\, dt + \int\limits_0^x u'_{n+1}(x-$

$$-t)\, e^{-2i\lambda t}\, dt - (2i\lambda)^{-1}\int\limits_0^x K^{(0)}_{n+1}(x, t)\, e^{-2i\lambda t}\, dt, \qquad (1.27)$$

$$u'_{n+1}(\lambda, x) = 2i\lambda\int\limits_0^x u_{n+1}(x-t)\, e^{-2i\lambda t}\, dt + \int\limits_0^x K^{(1)}_{n+1}(x, t)\, e^{-2i\lambda t}\, dt, \qquad (1.27')$$

в которых ядра $u_{n+1}(x-t)$; $K^{(0)}_{n+1}(x, t)$; $K^{(1)}_{n+1}(x, t)$ при каждом фиксированном значении $x \in [0, b]$ суммируемы с квадратом по переменной t. Введя для краткости обозначение

$$Q(\lambda, x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)\ (2i\lambda)^{-k} + u_{n+1}(\lambda, x)\ (2i\lambda)^{-n-1} \qquad (1.28)$$

и полагая $\sigma(\lambda, x) = \frac{d}{dx}\ln(1 + Q(\lambda, x))$, мы представим решение (1.25) в форме (1.20), где

$\sigma(\lambda, x) = Q'(\lambda, x)\ (1 + Q(\lambda, x))^{-1} = Q'(\lambda, x) - Q'(\lambda, x)\, Q(\lambda, x)\ \times$

$\times\ (1 + Q(\lambda, x))^{-1}$ **(1.29)**; $\quad \int\limits_0^x \sigma(\lambda, t)\, dt = \ln(1 + Q(\lambda, x)).$ (1.30)

Из (1.28), (1.26), (1.27), (1.27′) и теоремы Винера—Пели следует, что $Q'(\lambda, x) = \{n;\ C_0(x),\ -2ia(\lambda, x),\ K_0(\lambda, x)\}$; $Q(\lambda, x) = \{n+1;\ C_1(x),\ a(\lambda, x),\ K_1(\lambda, x)\}$, где коэффициенты $C_0(x)$, $C_1(x)$, $a(\lambda, x)$ определены равенствами (1.23), (1.23′). Отсюда, согласно (1.29), (1.30) и лемме 1, вытекает справедливость формул (1.21), (1.22). Для завершения доказательства леммы остается заметить, что из рекуррентных формул (1.26) по индукции следуют равенства $u_k'(x)=(-1)^{k-1}\,q^{(k-2)}(x)+v_k(x)$, где $v_k(x)\in \in W_2^{n-k+3}[0,\ b]$. Поэтому $u_{n+1}'(x)=(-1)^n q^{(n)}(x)+p_{n+1}(x)$, где $p_{n+1}(x)\in W_2^1[0,\ b]$.

Замечание к лемме 3. Если потенциал $q(x)$ определен в интервале $[-b,\ b]$ и принадлежит пространству $W_2^n[-b,\ b]$, то функции (1.20) удовлетворяют уравнению (1.19) во всем интервале $[-b,\ b]$, а функция $p_{n+1}(x)$ принадлежит пространству $W_2^n[-b,\ b]$.

Согласно (1.26), (1.27), (1.27′), $\sigma(\lambda,\ 0)=\sum_1^n u_k'(0)\ (2i\lambda)^{-k}$ и, значит, при любом $N=0,\ 1,\ 2\ldots,\ \lambda^{-1}\ \sigma(\lambda,\ 0)=\{N;\ 0,\ 0,\ 0\}$.

§ 2. Характеристические уравнения регулярных краевых задач. Будем считать, что краевые задачи (1), (2) определяются на интервале $[-\pi/2,\ \pi/2]$. Это, конечно, не ограничит общности результатов, поскольку переход к произвольному интервалу $[a,\ b]$ осуществляется простой заменой переменных.

Наряду с пространствами С. Л. Соболева $W_2^n[-\pi/2,\pi/2]$, введенными в предыдущем параграфе, мы будем рассматривать также пространства $W_2^n[-\pi/2,\ 0]\ [0,\ \pi/2]$, состоящие из функций, сужения которых на сегменты $[-\pi/2,\ 0]$, $[0,\ \pi/2]$ принадлежат пространствам $W_2^n[-\pi/2,0]$, $W^n[0,\ \pi/2]$. Иными словами пространство $W_2^n[-\pi/2,\ 0]\ [0,\ \pi/2]$ состоит из комплекснозначных функций, имеющих n-суммируемых с квадратом производных отдельно на каждом интервале $[-\pi/2,\ 0]$, $[0,\ \pi/2]$, которые могут терпеть разрыв непрерывности в точке 0.

Пусть в уравнении (1) потенциал $q(x)\in W_2^n[-\pi/2,\ 0]\ [0,\pi/2]$. Тогда функции $q_\pm(x)=q(\pm x)$ $(0\leqslant x\leqslant\pi/2)$ принадлежат пространству $W_2^n[0,\ \pi/2]$ и согласно лемме 3 уравнения $-y''+q_\pm(x)\,y= =\lambda^2 y$ $(0\leqslant x\leqslant\pi/2)$ имеют фундаментальные системы решений $y_+(\lambda,\ x)$, $y_+(-\lambda,\ x)$ и $y_-(\lambda,\ x)$, $y_-(-\lambda,\ x)$ вида $y_\pm(\lambda,\ x)= =\exp\{i\lambda x+\int_0^x\sigma_\pm(\lambda,\ t)\,dt\}$ **(2. 1)**, где функции $\sigma_+(\lambda,\ x),\sigma_-(\lambda,\ x)$ определяются потенциалами $q_+(x)=q(x)$; $q_-(x)=q(-x)$. Так как при $x\in[-\pi/2,\ 0]$ функции $y_-(\lambda,\ -x)$, $y_-(-\lambda,\ -x)$ удовлетворяют исходному уравнению (1), то любое его решение $Z(\lambda,\ x)$ имеет вид

$$Z(\lambda,\ x)=\begin{cases}A^+y_+(\lambda,\ x)+B^+y_+(-\lambda,\ x) & x\in[0,\ \pi/2]\\ A^-y_-(\lambda,\ -x)+B^-y_-(-\lambda,\ -x) & x\in[-\pi/2,\ 0],\end{cases}$$

причем константы $A^\pm$, $B^\pm$ связаны равенствами

$$A^+y_+(\lambda,\ 0)+B^+y_+(-\lambda,\ 0)=A^-y_-(-\lambda,\ 0)+B^-y_-(-\lambda,\ 0);$$
$$A^+y_+'(\lambda,\ 0)+B^-y_+(-\lambda,\ 0)=-[A^-y_-'(-\lambda,0)+B^-y_-(-\lambda,0)],\quad(2.2)$$

вытекающими из непрерывности решения $Z(\lambda, x)$ и его производной $Z'(\lambda, x)$ в точке $x=0$. Для того чтобы решение $Z(\lambda, x)$ удовлетворяло также граничным условиям (2), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства $a_{i1}[A^- y_-(\lambda, \pi/2) + B^- y_-(-\lambda, \pi/2)] - a_{i2}[A^- y'_-(\lambda, \pi/2) + B^- y'_-(-\lambda, \pi/2)] + a_{i3}[A^+ y_+(\lambda, \pi/2) + B^+ y_+(-\lambda, \pi/2)] + a_{i4}[A^+ y'_+(\lambda, \pi/2) + B^+ y'_+(-\lambda, \pi/2)] = 0$ $(i=1, 2)$. Следовательно, число $\lambda^2 = \mu$ будет собственным значением краевой задачи (1), (2) тогда и только тогда, когда система уравнений (2.2), (2.3) относительно коэффициентов $A^\pm$, $B^\pm$ имеет ненулевое решение, т. е. когда определитель этой системы

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} y_+(\lambda, 0) & \times & -y_-(\lambda, 0) & \times \\ y'_+(\lambda, 0) & \times & y'_-(\lambda, 0) & \times \\ a_{13} y_+\left(\lambda, \frac{\pi}{2}\right) + a_{14} y_+\left(\lambda, \frac{\pi}{2}\right) & \times & a_{11} y_-\left(\lambda, \frac{\pi}{2}\right) - a_{12} y'_-\left(\lambda, \frac{\pi}{2}\right) & \times \\ a_{23} y_+\left(\lambda, \frac{\pi}{2}\right) + a_{24} y_+\left(\lambda, \frac{\pi}{2}\right) & \times & a_{21} y_-\left(\lambda, \frac{\pi}{2}\right) - a_{22} y'_-\left(\lambda, \frac{\pi}{2}\right) & \times \end{vmatrix}$$

равен нулю. Звездочками обозначены столбцы, полученные из предшествующих им заменой λ на $-\lambda$.

Функция $\chi(\lambda)$ и уравнение $\chi(\lambda) = 0$ называются характеристическими. Собственные значения краевой задачи равны квадратам корней ее характеристического уравнения.

Обозначим через $B_{i_1, i_2}(\lambda)$ — минор, образованный из элементов определителя $\chi(\lambda)$, стоящих на пересечении первых двух строк и столбцов с номерами i_1, i_2, а через $A_{i_1, i_2}(\lambda)$ — его алгебраическое дополнение, т. е. минор, получающийся вычеркиванием первых двух строк и столбцов с номерами i_1, i_2, умноженный на $(-1)^{1+2+i_1+i_2}$.

По теореме Лапласа $\chi(\lambda) = \sum B_{i_1, i_2}(\lambda) A_{i_1, i_2}(\lambda)$.

При вычислении миноров B_{i_1, i_2} и их алгебраических дополнений мы будем пользоваться введенными ранее обозначениями

$$J_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} a_{1\alpha} & a_{1\beta} \\ a_{2\alpha} & a_{2\beta} \end{vmatrix},$$

равенствами $y'_\pm(\lambda, x) = y_\pm(\lambda, x)\,[i\lambda + \sigma_\pm(\lambda, x)]$ (2.4), вытекающими из (2.1), и тождествами $y'_\pm(\lambda, x)\, y_\pm(-\lambda, x) - y_\pm(\lambda, x)\, y'_\pm(-\lambda, x) = 2i\lambda + \sigma_\pm(\lambda, 0) - \sigma_\pm(\lambda, 0)$, являющимися следствием этих равенств и независимости вронскиана двух решений уравнения Штурма — Лиувилля от x. Прямое вычисление дает $B_{12}(\lambda) = -[2i\lambda + \sigma_+(\lambda, 0) - \sigma_+(-\lambda, 0)]$; $B_{34}(\lambda) = 2i\lambda +$

$+\sigma_-(\lambda, 0)-\sigma_-(-\lambda, 0)$; $A_{12}(\lambda)=I_{12}[2i\lambda+\sigma_-(\lambda, 0)-\sigma_-(-\lambda, 0)]$; $A_{34}(\lambda)=-I_{34}[2i\lambda+\sigma_+(\lambda, 0)-\sigma_+(-\lambda, 0)]$. Поэтому $B_{12}A_{12}+B_{34}A_{34}=-(I_{12}+I_{34})\ [2i\lambda+\sigma_+(\lambda, 0)-\sigma_+(-\lambda, 0)]\ [2i\lambda+\sigma_-(\lambda, 0)-\sigma_-(-\lambda, 0)]$. Далее, из вида определителя $\chi(\lambda)$ следует, что $B_{14}(\lambda)=B_{23}(-\lambda)$, $B_{13}(\lambda)=B_{24}(-\lambda)$, $A_{14}(\lambda)=A_{23}(-\lambda)$, $A_{13}(\lambda)=A_{34}(-\lambda)$, а непосредственное вычисление (с использованием равенств (2.4)) дает

$$B_{14}(\lambda)=\sigma_+(\lambda, 0)+\sigma_-(-\lambda, 0);\ B_{13}(\lambda)=2i\lambda+\sigma_+(\lambda, 0)+\sigma_-(\lambda, 0);$$

$$A_{14}(\lambda)=y_+\left(-\lambda, \frac{\pi}{2}\right)y_-\left(\lambda, \frac{\pi}{2}\right)\left[I_{24}\left(-i\lambda+\sigma_+\left(-\lambda, \frac{\pi}{2}\right)\right)\left(i\lambda+\sigma_-\left(\lambda, \frac{\pi}{2}\right)\right)-I_{14}\left(-i\lambda+\sigma_+\left(-\lambda, \frac{\pi}{2}\right)\right)+I_{23}\left(i\lambda+\sigma_-\left(\lambda, \frac{\pi}{2}\right)\right)-I_{13}\right];\quad A_{13}(\lambda)=y_+\left(-\lambda, \frac{\pi}{2}\right)y_-\left(-\lambda, \frac{\pi}{2}\right)\left[-I_{24}\left(-i\lambda+\sigma_+\left(-\lambda, \frac{\pi}{2}\right)\right)\left(-i\lambda+\sigma_-\left(-\lambda, \frac{\pi}{2}\right)\right)+I_{14}\left(-i\lambda+\sigma_+\left(-\lambda, \frac{\pi}{2}\right)\right)-I_{23}\left(-i\lambda+\sigma_-\left(-\lambda, \frac{\pi}{2}\right)\right)+I_{13}\right].$$

Согласно (2.1) $y_+\left(-\lambda, \frac{\pi}{2}\right)y_-\left(\lambda, \frac{\pi}{2}\right)=\exp\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sigma_+(-\lambda, t)+\sigma_-(\lambda, t)]\,dt$; $y_+\left(-\lambda, \frac{\pi}{2}\right)y_-\left(-\lambda, \frac{\pi}{2}\right)=\exp\left[-i\lambda\pi+\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sigma_+\times\right.$

$$\left.\times(-\lambda, t)+\sigma_-(-\lambda, t)]\,dt\right]$$

и используя полученные выше формулы для миноров и их алгебраических дополнений, находим, что $\chi(\lambda)=\lambda^2[e^{i\lambda\pi}G(\lambda)+e^{-i\lambda\pi}G(-\lambda)+F(\lambda)]$, где $F(\lambda)=F_0(\lambda)+F_1(\lambda)+F_1(-\lambda)$;

$$F_0(\lambda)=4(I_{12}+I_{34})\left\{1-\frac{\sigma_+(\lambda, 0)-\sigma_+(-\lambda, 0)}{2i\lambda}\right\}\left\{1+\frac{\sigma_-(\lambda, 0)-\sigma_-(-\lambda, 0)}{2i\lambda}\right\};$$

$$F_1(\lambda)=[\sigma_+(\lambda, 0)+\sigma_-(-\lambda, 0)]\left\{I_{24}\left(1-\frac{\sigma_+\left(-\lambda, \frac{\pi}{2}\right)}{i\lambda}\right)\left(1+\frac{\sigma_-\left(\lambda, \frac{\pi}{2}\right)}{i\lambda}\right)-\frac{I_{14}}{i\lambda}\left(1-\frac{\sigma_+\left(-\lambda, \frac{\pi}{2}\right)}{i\lambda}\right)-\frac{I_{23}}{i\lambda}\left(1+\frac{\sigma_-\left(\lambda, \frac{\pi}{2}\right)}{i\lambda}\right)-\frac{I_{13}}{\lambda^2}\right\}\times$$

$$\times\exp\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sigma_+(-\lambda, t)+\sigma_-(\lambda, t)]\,dt;\ G(\lambda)=-2i\lambda\ G_1(\lambda)\exp\int_0^{\frac{\pi}{2}}\times$$

$$\times[\sigma_+(\lambda, t)+\sigma_-(\lambda, t)]\,dt;\ G_1(\lambda)=\left[1-\frac{\sigma_+(-\lambda, 0)+\sigma_-(-\lambda, 0)}{2i\lambda}\right]\times$$

$$\times\left\{I_{24}\left(1+\frac{\sigma_+\left(\lambda,\frac{\pi}{2}\right)}{i\lambda}\right)\left(1+\frac{\sigma_-\left(\lambda,\frac{\pi}{2}\right)}{i\lambda}\right)+i\lambda^{-1}(I_{14}-I_{23})+\lambda^{-2}\left[I_{14}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\sigma_+\left(\lambda,\frac{\pi}{2}\right)-I_{23}\sigma_-\left(\lambda,\frac{\pi}{2}\right)+I_{13}\right]\right\}. \tag{2.6}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только регулярные краевые задачи. Поведение функций $G(\lambda)$, $F(\lambda)$ при $(\lambda)\to\infty$ зависит от того, с каким из трех возможных типов регулярных граничных условий

$$\text{I. } I_{24}\neq 0;\ \text{II. } I_{24}=0,\quad I_{14}+I_{32}\neq 0;\ \text{III. } I_{24}=I_{14}=I_{32}=I_{12}=$$
$$=I_{34}=0,\ I_{13}\neq 0 \tag{2.7}$$

имеем дело. Не ограничивая общности, будем считать, что в первом случае $I_{24}=1$, во втором $I_{14}+I_{32}=1$ и в третьем $I_{13}=1$. Отметим, что краевые задачи третьего типа порождаются уравнением (1) и граничным условием $y\left(-\frac{\pi}{2}\right)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

Лемма 4. *Пусть в регулярной краевой задаче* (1), (2) *потенциал* $q(x)$ *принадлежит пространству* $W_2^n\left[-\frac{\pi}{2},0\right]\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. *Тогда ее характеристическое уравнение при больших* $|\lambda|$ *приводится к виду* $e^{i\lambda\pi}G(\lambda)+e^{-i\lambda\pi}G(-\lambda)+F(\lambda)=0$ (2.8), *причем, в зависимости от того, к какому из трех возможных типов* (2.7) *относятся граничные условия этой задачи, для функций* $G(\lambda)$ *и* $F(\lambda)=F(-\lambda)$ *выполняются следующие равенства:*

$$\text{I. } G(\lambda)=-2i\lambda\left[1+g_1(\lambda)\right];\ F(\lambda)=4(I_{12}+I_{34})+f_1(\lambda);\ g_1(\lambda)=$$
$$=\{n+1;\ C_1^++C_1^-+i(I_{14}-I_{23}),\ -a_+(\lambda),\ -i(I_{14}+I_{23})a_-(\lambda)+$$
$$+b_1(\lambda)\};\ f_1(\lambda)=\{n+1;\ 0,\ 0,\ d_1(\lambda)\}; \tag{2.9}$$

$$\text{II. } G(\lambda)=2\left[1+g_2(\lambda)\right];\ F(\lambda)=4(I_{12}+I_{34})+f_2(\lambda);\ g_2(\lambda)=$$
$$=\{n+1;C_1^++C_1^--iI_{13},(1-2I_{14})a_-(\lambda);-iI_{13}a_+(\lambda)+b_2(I_{14},\lambda)\};$$
$$f_2(\lambda)=\{n+1;\ 0,\ 0,\ 0\}. \tag{2.10}$$

$$\text{III. } G(\lambda)=-2i\lambda^{-1}\left[1+g_3(\lambda)\right];\ F(\lambda)=\lambda^{-2}f_3(\lambda);\ g_3(\lambda)=\{n+$$
$$+1;\ C_1^++C_1^-,\ a_+(\lambda),\ b_3(\lambda)\};\ f_3(\lambda)=\{n+1;\ 0,\ 0,\ d_3(\lambda)\}. \tag{2.11}$$

Здесь $b_1(\lambda)$, $b_2(I_{14},\lambda)$, $b_3(\lambda)$, $d_1(\lambda)$, $d_3(\lambda)$ — некоторые функции из множества K_2, причем функции $b_1(\lambda)$, $b_3(\lambda)$ не зависят от параметров граничных условий, а функция $b(I_{14},\lambda)$ зависит только от I_{14},

$$a_\pm(\lambda)=-(2i)^{-n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[u_{n+1}^{+\prime}\left(\frac{\pi}{2}-\xi\right)\pm u_{n+1}^{-\prime}\left(\frac{\pi}{2}-\xi\right)\right]e^{-2i\lambda\xi}\,d\xi;$$
$$u_{n+1}^{\pm\prime}\left(\frac{\pi}{2}-\xi\right)=(-1)^n q_\pm^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}-\xi\right)+p_{n+1}^\pm\left(\frac{\pi}{2}-\xi\right); \tag{2.12}$$
$$p_{n+1}^\pm\left(\frac{\pi}{2}-\xi\right)\in W_2^1\left[0,\frac{\pi}{2}\right];\ C_1^\pm=(2i)^{-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}q_\pm(\xi)\,d(\xi).$$

Доказательство. То, что характеристическое уравнение приводится к виду (2.8), в котором функции $F(\lambda)$, $G(\lambda)$ определены формулами (2.5), (2.6), было установлено ранее. Для доказательства соотношений (2.9)—(2.11), которым удовлетворяют эти функции, нужно, опираясь на леммы 1 и 3, переписать формулы (2.5), (2.6), используя введенные в § 1 символы $\{n;\ C,\ a(\lambda),\ b(\lambda)\}$ и правила действия с ними. Для сокращения выкладок можно использовать равенство $F(\lambda)-4(I_{12}+I_{34})=0(\lambda^{-1})$ $(|\lambda|\to\infty)$, вытекающее из четности функции $F(\lambda)$.

Выясним теперь, насколько упростятся характеристические уравнения в случае, когда потенциал $q(x)$ принадлежит пространству $W_2^n\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Согласно замечанию к лемме 3 в этом случае функция $y(\lambda,\ x)=\exp\left\{i\lambda x+\int\limits_0^x\sigma(\lambda,\ t)\,dt\right\}$ удовлетворяет уравнению (1) во всем интервале $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Следовательно, функция $y(-\lambda,\ -x)=\exp\left\{i\lambda x+\int\limits_0^x[-\sigma(-\lambda,\ -t)]\,dt\right\}$ удовлетворяет уравнению $-y''+q(-x)\,y=\lambda^2y$ тоже во всем интервале $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Отсюда, вспоминая определения введенных ранее функций $y_\pm(\lambda,x)$, находим, что $y_\pm(\lambda,x)=y(\pm\lambda,\ \pm x)$, и, значит, $u_{n+1}^+(x)=u_{n+1}(x)$, $u_{n+1}^-(x)=(-1)^{n+1}u_{n+1}(-x)$; $\sigma_\pm(\lambda,x)=\pm\sigma(\pm\lambda,\pm x)$. Поэтому $\sigma_\pm(\lambda,0)=\pm\sigma(\pm\lambda,0)$; $p_{n+1}^+(x)=$ $=u_{n+1}^{+1}(x)-(-1)^nq_+^{(n)}(x)=u'_{n+1}(x)-(-1)^n\,q^{(n)}(x)=p_{n+1}(x)$; $p_{n+1}^-(x)=u_{n+1}^{-1}(x)-(-1)^nq_-^{(n)}(x)=(-1)^n\,u'_{n+1}(-x)-q^{(n)}(-x)=$ $=(-1)^n\,p_{n+1}(-x)$, откуда в силу непрерывности функции $p_{n+1}(x)\in$ $\in W_2^1\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ следует, что в случае, когда $q(x)\in W_2^n\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, выполняются равенства $p_{n+1}^+(0)+\in(-1)^{n+1}p_{n+1}^-(0)=0$, $\sigma_+(\lambda,0)+$ $+\sigma_-(-\lambda,0)=0$. Из последнего равенства и формулы (2.5) вытекает также, что в этом случае функция $F_1(\lambda)$ тождественно равна нулю и $F(\lambda)=F_0(\lambda)$. Таким образом, справедливо

Дополнение к лемме 4. *Если $q(x)\in W_2^n\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, то в характеристических уровнениях* (2.8) $F(\lambda)=4(I_{12}+I_{34})\,[1+$ $+\{n+1;0,0,0\}]$ (2.13) *для всех типов регулярных граничных условий, и, кроме того,* $p_{n+1}^+(0)+(-1)^{n+1}\,p_{n+1}^-(0)=0$ (2.14).

Преобразуем характеристические уравнения к виду, позволяющему воспользоваться леммой 2 при выводе асимптотических формул для собственных значений. Решив уравнение (2.8) относительно $e^{i\lambda\pi}$, мы получим уравнения

$$e^{i\lambda\pi}=-\frac{F(\lambda)}{2G(\lambda)}\pm\sqrt{\frac{F^2(\lambda)}{4G^2(\lambda)}-\frac{G(-\lambda)}{G(\lambda)}},\qquad(2.15)$$

эквивалентные характеристическому.

Если краевая задача первого типа ($I_{24}=1$), то согласно (2.9)

$$-\frac{G(-\lambda)}{G(\lambda)}=\frac{1+g_1(-\lambda)}{1+g_1(\lambda)}\,;\;-\frac{F(\lambda)}{2G(\lambda)}=\frac{-iF(\lambda)}{4\lambda\,[1+g_1(\lambda)]}=$$

$$=\sqrt{\frac{1+g_1(-\lambda)}{1+g_1(\lambda)}}\times\frac{-iF(\lambda)}{4\lambda\sqrt{(1+g_1(-\lambda))\,(1+g_1(\lambda))}}\,. \tag{2.16}$$

Поэтому полагая $\Phi_1(\lambda)=\sqrt{\dfrac{1+g_1(-\lambda)}{1+g_1(\lambda)}}$ (2.16′)

$$\Psi_1(\lambda)=\sqrt{1+\left(\frac{-iF(\lambda)}{4\lambda\sqrt{(1+g_1(-\lambda))\,(1+g_1(\lambda))}}\right)^2}-$$

$$-\frac{iF(\lambda)}{4\lambda\sqrt{(1+g_1(-\lambda))\,(1+g_1(\lambda))}}$$

и замечая, что $[\Psi_1(\lambda)]^{-1}=\sqrt{1+\left[\dfrac{-iF(\lambda)}{4\lambda\sqrt{(1+g_1(-\lambda))\,(1+g_1(\lambda))}}\right]^2}+$ $+\dfrac{iF(\lambda)}{4\lambda\sqrt{(1+g_1(-\lambda))\,(1+g_1(\lambda))}}$, мы можем уравнения (2.15) представить в такой форме: $l^{i\lambda\pi}=\pm\Phi_1(\lambda)\,[\Psi_1(\lambda)]^{\pm1}$. (2.17)

(Здесь и ниже выбираются те ветви функций $\sqrt{1+z}$, $\ln(1+z)$, которые при $z=0$ соответственно равны 1 и 0).

Аналогичные преобразования показывают, что для краевой задачи третьего типа ($I_{24}=I_{14}=I_{32}=I_{12}=I_{34}=0$; $I_{13}=1$) уравнения (2.15) приводятся к виду $l^{i\lambda\pi}=\pm\Phi_3(\lambda)\,[\Psi_3(\lambda)]^{\pm1}$ (2.18), где $\Phi_3(\lambda)=\sqrt{\dfrac{1+g_3(-\lambda)}{1+g_3(\lambda)}}$ (2.19);

$$\Psi_3(\lambda)=\sqrt{1+\frac{-iF(\lambda)\lambda}{4\sqrt{(1+g_3(-\lambda))\,(1+g_3(\lambda))}}}-$$

$$-\frac{iF(\lambda)\lambda}{4\sqrt{(1+g_3(-\lambda))\,(1+g_3(\lambda))}}\,. \tag{2.19′}$$

Рассмотрим, наконец, краевую задачу второго типа ($I_{24}=0$ $I_{14}+I_{32}=1$). В этом случае согласно (2.10) $\dfrac{G(-\lambda)}{G(\lambda)}=\dfrac{1+g_2(-\lambda)}{1+g_2(\lambda)}$;

$$-\frac{F(\lambda)}{2G(\lambda)}=-\frac{F(\lambda)}{4(1+g_2(\lambda))}=\sqrt{\frac{1+g_2(-\lambda)}{1+g_2(\lambda)}}\times$$

$$\times\frac{-F(\lambda)}{4\sqrt{1+g_2(-\lambda))\,(1+g_2(\lambda))}}\,.$$

Поэтому полагая $\Phi_2(\lambda)=\sqrt{\dfrac{1+g_2(-\lambda)}{1+g_2(\lambda)}}$ (2.20); $\Psi_2(\lambda)=$

$$=\frac{-F(\lambda)}{4\sqrt{(1+g_2(-\lambda))\,(1+g_2(\lambda))}}+\sqrt{\left[\frac{-F(\lambda)}{4(1+g_2(-\lambda))\,(1+g_2(\lambda))}\right]^2-1} \tag{2.20′}$$

мы можем уравнения (2.15) представить в виде $l^{i\lambda\pi}=\Phi_2(\lambda)\times$ $\times[\Psi_2(\lambda)]^{\pm1}$ (2.21).

Лемма 5. *Пусть в регулярной краевой задаче (1), (2) потенциал $q(x)$ принадлежит пространству $W_2^n\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда ее характеристическое уравнение при больших $|\lambda|$ эквивалентно двум последовательностям уравнений, которые в зависимости от того, к какому типу относятся граничные условия этой задачи, имеют такую структуру:* I) $\lambda = 2k + p_1(\lambda) + q_1(\lambda)$; $\lambda = 2k + 1 + p_1(\lambda) - q_1(\lambda)$; II) $\lambda = 2k + p_2(\lambda) + q_2(\lambda)$; $\lambda = 2k + p_2(\lambda) - q_2(\lambda)$; III) $\lambda = 2k + p_3(\lambda) + q_3(\lambda)$; $\lambda = 2k + 1 + p_3(\lambda) - q_3(\lambda)$. *Здесь* $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, *а функции* $p_j(\lambda), q_j(\lambda)$ $(j = 1, 2, 3)$ *имеют такой вид:* $p_1(\lambda) \pm q_1(\lambda) = \frac{1}{\pi i}\{n+1; -C_1^+ - C_1^- - i(I_{14} - I_{23}) \mp i(I_{12} + I_{34}), \frac{1}{2}[a_+(\lambda) + (-1)^n a_+(-\lambda)],$ $\frac{i}{2}[(I_{14}+I_{23})[a_-(\lambda) + (-1)^{n+1} a_-(-\lambda)] - (I_{14} - I_{23} \pm (I_{12}+I_{34})) \times [a_+(\lambda) + (-1)^{n+1} a_+(-\lambda)] + b_1(\lambda)\}$ **(2.22)**; $p_2(\lambda) \pm q_2(\lambda) = \pm\theta + \frac{1}{\pi i}\{n+1; -C_1^+ - C_1^- + iI_{13}; \mp \frac{i(2I_{14}-1)}{2s} \times [e^{\pm i\pi\theta} a_-(\lambda) + (-1)^{n+1} e^{\mp i\pi\theta} a_-(-\lambda)], \pm \frac{I_{13}}{2s}[e^{\pm i\pi\theta} a_+(\lambda) + (-1)^{n+2} e^{\mp i\pi\theta} a_+(-\lambda) + (2I_{14} - 1)(e^{\pm i\pi\theta} a_-(\lambda) + (-1)^{n+2} e^{\mp i\pi\theta} a_-(-\lambda))] + b_2(\theta, I_{14}; \lambda)\}$ **(2.23)**; $p_3(\lambda) \pm q_3(\lambda) = \frac{1}{\pi i}\{n+1; -C_1^+ - C_1^-,$ $\frac{1}{2}[a_+(\lambda) + (-1)^n a_+(-\lambda)], b_3(\lambda)\}$ **(2.24)**. В этих равенствах использованы те же обозначения, что в лемме 4, а $s = \sin \pi\theta$, где $\theta = \frac{1}{\pi i}\ln[-I_{12} - I_{34} + \sqrt{(I_{12}+I_{34})^2 - 1}]$ **(2.25)**. (Для задач второго типа предполагается, что $(I_{12} + I_{34})^2 \neq 1$, а следовательно, и $\theta \neq 0 \pmod{\pi}$).

Кроме того, все функции $p_1(\lambda)$, $p_2(\lambda)$, $p_3(\lambda)$, $q_1(\lambda)$, $q_3(\lambda)$ — нечетны, а функция $q_2(\lambda)$ — четна.

Доказательство. Логарифмируя полученные выше уравнения (2.17), (2.18), (2.21), мы придем к последовательностям уравнений I), II), III), где

$$p_j(\lambda) = \frac{1}{\pi i}\ln \Phi_j(\lambda);\ q_j(\lambda) = \frac{1}{\pi i}\ln \Psi_j(\lambda)\ (j = 1, 2, 3).$$

Из вида функций $\Phi_j(\lambda)$, $\Psi_j(\lambda)$ и четности функции $F(\lambda)$ следует, что функция $q_2(\lambda)$ четна, а все другие — нечетны. Следовательно, в доказательстве нуждаются только представления функций $p_j(\lambda)$, $q_j(\lambda)$ через символы $\{n; C, a(\lambda), b(\lambda)\}$. Для функций $p_1(\lambda) \pm q_1(\lambda)$, $p_3(\lambda) \pm q_3(\lambda)$ они непосредственно следуют из равенств (2.9), (2.10) и определений функций $\Phi_j(\lambda)$, $\Psi_j(\lambda)$ $(j = 1, 3)$, если воспользоваться леммой 1. Поэтому подробное доказательство мы проведем только для функций $p_2(\lambda)$, $q_2(\lambda)$ Имеем

$$p_2(\lambda) = \frac{1}{\pi i}\ln\Phi_2(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\ln\frac{1+g_2(-\lambda)}{1+g_2(\lambda)} = -\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{1+g_2(\lambda)}{1+g_2(-\lambda)},$$

откуда, используя формулу (1.10) и равенства (2.10), находим, что $p_2(\lambda)=\frac{1}{\pi i}\ln\Phi_2(\lambda)=\frac{1}{\pi i}\{n+1;-C_1^+-C_1^--iI_{13},\frac{2I_{14}-1}{2}\times$ $\times[a_-(\lambda)+(-1)^n a_-(-\lambda)],\ iI_{13}\cdot 2^{-1}[a_+(\lambda)+(-1)^{n+1}a_+(-\lambda)+$ $+(2I_{14}-1)(a_-(\lambda)+(-1)^{n+1}a_-(-\lambda)]+b(I_{14},\lambda)\}$. Мы рассматриваем только те краевые задачи второго типа, для которых $(I_{12}+I_{34})^2\neq 1$. Введя для краткости обозначения $c=-(I_{12}+$ $+I_{34})$, $\theta=\frac{1}{\pi i}\ln[c+\sqrt{c^2-1}]$, $0<Re\theta<1$ (2.27), $e=c+$ $+\sqrt{c^2-1}=e^{i\pi\theta}$, $c=\cos\pi\theta$, $s=\sin\pi\theta=-i\sqrt{c^2-1}$, найдем, что

$$-\frac{F(\lambda)}{4\sqrt{(1+g_2(-\lambda))(1+g_2(\lambda))}}=\left(c-\frac{1}{4}f_2(\lambda)\right)\left(1-\frac{1}{2}(g_2(\lambda)+\right.$$

$$\left.+g_2(-\lambda)\right)-\frac{1}{2}g_2(\lambda)g_2(-\lambda)+\frac{3}{8}(g_2(\lambda)+g_2(-\lambda))^2+\dots),$$ где

многоточием обозначены слагаемые, содержащие три и более множителей $g_2(\pm\lambda)$. Из этого равенства и формулы (2.10) следует, что $\frac{-F(\lambda)}{4\sqrt{(1+g_2(-\lambda))(1+g_2(\lambda))}}=c+y(\lambda)$; $y(\lambda)=\{n+1;$

$0, c(2I_{14}-1)\,2^{-1}[a_-(\lambda)+(-1)^{n+1}a_-(-\lambda)];\ icI_{13}\times$
$\times 2^{-1}[a_+(\lambda)+(-1)^n a_+(-\lambda)+(2I_{14}-1)(a_-(\lambda)+(-1)^n\times$
$\times a_-(-\lambda)]+b(c_1I_{14},\lambda)\}$ (2.28), так как $f_2(\lambda)=\{n+1;0,0,0\}$, и все обозначенные многоточием слагаемые имеют такой же вид.

Из определения (2.20′) функции $\Psi_2(\lambda)$ и пользуясь обозначениями (2.27), получаем:

$$\Psi_2(\lambda)=c+y(\lambda)+\sqrt{c^2+2cy(\lambda)+y(\lambda)^2-1}=c+y(\lambda)+$$
$$+is\sqrt{1-s^{-2}(2cy(\lambda)+y(\lambda)^2}=c+y(\lambda)+is[1-cs^{-2}y(\lambda)+\dots]=$$
$$=c+is-is^{-1}(c+is)y(\lambda)+\dots=e[1-is^{-1}y(\lambda)+\dots];$$
$$q_2(\lambda)=\frac{1}{\pi i}\ln\Psi_2(\lambda)=\frac{1}{\pi i}[i\pi\theta-is^{-1}y(\lambda)+\dots]=\theta-$$

$-\frac{is^{-1}}{\pi i}y(\lambda)+\dots$, где многоточием обозначены слагаемые, содержащие $y(\lambda)$ в степени большей единицы. Отсюда согласно (2.25) вытекает такое представление для функции $q_2(\lambda)$ $q_2(\lambda)=\theta+$ $+\frac{1}{\pi i}\{n+1;0,-\frac{2(I_{14}-1)}{2}i\cdot\frac{c}{s}[a_-(\lambda)+(-1)^{n+1}a_-(-\lambda)]\frac{I_{13}}{2}\times$ $\times\frac{c}{s}[a_+(\lambda)+(-1)^{n+1}a_+(-\lambda)+(2I_{14}-1)(a_-(\lambda)+(-1)^n a_-(-\lambda)]+$ $+b(c,s,I_{14},\lambda)\}$, если учесть, что в силу (2.25) $y(\lambda)^2=$ $=\{n+1;0,0,b(c,I_{14},\lambda)\}$ и $[y(\lambda)]^m=\{n+1;\ 0,0,0\}$ при $m\geqslant 3$.

Формулы (2.23) для функций $p_2(\lambda)\pm q_2(\lambda)$ получаются из (2.26) и последнего равенства после элементарных преобразований.

Введем для краткости обозначение: $A_\pm(\lambda,m,\theta)=e^{-i\pi\theta}a_\pm(\lambda)+$ $+(-1)^m e^{-i\pi\theta}a_\pm(-\lambda)$ (2.29), поскольку именно такие функции при разных значениях параметров m,θ встречаются в формулах (2.22), (2.23), (2.24).

Согласно (2.12) $A_{\pm}(\lambda, m, \theta) = -(2i)^{-n-1}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\Big[u_{n+1}^{+'}\left(\frac{\pi}{2}-\xi\right) \pm$

$\pm u_{n+1}^{-1}\left(\frac{\pi}{2}-\xi\right)\Big]\cdot[e^{i\pi\theta}e^{-2i\lambda\xi}+(-1)^m e^{-i\pi\theta}e^{2i\lambda\xi}]\,d\xi = -(2i)^{-n-1}\times$

$$\times 2(i)^m\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[u_{n+1}^{+'}\left(\frac{\pi}{2}-\xi\right) \pm u_{n+1}^{-'}\left(\frac{\pi}{2}-\xi\right)\right]\cos\left(2\lambda\xi+\pi\left(\frac{m}{2}-\theta\right)\right]d\xi =$$

$$= -(2^{-n})(i)^{m-n-1}\cdot(-1)^n\left\{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[q_+^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}-\xi\right) \pm q_-^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.-\xi\right)\right]\cos\left[2\lambda\xi+\pi\left(\frac{m}{2}-\theta\right)\right]d\xi + (-1)^n\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[p_{n+1}^{+}\left(\frac{\pi}{2}-\xi\right) \pm\right.$$

$$\left.\left.\pm p_{n+1}^{-}\left(\frac{\pi}{2}-\xi\right)\right]\cos\left[2\lambda\xi+\pi\left(\frac{m}{2}-\theta\right)\right]d\xi\right\}$$

и, так как $p_{n+1}^{\pm}(\xi)\in W_2^1\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, то во втором интеграле можно провести интегрирование по частям: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[p_{n+1}^{+}\left(\frac{\pi}{2}-\xi\right) \pm\right.$

$$\left.\pm p_{n+1}^{-}\left(\frac{\pi}{2}-\xi\right)\right]\cos\left[2\lambda\xi+\pi\left(\frac{m}{2}-\theta\right)\right]d\xi = (2\lambda)^{-1}\left\{\sin\left[\lambda\pi+\right.\right.$$

$$\left.+\pi\left(\frac{m}{2}-\theta\right)\right]\left[p_{n+1}^{+}(0) \pm p_{n+1}^{-}(0)\right] -$$

$$-\sin\pi\left(\frac{m}{2}-\theta\right)\left[p_{n+1}^{+}\left(\frac{\pi}{2}\right) \pm p_{n+1}^{-}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[p_{n+1}^{+}\left(\frac{\pi}{2}-\xi\right) \pm\right.$$

$$\left.\left.\pm p_{n+1}^{-}\left(\frac{\pi}{2}-\xi\right)\right]'\sin\left[2\lambda\xi+\pi\left(\frac{m}{2}-\theta\right)\right]d\xi\right\}.$$

Поэтому $A_{\pm}(\lambda, m, \theta) = -(-2)^{-n}(i)^{m-n-1}\left\{C_{\pm}\left(\lambda, \frac{m}{2}-\theta\right)+\right.$

$+(-1)^n(2\lambda)^{-1}\left[P_{\pm}(0)\sin\left(\lambda\pi+\pi\left(\frac{m}{2}-\theta\right)\right)-P_{\pm}\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\pi\left(\frac{m}{2}-\right.\right.$

$\left.\left.\left.-\theta\right)+\rho_{\pm}(\lambda)\right]\right\}$ **(2.30)**, где по определению $C_{\pm}(\lambda, s) =$

$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}[q_+^{(n)}(x) \pm q_-^{(n)}(x)]\cos[2\lambda x+\pi s]\,dx$ **(2.31)**;

$P_\pm(x) = p^+_{n+1}(x) \pm p^-_{n+1}(x)$ (2.32), а функции $\rho_\pm(\lambda)$ принадлежат k_2.

§ 3. **Асимптотические формулы для собственных значений регулярных краевых задач.** По определению (2.7) существует три типа регулярных граничных условий. В дальнейшем через I, II, III обозначается как тип, так и множество краевых задач этого типа, а через II′ — множество краевых задач типа II, удовлетворяющих дополнительному ограничению $(I_{12}+I_{34})^2 \neq 1$. Регулярные краевые задачи мы относим к классу A, если $I_{12}+I_{34}=0$, и к классу B, если $I_{12}+I_{34}\neq 0$, а пересечения множеств $A \cap \mathrm{I}$, $A \cap \mathrm{II}$, $A \cap \mathrm{III}$, $B \cap \mathrm{I}$, $B \cap \mathrm{II}$ обозначаем через $A\,\mathrm{I}$, $A\,\mathrm{II}$, $A\,\mathrm{III}$, $B\,\mathrm{I}$, $B\,\mathrm{II}$. (Отметим, что множество $B \cap \mathrm{III}$ — пусто).

В предыдущем параграфе мы выясним, что характеристическое уравнение регулярной краевой задачи с потенциалом $q(x) \in W^n_2\left[-\frac{\pi}{2},0\right]\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ при больших $|\lambda|$ эквивалентно последовательностям двух разных уравнений. Именно по этой причине ее собственные значения разбиваются на две серии со своими асимптотическими формулами. Однако эти уравнения сводятся к одному, если функции $q_j(\lambda) = (\pi i)^{-1}\ln \Psi_j(\lambda)$ постоянны, и в этом случае собственные значения удовлетворяют единой асимптотической формуле. Из равенств (2.16′), (2.19′), (2.20′), определяющих функции $\Psi_j(\lambda)$, видно, что они становятся постоянными, когда $F(\lambda) \equiv 0$, что согласно (2.5) возможно тогда и только тогда, когда $I_{12}+I_{34}=0$, $\sigma_+(\lambda,0)+\sigma_-(-\lambda,0)\equiv 0$. Из дополнения к лемме 4 следует, что оба эти равенства выполняются, если граничные условия относятся к классу A и потенциал $q(x)$ принадлежит пространству $W^n_2\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Поэтому следует ожидать, что собственные значения регулярной краевой задачи класса A с потенциалом $q(x)\in W^n_2\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ удовлетворяют единой асимптотической формуле. Если же задача относится к классу B, либо потенциал $q(x)\in W^n_2\left[-\frac{\pi}{2},0\right]\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ не принадлежит пространству $W^n_2\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, то собственные значения разбиваются на две серии, для каждой из которых выполняется своя асимптотическая формула. Перейдем теперь к точным формулировкам и доказательствам этих утверждений.

Теорема 1. *Собственные значения регулярной краевой задачи (1), (2) с потенциалом $q(x)\in W^n_2\left[-\frac{\pi}{2},0\right]\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ распадаются на две серии, для каждой из которых справедлива своя асимптотическая формула.*

У краевых задач типа I эти серии состоят из последовательностей $\mu_0(\mathrm{I})$, $\mu_2(\mathrm{I}),\ldots$; $\mu_1(\mathrm{I})$, $\mu_3(\mathrm{I}),\ldots$ *вида* $\sqrt{\mu_k(\mathrm{I})} =$

$$= k + \sum_{1 \leqslant 2j+1 \leqslant n+3} (a_{2j+1}(\mathrm{I}) + (-1)^k b_{2j+1}(\mathrm{I}))\, k^{-(2j+1)} +$$
$$+ r_{n+1}(\mathrm{I}, k)\, k^{-(n+1)} + r_{n+2}(\mathrm{I}, k)\, k^{-(n+2)} + r_{n+3}(\mathrm{I}, k)\, k^{-(n+3)}. \quad (3.1)$$
II — *из последовательностей* $\mu_1^+(\mathrm{II}), \mu_2^+(\mathrm{II}), \ldots; \mu_1^-(\mathrm{II}), \mu_2^-(\mathrm{II}), \ldots$ *вида* $\sqrt{\mu_k^{\pm}(\mathrm{II})} = 2k \pm [\theta + \sum_{1 \leqslant j \leqslant n+3} d_j(\mathrm{II})(\pm 2k + \theta)^{-j} + \sum_{j=1}^{3} r_{n+j}(\mathrm{II}, \pm 2k + \theta)(\pm 2k + \theta)^{-(n+j)}]$ **(3.2)**; III — *из последовательностей* $\mu_2(\mathrm{III}), \mu_4(\mathrm{III}), \ldots; \mu_1(\mathrm{III}), \mu_3(\mathrm{III}), \ldots$ *вида* $\sqrt{\mu_k(\mathrm{III})} = k + \sum_{1 \leqslant 2j+1 \leqslant n+2} (a_{2j+1}(\mathrm{III}) + (-1)^k b_{2j+1}(\mathrm{III}))\, k^{-(2j+1)} + \sum_{j=1,2} r_{n+j}(\mathrm{III}, k)\, k^{-(n+j)}$. (3.3) В этих формулах коэффициенты $a_{2j+1}(J)$, $b_{2j+1}(J)$ $(J = \mathrm{I}, \mathrm{III})$, $d_j(\mathrm{II})$ не зависят от k, последовательности $r_{n+3}(\mathrm{I}, k)$, $r_{n+3}(\mathrm{II}, \pm 2k + \theta)$, $r_{n+2}(\mathrm{III}, k)$ принадлежат пространству l_2 и

$$\begin{cases} r_{n+1}(\mathrm{I}, k) = (-2)^{-n} \cdot (2\pi)^{-1} C_+\left(k, \frac{n}{2}\right), \\ r_{n+2}(\mathrm{I}, k) = -(-2)^n (2\pi)^{-1} \left\{ (I_{14} + I_{23})\; C_-\left(k, \frac{n+1}{2}\right) - \right. \\ - [I_{14} - I_{23} + (-1)^k (I_{12} + I_{34})] \left[C_+\left(k, \frac{n+1}{2}\right) - \right. \\ \left.\left. - \frac{1}{\pi} C_+^1 \left(k, \frac{n}{2}\right) \right] \right\} + b(\mathrm{I}, k); \end{cases} \qquad (3.1')$$

$$\begin{cases} r_{n+1}(\mathrm{II}, \pm 2k + \theta) = (-2)^n (2I_{14} - 1)(2\pi \sin \pi\theta)^{-1} C_-\left(\pm 2k + \theta, \right. \\ \left. \frac{n+1}{2} - \theta\right), \qquad (3.2') \\ r_{n+2}(\mathrm{II}, \pm 2k + \theta) = -(-2)^{-n}\, I_{13} (2\pi \sin \pi\theta)^{-1} \left\{ C_+\left(\pm 2k + \right.\right. \\ \left. + \theta, \frac{n+2}{2} - \theta\right) + (2I_{14} - 1)\left(C_-\left(\pm 2k + \theta, \frac{n+2}{2} - \theta\right) - \right. \\ \left.\left. - \frac{1}{\pi} C'_-\left(\pm 2k + \theta, \frac{n+1}{2} - \theta\right)\right)\right\} + b(\mathrm{II}; \theta, I_{14}; \pm 2k + \theta); \end{cases}$$

$$r_{n+1}(\mathrm{III}, k) = (-2)^{-n} (2\pi)^{-1} C_+\left(k, \frac{n}{2}\right), \qquad (3.3')$$

где $C_{\pm}(\beta, \alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[q_+^{(n)}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \pm q_-^{(n)}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \right] \cos(2\beta t + \pi\alpha)\, dt,$ (3.4)

$$C_{\pm}^1(\beta, \alpha) = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \left[q_+^{(n)}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \pm q_-^{(n)}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \right] \sin(2\beta t + \pi\alpha)\; dt \qquad (3.4')$$

и последовательности $b(\mathrm{I}, k)$, $b(\mathrm{II}; \theta, I_{14}; \pm 2k + \theta)$ принадлежат пространству l_2, причем первая не зависит от граничных условий, а вторая зависит только от θ и I_{14}.

При этом, если краевая задача относится к классу А и потенциал принадлежит пространству $W_2^n\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, то

$$b_{2j+1}(\mathrm{I}) = b_{2j+1}(\mathrm{III}) = d_{2j}(\mathrm{II}) = 0, \quad \theta = \frac{1}{2}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала краевую задачу первого типа ($J_{24} = 1$). Согласно лемме 5 при больших $|\lambda|$ ее характеристическое уравнение эквивалентно уравнениям

$$\lambda = 2k + p_1(\lambda) + q_1(\lambda); \quad \lambda = 2k + 1 + p_1(\lambda) - q_1(\lambda) \tag{3.6}$$

корни которых лежат, очевидно, вблизи чисел $2k$ и $2k+1$. Следовательно, собственные задачи (они равны квадратам корней характеристического уравнения) можно занумеровать целыми числами так, что $\lim\limits_{k\to\infty}(\sqrt{\mu_k} - k) = 0$. При таком способе нумерации последовательности $\sqrt{\mu_{2k}}$ и $\sqrt{\mu_{2k+1}}$ при больших k будут удовлетворять соответственно первому и второму уравнениям (3.6). Из леммы 2 и асимптотического представления (2.22) следует, что решения уравнений $\lambda = z + p_1(z) \pm q_1(z)$ **(3.7)** имеют вид: $\lambda = z + g_\pm(z)$; $g_\pm(z) = \{n+1;\ \gamma^\pm,\ \alpha(z),\ \beta^\pm(z)\}$ **(3.8)**,

где $\gamma^\pm = \frac{1}{\pi i}\left[-C_1^+ - C_1^- - i(J_{14} - J_{23}) \mp i(J_{12} + J_{34})\right]$; $\alpha(z) = \frac{A_+(z,\ n,\ 0)}{2\pi i}$; $\beta_\pm(z) = \frac{1}{2\pi}[(J_{14} + J_{23})A_-(z,\ n+1,0) - (J_{14} - J_{23} \pm$

$$\pm\{J_{12} + J_{34}\}) \times (A_+(z,\ n+1,0) + \frac{1}{\pi i}A'_+(z,\ n,\ 0)) + b^\pm(z)], \tag{3.9}$$

и функции $b^\pm(z) \in \widetilde{K}_2$ не зависят от граничных условий. (Мы воспользовались здесь обозначениями (2.29)). Поэтому $\sqrt{\mu_{2k}} = 2k + g_+(2k)$; $\sqrt{\mu_{2k+1}} = 2k + 1 + g_-(2k+1)$ **(3.10)**, и для вывода формулы (3.1) остается воспользоваться асимптотическими представлениями функций $g_\pm(z)$, вытекающими из (3.8), (3.9). Поскольку функции $p_1(\lambda)$, $q_1(\lambda)$ — нечетны, нечетными являются также функции $g_\pm(z)$, и в их асимптотических представлениях $g_\pm(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} r_j^\pm z^{-j} + \alpha(z)z^{-(n+1)} + \beta^\pm(z)z^{-(n+2)} + (\rho_{n+3}^\pm(z) + o(z^{-1}))z^{-(n+3)}$ коэффициенты $r_j^\pm$ при четных степенях z равны нулю $r_{2l}^\pm = 0$ **(3.11)**. Отсюда вытекают такие формулы для последовательностей $g_\pm(k)$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots)$

$$g_\pm(k) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n+3} r_j^\pm k^{-j} + \alpha(k)k^{-(n+1)} + \beta^\pm(k) k^{-(n+2)} + \varepsilon_1^\pm(k)k^{-(n+3)}, \tag{3.12}$$

где $r_{2l}^\pm = 0$ и $\varepsilon_1^\pm(k) \in l_2$, поскольку $\rho_{n+3}^\pm(z) \in \widetilde{K}_2$. Обращаясь к равенствам (3.10), мы видим, что значения функции $g_+(k)$ ($g_-(k)$) нам понадобятся только при четных (нечетных) k. Поэтому целесообразно ввести последовательность $g(k) = \frac{1}{2}[(g_+(k) + g_-(k)) +$

$+(-1)^k(g_+(k)-g_-(k))]$ **(3.13)**, совпадающую с последовательностью $g_+(k)(g_-(k))$ при четных (нечетных) k. Теперь равенства (3.10) можно объединить в одно $\sqrt{\mu_k}=k+g(k)$ **(3.14)**, где согласно (3.12), (3.13) $g(k)=\sum\limits_{1<j<n+3}(a_j+(-1)^k b_j)k^{-j}+\alpha(k)k^{-(n+1)}+$ $+\beta_k k^{-(n+2)}+\varepsilon(k)k^{-(n+3)}$ **(3.15)** и $a_j=\frac{1}{2}(r_j^+ + r_j^-)$, $b_j=\frac{1}{2}(r_j^+ - r_j^-)$; $\beta_k=\frac{1}{2}(\beta^+(k)+\beta^-(k))+(-1)^k(\beta^+(k)-\beta^-(k))$, причем $a_{2l}=b_{2l}=$ $=0$, $\varepsilon(k)\in l_2$. Далее из равенств *(3.9)* после элементарных преобразований, использующих тождества (2.30), следует $\alpha(k)=$ $=\frac{(-2)^n}{2\pi}C_+\left(k,\ \frac{n}{2}\right)+\frac{2^{-n}}{4\pi}\sin\frac{\pi n}{2}\left[P_+(0)(-1)^k+P_+\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]k^{-1}+\varepsilon(k)k^{-1}$; $\beta(k)=-\frac{(-2)^{-n}}{2\pi}\left\{\left(J_{14}+J_{23})C_-\left(k,\ \frac{n+1}{2}\right)-[J_{14}-J_{23}+(-1)^k(J_{12}+\right.\right.$ $\left.\left.+J_{34})]\times\left[C_+\left(k,\ \frac{n+1}{2}\right)-\frac{1}{\pi}C'_+\left(k_1\frac{n}{2}\right)\right]\right\}-\frac{2^{-n}}{4\pi}\sin\frac{\pi(n+1)}{2}\{(J_{14}+J_{23})\times$ $\times\left[P_-(0)(-1)^k-P_-\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]-[J_{14}-J_{23}+(-1)^k(J_{12}+J_{34})]\,P_+\left(\frac{\pi}{2}\right)\Big\}\times$ $\times\,k^{-1}+b(k)+\varepsilon_2(k)k^{-1}$, где последовательности $\varepsilon_1(k)$, $b(k)$, $\varepsilon_2(k)$ принадлежат пространству l_2, причем первые две не зависят от параметров граничных условий. Асимптотическая формула (3.1) получается из (3.14), если в правую часть (3.15) подставить полученные выражения для $\alpha(k)$, $\beta(k)$ и ввести такие обозначения:

$$a_j(\mathrm{I})=a_j,\quad b_j(\mathrm{I})=b_j\quad (1\leqslant j\leqslant n+1); \tag{3.16}$$

$$\begin{cases} a_{n+2}(\mathrm{I})=a_{n+2}-\frac{2^{-n}}{4\pi}\sin\frac{\pi n}{2}P_+\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ b_{n+2}(\mathrm{I})=b_{n+2}+\frac{2^{-n}}{4\pi}\sin\frac{\pi n}{2}P_+(0)\end{cases}; \tag{3.16'}$$

$$a_{n+3}(\mathrm{I})=a_{n+3}+\frac{2^{-n}}{4\pi}\sin\frac{\pi(n+1)}{2}\left\{(J_{14}+J_{23})P_-\left(\frac{\pi}{2}\right)+(J_{14}-\right.$$
$$\left.-J_{23})P_+\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}; \tag{3.17}$$

$$b_{n+3}(\mathrm{I})=b_{n+3}-\frac{2^{-n}}{4\pi}\sin\frac{\pi(n+1)}{2}\left\{(J_{14}+J_{23})P_-(0)-(J_{12}+\right.$$
$$\left.+J_{34})P_+\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}; \tag{3.17'}$$

$$b(\mathrm{I},\ k)=\varepsilon_1(k)+b(k). \tag{3.18}$$

Отметим, что коэффициенты $a_j(\mathrm{I})$, $b_j(\mathrm{I})$ с четными номерами $j=$ $=2l$ остаются равными нулю.

Наконец, если краевая задача относится к классу $A(J_{12}+$ $+J_{34}=0)$ и потенциал $q(x)$ принадлежит пространству $W_2^n\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$, то, как было показано выше, в уравнениях (3.7) $q_1(z)\equiv 0_+$, а, значит, $g_+(z)=g_-(z)$, Следовательно, в этом случае $r_j^+=r_j^-$ и

$b_j = 0$ при всех $j = 1, 2, \ldots, n+3$. Согласно (2.32) $P_\pm(0) = p_{n+1}^+(0) \pm p_{n+1}^-(0)$, а в силу дополнения к лемме 4 в рассматриваемом случае $p_{n+1}^+(0) + (-1)^{n+1} p_{n+1}^-(0) = 0$. Поэтому $P_\pm(0) = p_{n+1}^+(0) + (-1)^{n+1} p_{n+1}^-(0) + [(-1)^n \pm 1]\, p_{n+1}^-(0) = [(-1)^n \pm 1]\, p_{n+1}^-(0)$,

откуда следует, что при всех целых значениях $n = 0, 1, \ldots$ $\sin\frac{\pi n}{2} P_+(0) = \sin\frac{\pi n}{2}[(-1)^n + 1]\, p_{n+1}^-(0) = 0$, $\sin\frac{\pi(n+1)}{2} P_-(0) = \sin\frac{\pi(n+1)}{2}[(-1)^n - 1]\, p_{n+1}^-(0) = 0$.

Обращаясь к формулам (3.16′), (3.17′), находим, что $b_j(\mathrm{I}) = b_j = 0$ при всех $j = 1, 2, \ldots, n+3$.

Таким образом, формула (3.1) и ее модификация для краевых задач класса A с потенциалом $q(x) \in W_2^n\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ полностью доказана.

Асимптотическая формула (3.3) для краевых задач типа III и ее модификация в случае, когда $J_{12} + J_{34} = 0$, $q(x) \in W_2^n\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, доказывается точно так же.

Рассмотрим теперь краевую задачу типа II′ ($J_{24} = 0$, $J_{14} + J_{32} = 1$, $(J_{12} + J_{34})^2 \neq 1$). Согласно лемме 5 ее характеристическое уравнение при больших $|\lambda|$ эквивалентно уравнениям $\lambda = 2k + p_2(\lambda) + q_2(\lambda)$; $\lambda = 2k + p_2(\lambda) - q_2(\lambda)$, в которых функция $p_2(\lambda)$ — нечетна, а функция $q_2(\lambda)$ — четна. Если $\lambda_k^\pm$ — корни этих уравнений $\lambda_k^\pm = 2k + p_2(\lambda_k^\pm) \pm q_2(\lambda_k^\pm)$, то $-\lambda_k^+ = -2k - p_2(\lambda_k^+) - q_2(\lambda_k^+) = -2k + p_2(-\lambda_k^+) - q_2(-\lambda_k^+)$ и $-\lambda_k^+ = \lambda_{-k}^-$. Следовательно, множества $\{(\lambda_k^+)^2\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{(\lambda_k^-)^2\}_{-\infty}^{\infty}$ совпадают, и уже первое из них содержит все (достаточно большие) собственные значения рассматриваемой задачи. Это позволяет разбить все собственные значения на две серии $\{\mu_k^+\}$, $\{\mu_k^-\}$ ($k = 1, 2, \ldots$) так, что при больших k $\sqrt{\mu_k^\pm} = \pm\lambda_{\pm k}^+$, т. е. числа $\sqrt{\mu_k^+}$, $\sqrt{\mu_k^-}$ удовлетворяют уравнениям $\lambda = \pm 2k + p_2(\lambda) + q_2(\lambda)$. Полагая, в соответствии с равенствами (2.23) $q_2(\lambda) = \theta + \hat{q}_2(\lambda)$, мы придем к уравнениям $\lambda = \pm 2k + \theta + p_2(\lambda) + \hat{q}_2(\lambda)$ **(3.19)**, решения которых, согласно лемме 2, представим в виде $\lambda = \pm 2k + \theta + g(\pm 2k + \theta)$, $g(z) = \{n+1; \gamma, \alpha(z), \beta(z)\}$ **(3.20)**, где $\gamma = \frac{1}{\pi i}[iJ_{13} - C_1^+ - C_1^-]$; $\alpha(z) = \frac{-(2J_{14} - 1)}{2\pi s} \times A_-(z, n+1, \theta)$; $\beta(z) = \frac{J_{13}}{2\pi i s}[A_+(z, n+2, \theta) + (2J_{14} - 1) \times \{A_-(z, n+2, \theta) + \frac{1}{\pi i} A'_-(z, n+1, \theta)\}] + b(\theta, J_{14}, z)$ **(3.21)**, и функция $b(\theta, J_{14}, z) \in k_2$ зависит от граничных условий только через θ, J_{14}. Поэтому $\pm\sqrt{\mu_k} = \pm 2k + \theta + g(\pm 2k + \theta)$ или $\sqrt{\mu_k} =$

$=2k\pm\{\theta+g(\pm 2k+\theta)\}$. Теперь для вывода формулы (3.2) нужно воспользоваться асимптотическим представлением функции $g(z)$, вытекающим из (3.20), (3.21), и произвести преобразования последовательностей $\alpha(\pm 2k+\theta)$, $\beta(\pm 2k+\theta)$ с помощью тождеств (2.30) аналогично тому, как это было сделано выше.

Если краевая задача относится к классу A, а потенциал принадлежит пространству $W_2^n\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, то в уравнении (3.19) $\tilde{q}_2(\lambda)\equiv 0$, откуда в силу нечетности функции $p_2(\lambda)$ следует нечетность функции $g(z)$ и равенства $d_{2j}(\mathrm{II})=0$. Кроме того, так как $c=-(J_{12}+J_{34})=0$, то $\theta=\frac{1}{2}$. Отметим еще, что в этом случае, введя новую нумерацию собственных значений $\mu_{2k}=\mu_k^+$, $\mu_{2k-1}=\mu_k^-$ $(k=1, 2, \ldots)$, мы придадим формуле (3.2) привычный вид $\sqrt{\mu_k}=k+\frac{1}{2}+\sum\limits_{1\leqslant 2j+1\leqslant n+3} d_{2j+1}(\mathrm{II})\left(k+\frac{1}{2}\right)^{-(2j+1)}+$ $+\sum\limits_{j=1}^{3} r_{n+j}\left(\mathrm{II},\ k+\frac{1}{2}\right)\left(k+\frac{1}{2}\right)^{-(n+j)}$, показывающий, что собственные значения действительно удовлетворяют единой асимптотической формуле.

§ 4. **Необходимые и достаточные условия принадлежности потенциала $q(x)$ пространствам $W_2^n\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и $W_2^n\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.** Обозначим через K, $\hat{K}$ две регулярные краевые задачи, порождаемые на интервале $[-\pi/2, \pi/2]$ одним и тем же уравнением (1). Условимся все величины, относящиеся к задаче $\hat{k}$, снабжать значком $\wedge$. Например, μ_k — собственные значения задачи K, $\hat{\mu}_k$ — задачи K и т. д. Граничные условия рассматриваемых задач считаем как всегда нормированными так, что $J_{24}=1$ для задач типа I, $J_{14}+J_{32}=1$ — для задач типа II и $J_{13}=1$ — для задач типа III.

Основная наша цель состоит в описании тех пар краевых задач K, $\hat{K}$, которые позволяют по асимптотическому поведению их собственных значений сделать заключение о гладкости потенциала. Назовем пару задач K, $\hat{K}$ допустимой в следующих четырех случаях: $K\in\mathrm{I}$, $\hat{K}\in\mathrm{I}$; $J_{14}+J_{23}\neq\hat{J}_{14}+\hat{J}_{23}$ (I,I) $\hat{K}\in\mathrm{I}$, $\hat{K}\in\mathrm{II}'$; $2\hat{J}_{14}-1\neq 0$ (I,II′) (4.1) $K\in\mathrm{II}'$, $\hat{K}\in\mathrm{II}'$; $2J_{14}-1=2\hat{J}_{14}-1\neq 0$, $\theta=\hat{\theta}$, $J_{13}\neq\hat{J}_{13}$ (II′,II′) $K\in\mathrm{III}$, $\hat{K}\in\mathrm{II}'$; $2\hat{J}_{14}-1\neq 0$. (III,II′) Если допустимая пара K, $\hat{K}$ порождена уравнением (1) с потенциалом, принадлежащим пространству $W_2^n[-\pi/2, 0][0, \pi/2]$, то, согласно теореме 1, собственные значения этих краевых задач удовлетворяют таким асимптотическим формулам:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\mu_k} &= k + \sum_{1<2j+1<n+2} (a_{2j+1} + (-1)^k b_{2j+1})\, k^{-(2j+1)} + \varepsilon(k) k^{-(n+1)} \\ \sqrt{\mu_k} - \sqrt{\tilde{\mu}_k} &= \sum_{1\le 2j+1<n+1} (\tilde{a}_{2j+1} + (-1)^k \tilde{b}_{2j+1})\, k^{-(2j+1)} + \tilde{\varepsilon}(k)\, k^{-(n+2)}\end{aligned}\right\};$$

$$\text{(I,I)}$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\mu_k} &= k + \sum_{1<2j+1<n+1} (a_{2j+1} + (-1)^k b_{2j+1})\, k^{-(2j+1)} + \varepsilon(k)\, k^{-(n+1)} \\ \sqrt{\mu_k^{\pm}} &= 2k \pm [\hat{\theta} + \sum_{1\le j\le n+1} \hat{d}_j (\pm 2k + \hat{\theta})^{-j} + \hat{\varepsilon}^{\pm}(k)(\pm 2k + \hat{\theta})^{-(n+1)}]\end{aligned}\right\};$$

$$\text{(I,II')}$$

$$\text{(4.2)}$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\mu_k^{\pm}} &= 2k \pm [\theta + \sum_{1<j\le n+1} d_j (\pm 2k + \theta)^{-j} + \varepsilon^{\pm}(k)(\pm 2k + \theta)^{-(n+1)}] \\ \sqrt{\mu_k^{\pm}} - \sqrt{\tilde{\mu}_k^{\pm}} &= \pm [\sum_{1\le j\le n+2} \tilde{d}_j (\pm 2k + \theta)^{-j} + \tilde{\varepsilon}^{\pm} (\pm 2k + \theta)^{-(n+2)}]\end{aligned}\right\};$$

$$\text{(II',II')}$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\mu_k} &= k + \sum_{1\le 2j+1<n+1} (a_{2j+1}(3) + (-1)^k b_{2j+1}(3))\, k^{-(2j+1)} + \varepsilon(k)\, k^{-(n+1)} \\ \sqrt{\mu_k^{\pm}} &= 2k \pm [\hat{\theta} + \sum_{1\le j\le n+1} \hat{d}_j (\pm 2k + \hat{\theta})^{-j} + \hat{\varepsilon}^{\pm}(k)(\pm 2k + \hat{\theta})^{-(n+1)}]\end{aligned}\right\},$$

$$\text{(III,II')}$$

где коэффициенты a_j, b_j, d_j, $\hat{d}_j$, $\tilde{a}_j$, $\tilde{b}_j$, $\tilde{d}_j$, $a_j(3)$, $b_j(3)$ не зависят от k и последовательности $\varepsilon(k)$, $\tilde{\varepsilon}(k)$, $\varepsilon^{\pm}(k)$, $\hat{\varepsilon}^{\pm}(k)$, $\tilde{\varepsilon}^{\pm}(k)$ принадлежат пространству l_2.

Таким образом, выполнение этих асимптотических формул является необходимым условием для принадлежности потенциала пространству $W_2^n[-\pi/2, 0][0, \pi/2]$. Оказывается, что достаточным условием является их выполнение для какой-нибудь одной пары допустимых краевых задач, т. е. справедлива

Теорема 2. *Для того чтобы в уравнении (1) потенциал $q(x)$ принадлежал пространству W_2^n $[-\pi/2,0][0, \pi/2]$, необходимо и достаточно, чтобы для какой-нибудь одной пары K, $\hat{K}$ допустимых краевых задач, порождаемых этим уравнением, выполнялись соответствующие ей асимптотические формулы (4.2).*

Доказательство. Как уже отмечалось выше, необходимость этих условий является непосредственным следствием теоремы 1. Предпошлем доказательству достаточности следующее замечание. Последовательность $\varphi_k(x) = \cos[2(2k + \bar{\theta})x + \pi\bar{s}]$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$, $\pi(\bar{\theta} + \bar{2s}) \neq 0 \pmod{\pi}$ состоит из всех собственных функций краевой задачи $-y'' = \mu y \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$; $y(0)\cos\pi \times$

$\times(\bar\theta+\bar s)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\pi\bar s,\ y'(0)\sin\pi(\bar\theta+\bar s)=y'\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\pi\bar s$. Сопряженная к ней задача порождается тем же уравнением и граничными условиями $y(0)\sin\pi s=y\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\pi(\theta+s)$, $y'(0)\cos\pi s=y'\left(\frac{\pi}{2}\right)\times$ $\times\cos\pi(\theta+s)$, а ее собственные функции $\psi_k(x)=\sin[2(2k+\theta)x-$ $-\pi(\theta+s)]$ биортогональны функциям $\varphi_k(x)$:

$$(\psi_{k_1}(x),\ \varphi_{k_2}(x))=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\psi_{k_1}(x)\overline{\varphi_{k_2}(x)}\,dx=-\frac{\pi}{4}\sin\pi(\theta+2s)\cdot\delta(k_1-k_2).$$

Так как эти краевые задачи регулярны ($J_{24}=0,\ J_{14}+J_{32}=$ $=-\sin\pi(\theta+2s)\neq 0$), то их собственные функции образуют базисы в пространстве $L_2\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$, и любая функция $f(x)\in L_2\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ разлагается в ряд Фурье $f(x)=-\frac{4}{\pi\sin\pi(\theta+2s)}\sum f_k\psi_k(x)$, $f_k=$ $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos[2(2k+\theta),\ x+\pi s]\,dx$, сходящийся в метрике пространства $L_2\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$. Например,

$$1=-\frac{4}{\pi\sin\pi(\theta+2s)}\sum\frac{\sin\pi(\theta+s)-\sin\pi s}{2(2k+\theta)}\sin[2(2k+\theta)x-\pi(\theta+s)]. \tag{4.3}$$

Далее, согласно определению (2.31) функций $C_\pm(\lambda,\ s)$, $C_\pm(2k+$ $+\theta,\ s)=\int^{\frac{\pi}{2}}\left[q_+^{(n}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\pm q_-^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]\cos\,[2(2k+\theta)x+\pi s]\ dx$

и, значит

$$\overset{(n)}{q+}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\pm q_-^n\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\frac{4}{\pi\sin\pi(\theta+2s)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_\pm\ (2k+\theta,\ s)\times$$
$$\times\sin[2(2k+\theta)x-\pi(\theta+s)]. \tag{4.4}$$

Перейдем теперь к доказательству достаточности сформулированных в теореме условий. Пусть, например, для собственных значений допустимой пары $K\in\mathrm{II}'$, $\acute K\in\mathrm{II}'$ краевых задач справедливы асимптотические формулы (4.2), (II′, II′). Предположим, вопреки утверждению теоремы, что в порождающем эту пару краевых задач уравнении (1) потенциал $q(x)$ не принадлежит пространству $W_2^n\left[-\frac{\pi}{2},\ 0\right]\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда найдется такое целое неотрицательное число $m<n$, что $q(x)\in W_2^m\left[-\frac{\pi}{2},\ 0\right]\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$, но

$q(x) \notin W_2^{m+1}\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Из теоремы 1 и определения допустимой пары $K \in \Pi'$, $\acute{K} \in \Pi'$ краевых задач следует, что их собственные значения $\mu_k^\pm$, $\acute{\mu}_k^\pm$ будут удовлетворять таким асимптотическим формулам:

$\sqrt{\mu_k^\pm} = 2k \pm [\theta + \sum_{1 \leqslant j \leqslant m+3} \hat{d}_j(\Pi')(\pm 2k + \theta)^{-j} + r_{m+1}(\Pi', \pm 2k + \theta)(\pm 2k + \theta)^{-(m+1)} + \delta(\pm 2k + \theta)(\pm 2k + \theta)^{-(m+2)}]$; $\sqrt{\mu_k^\pm} - \sqrt{\hat{\mu}_k^\pm} = \pm[\sum_{1 \leqslant j \leqslant m+3} (d_j(\Pi') - \hat{d}_j(\Pi'))(\pm 2k + \theta)^{-j} + (r_{m+2}(\Pi', \pm 2k + \theta) - \hat{r}_{m+2}(\Pi', \pm 2k + \theta))(\pm 2k + \theta)^{-(m+2)} + \delta_1(\pm 2k + \theta) \times (\pm 2k + \theta)^{-(m+3)}]$, где последовательности $\delta(\pm 2k + \theta)$, $\delta_1(\pm 2k + \theta)$ принадлежат пространству l_2. С другой стороны по условию теоремы эти же собственные значения удовлетворяют формулам (4.2), (Π', Π'). Сравнение этих формул показывает, что при $j \leqslant m+1$ $d_j = d_j(\Pi')$, а при $j \leqslant m+2$ $\tilde{d}_j = d_j(\Pi') - \acute{d}_j(\Pi')$ и, следовательно,

$$r_{m+2}(\Pi', 2k + \theta) = \frac{d_{m+2} - d_{m+2}(\Pi')}{2k + \theta} + \frac{\rho(k)}{2k + \theta}; \tag{4.5}$$

$$r_{m+2}(\Pi', 2k + \theta) - \hat{r}_{m+2}(\Pi', 2k + \theta) = \frac{\bar{d}_{m+3}(d_{m+3}(\Pi') - \hat{d}_{m+3}(\Pi'))}{2k + \theta} + \frac{\rho_1(k)}{2k + \theta}, \tag{4.6}$$

где последовательности $\rho(k)$, $\rho_1(k)$ принадлежат пространству l_2. Из равенства (4.5) и формулы (3.2), определяющей функцию $r_{n+1}(\Pi', 2k + \theta)$, следует, что $C_-\left(2k + \theta, \frac{m+1}{2} - \theta\right) = A(D + \rho(k))(2k + \theta)^{-1}$, где A, D — некоторые константы. Отсюда, используя равенства (4.3), (4.4), находим, что

$$q_+^{(m)}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - q_-^{(m)}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\frac{4A}{\pi \sin \pi(m + 1 - \theta)} \sum \frac{D + \rho(k)}{2k + \theta} \times \sin\left[2(2k + \theta)x - \frac{\pi(m+1)}{2}\right] =$$

$$= A_1 D + A_2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\rho(k) \sin\left[2(2k + \theta)x - \pi\frac{m+1}{2}\right]}{2k + \theta}, \tag{4.7}$$

где A_1, A_2 — некоторые константы и $\rho_k \in l_2$. Следовательно, $q_+^{(m)}(x) - q_-^{(m)}(x) \in W_2^1\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (4.8).

Это позволяет в правых частях равенств

$$C_-(2k + \theta, s) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [q_+^{(m)}(x) - q_-^{(m)}(x)] \cos[2(2k + \theta)x + \pi s]\, dx;$$

$$C_-(2k+\theta,\ s) = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} [q_+^{(m)}(x) - q_-^{(m)}(x)]\, x \sin[2(2k+\theta)x + \pi s]\, dx$$

провести один раз интегрирование по частям и привести их к виду

$$C_-(2k+\theta,\ s) = A(s)(2k+\theta)^{-1} + \rho_s(k)(2k+\theta)^{-1}; \qquad (4.9)$$

$$C'_-(2k+\theta,\ s) = B(s)(2k+\theta)^{-1} + \tilde{\rho}_s(k)(2k+\theta)^{-1},$$

где $\rho_s(k)$, $\tilde{\rho}_s(k)$ принадлежат пространству l_2, а коэффициенты $A(s)$, $B(s)$ не зависят от k.

Обратимся теперь к равенству (4.6). По определению допустимой пары $(\mathrm{II}', \mathrm{II}')$ $J_{14} = \hat{J}_{14}$, $\theta = \hat{\theta}$, $J_{13} - \hat{J}_{13} = \triangle_{13} \neq 0$, откуда согласно (3.2′) следует, что

$$r_{m+2}(\mathrm{II}',\ 2k+\theta) - \hat{r}_{m+2}(\mathrm{II}',\ 2k+\theta) = -(-2)^n \triangle_{13}(2\pi \sin n\pi\theta)^{-1} \times$$
$$\times \left\{C_+\left(2k+\theta,\ \frac{m+2}{2} - \theta\right) + (2J_{14} - 1)\left[C_-\left(2k+\theta, \frac{m+2}{2} - \theta\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{\pi} C'_-\left(2k+\theta, \frac{m+1}{2} - \theta\right)\right]\right\}. \qquad (4.10)$$

Сравнение равенств (4.6), (4,9), (4.10) приводит к формуле $C_+\left(2k+\theta,\ \frac{(m+2)}{2} - \theta\right) = \tilde{A}(\tilde{D} + \tilde{\rho}(k))(2k+\theta)^{-1}$ **(4.11)**, где $\tilde{A}$, $\tilde{D}$ — некоторые константы, а последовательность $\tilde{\rho}_k \in l_2$. Из этой формулы, повторяя проведенные выше преобразования, выводим, что $q_+^{(m)}(x) + q_-^{(m)}(x) \in W_2^1\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ **(4.12)**. Сопоставление включений (4.8), (4.12) показывает, что каждая функция $q_+^{(m)}(x) = q^{(m)}(x)$, $q_-^{(m)}(x) = (-1)^m q^{(m)}(-x)$ имеет на интервале $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ одну суммируемую с квадратом производную.

Следовательно, $q(x) \in W_2^{m+1}\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \cup \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$, и сделанное предположение о неверности утверждения теоремы приводит к противоречию.

Доказательства для других возможных вариантов допустимых пар краевых задач проводятся по существу так же.

Рассмотрим теперь допустимые пары краевых задач класса А $(J_{12} + J_{34} = 0)$, порождаемые уравнением (1) с потенциалом $q(x) \in W_2^n\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$. Согласно теореме 1 их собственные значения удовлетворяют асимптотическим формулам (3.1) — (3.3), в которых $b_{2j+1} = \tilde{b}_{2j+1} = b_{2j+1}(3) = d_{2j} = \hat{d}_{2j} = \tilde{d}_{2j} = 0$ **(4.13)**. Следовательно, выполнение формул (4.2) совместно с равенствами (4.13) является необходимым условием принадлежности потенциала пространству $W_2^n[-\pi/2,\ \pi/2]$. Это условие также достаточно.

Теорема 3. *Для того, чтобы в уравнении (1) потенциал $q(x)$ принадлежал пространству $W_2^n[-\pi/2, \pi/2]$, необходимо и достаточно, чтобы для какой-нибудь одной пары K, $\hat{K}$ допустимых краевых задач класса A, порождаемых этим уравнением, выполнялись соответствующие ей асимптотические формулы (4.2) с коэффициентами, удовлетворяющими равенствам (4.13).*

Доказательство. Из вышесказанного видно, что доказательству подлежит лишь достаточность этих условий. Далее, если выполнены условия доказываемой теоремы, то тем более выполнены условия теоремы 2, в силу которой $q(x) \in W_2^n\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Поэтому для того, чтобы доказать принадлежность потенциала пространству $W_2^n[-\pi/2, \pi/2]$, достаточно проверить непрерывность в точке $x=0$ самого потенциала и его производных до $(n-1)$-го порядка включительно. Доказательство этого факта тоже проводится от противного.

Например, если $K \in \mathrm{II}'$, $\hat{K} \in \mathrm{II}'$—допустимая пара класса A, то, как было установлено в процессе доказательства теоремы 2, при любом $m < n$ выполняются равенства (4.5), (4.6). Допустим, что существует такое $m < n$, что $q(x) \in W_2^m\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, но $q(x) \notin W_2^{m+1}\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Если число m — четное, то согласно условиям доказываемой теоремы $d_{m+2} = 0$, а согласно теореме 1 $d_{m+2} \times (\mathrm{II}') = 0$. Поэтому в равенстве (4.7) число D равно нулю и

$$q_+^{(m)}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - q_-^{(m)}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = A_2 \sum_{-\infty}^{\infty} \left(2k + \frac{1}{2}\right)^{-1} \rho(k) \cos 2\left(2k + \frac{1}{2}\right)x,$$

так как у задач класса A $\theta = \frac{1}{2}$, а $m+1$ — нечетное число. Поскольку в правой части этого равенства стоит равномерно сходящийся ряд и $\cos 2\left(2k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} = 0$, то $q_+^{(m)}(0) - q_-^{(m)}(0) = 0$. Но при m четных $q_+^{(m)}(0) = q^{(m)}(+0)$, $q_-^{(m)}(0) = (-1)^m q^{(m)}(-0) = q^{(m)}(-0)$ и, значит, $q^{(m)}(+0) = q^{(m)}(-0)$. Следовательно, вопреки сделанному предположению потенциал $q(x)$ принадлежит пространству $W_2^{m+1}[-\pi/2, \pi/2]$.

Если число m — нечетное, то в формуле (4.6) $d_{m+3} = d_3(\mathrm{II}) = \hat{d}_{m+3}(\mathrm{II}') = 0$, а в равенствах (4.9) коэффициенты $A(s)$, $B(s)$ равны нулю при $s = \frac{m+2}{2} - \frac{1}{2}$, так как в этом случае $\cos[2(2k + \theta)x + s] = (-1)^{\frac{m+1}{2}} \cos 2\left(2k + \frac{1}{2}\right)x$, $\sin[2(2k+\theta)x + s] =$

$= (-1)^{\frac{m+1}{2}} \sin 2\left(2k+\frac{1}{2}\right)x$ и при интегрировании по частям внеинтегральные члены исчезают. Поэтому в формуле (4.11) $\tilde{D}=0$. и согласно (4.4) $q_+^{(m)}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+q_-^{(m)}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\tilde{A}_1\sum_{-\infty}^{\infty}\left(2k+\frac{1}{2}\right)^{-1}\times$ $\times\tilde{\rho}(k)\cos 2\left(2k+\frac{1}{2}\right)x$, откуда при $x=\pi/2$ следует, что $q_+^{(m)}(0)+$ $+q_-^{(m)}(0)=0$. Но при m нечетном $q_+^{(m)}(0)=q^{(m)}(+0)$, $q_-^{(m)}(0)=$ $=(-1)^m q^{(m)}(0)=-q^{(m)}(-0)$ и, значит, $q^{(m)}(+0)-q^{(m)}(-0)=0$. Таким образом, и в этом случае $q(x)\in W_2^{m+1}[-\pi/2,\ \pi/2]$ вопреки сделанному предположению. Доказательства для других вариантов аналогичны.

Сопоставление теорем 2 и 3 приводит к такому следствию: для того чтобы в уравнении (1) потенциал $q(x)\in W_2^m[-\pi/2,\ \pi/2]\cap$ $\cap W_2^n[-\pi/2,\ 0][0,\ \pi/2]\ (m\leqslant n)$, необходимо и достаточно, чтобы для какой-нибудь одной пары допустимых краевых задач класса A, порождаемых этим уравнением, выполнялись соответствующие ей асимптотические формулы (4.2) с коэффициентами, удовлетворяющими таким равенствам: $b_{2j+1}=\hat{b}_{2j+1}=0(3)$ при $2j+1\leqslant m+$ $+1$, $\tilde{b}_{2j+1}=0$ при $2j+1\leqslant m+2; d_{2j}=\hat{d}_{2j}=0$ при $2j\leqslant m+1$, $\tilde{d}_{2j}=0$ при $2j\leqslant m+2$.

Заметим в заключение, что мы не случайно исключили из рассмотрения краевые задачи типа II, у которых $(J_{12}+J_{34})^2=1$. Типичными примерами таких задач могут служить периодическая и антипериодическая краевые задачи. Связь между асимптотическими формулами и гладкостью потенциала у этих задач иная, так как, например, все периодические потенциалы вида $q(x+\tau)$ приводят к тем же спектрам, откуда следует, что средняя точка интервала (или любая другая) не может играть особой роли. Результаты работы [6] указывают на то, что естественные пространства потенциалов для таких задач другие.

Список литературы: 1. *Гасымов М. Г. Левитан Б. М.* Определение дифференциального оператора по двум спектрам. — Усп. мат. наук, 1964, **19**, вып. 2, с. 3—63. 2. *Гасымов М. Г.* Определение уравнения Штурма — Лиувилля с особенностью по двум спектрам. — Докл. АН СССР, 1965, **161**, № 2, с. 274—276. 3. *Лундина Д. Ш.* Точная асимптотика для собственных значений одного класса краевых задач Штурма—Лиувилля. Дифференциальные уравнения и некоторые методы функционального анализа. — Тр. ФТИНТ АН УССР, Киев: Наук. думка, 1978, с. 104—117. 4. *Лундина Д. Ш.* Асимптотические формулы для собственных значений краевой задачи Штурма—Лиувилля и гладкость потенциала. — Теория функций, функц. анализ и их приложения. 1980 г., вып. 33, с. 63—76. 5. *Марченко В. А.* Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения. — Киев: Наук. думка, 1974, с. 53—64. 6. *Марченко В. А. Островский И. В.* Характеристика спектра оператора Хилла. — Мат. сб. 1975, **97**, вып. 4, с. 540—606.

Поступила в редколлегию 24. 09. 80.