УДК 517.54+517.98

*А. Я. ХЕЙФЕЦ*

# РАВЕНСТВО ПАРСЕВАЛЯ В АБСТРАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ИНТЕРПОЛЯЦИИ И СОЕДИНЕНИЕ ОТКРЫТЫХ СИСТЕМ. I.

Изучение абстрактной задачи интерполяции, рассматривавшейся в [4], нами проводится на основании теории открытых систем. Конструкции рассматриваемого типа развиты в работах [1—3], там же имеются дальнейшие ссылки. Работа состоит из двух частей. В первой изложены необходимые для дальнейшего сведения из теории открытых систем. Вторая посвящена собственно исследованию абстрактной задачи интерполяции; приложения к конкретным интерполяционным задачам не рассматриваются.

Остановимся кратко на содержании работы. Ряд интерполяционных задач анализа (Неванлинны—Пика, проблемы моментов и многие другие) укладывается в абстрактную схему, в которой данным задачи («узлам» интерполяции и «интерполируемым значениям») соответствуют оператор и квадратичная форма в некотором линейном пространстве, связанные между собой соотношением определенного вида. Это соотношение позволяет построить по имеющимся объектам унитарный узел в гильбертовом пространстве. Дальнейшее исследование задачи связано с представлением Фурье этого узла и узла, получающегося его соединением с произвольным унитарным узлом, внешние пространства которого фиксированы. При этом мы используем функциональную модель в форме де Бранжа—Ровняка. Сравнение различных форм функциональной модели проведено в [6].

При исследовании конечной степенной проблемы моментов Гамбургера наблюдается следующий эффект: естественному описанию поддается множество решений не самой исходной задачи, а несколько ослабленной (а именно: все моменты, кроме последнего, совпадают с данными, а последний лишь оценивается сверху данным). Аналогичный эффект имеет место и в некоторых других задачах, связанных с интерполяцией на границе области, например, в задаче о лифтинге коммутанта, если характеристическая функция не является внутренней [5].

Рассматриваемая схема исследования задач позволяет объяснить описанный эффект. Точнее говоря, оказывается, что он равносилен известному в теории операторов эффекту, когда при соединении простых узлов может получиться не простой узел; при этом остаточная часть вычисляется [3].

Автор выражает глубокую благодарность В. Э. Кацнельсону и П. М. Юдицкому за полезные обсуждения, а также М. Л. Содину за ряд полезных замечаний.

§ 1. Некоторые определения и факты из теории открытых систем. Здесь мы в основном придерживаемся терминологии и обозначений работы [1]. 1. Определение

унитарного узла и его характеристической функции. Унитарным узлом $\delta$ называется совокупность пространств $H^\delta$ (внутренние состояния), $N_1^\delta$ (пространство входов), $N_2^\delta$ (пространство выходов) и разбитого на блоки унитарного линейного отображения $A^\delta$ пространства $H^\delta \oplus N_1^\delta$ на $H^\delta \oplus N_2^\delta$:

$$A^\delta = \begin{bmatrix} A_{in}^\delta & A_1^\delta \\ (A_2^\delta)^* & A_{12}^\delta \end{bmatrix}, \tag{1.1}$$

где $A_{in} = P_H^{(2)} A \mid H$, $A_{12} = P_{N_2} A \mid N_1$, $A_1 = P_H^{(2)} A \mid N_1$, $A_2^* = P_{N_2} A \mid H$, $P$ — ортогональные проекторы на соответствующие подпространства (при этом $P_H^{(1)}$ из $H \oplus N_1$, $P_H^{(2)}$ — из $H \oplus N_2$). Блочный оператор действует на векторы вида $\begin{bmatrix} h \\ n_1 \end{bmatrix}$, а его значения — векторы вида $\begin{bmatrix} h \\ n_2 \end{bmatrix}$[1].

Характеристической функцией узла $\delta$ называется оператор функция (из $N_1$ в $N_2$):

$$\theta(\zeta) = P_{N_2} (1_{H \oplus N_2} - \zeta A P_H^{(2)})^{-1} A \mid N_1. \tag{1.2}$$

В силу унитарности $A$ она определена и голоморфна при $|\zeta| < 1$. Через блоки оператора $A$ характеристическая функция выражается следующим образом:

$$\theta(\zeta) = A_{12} + \zeta A_2^* (1_H - \zeta A_{in})^{-1} A_1. \tag{1.2'}$$

2. **Основные тождества для характеристической функции узла.** Положим

$$G_1(\zeta) = P_H A (1_{H \oplus N_1} - \zeta P_H A)^{-1} \mid N_1,$$
$$G_2(\zeta)^* = P_{N_2} A (1_{H \oplus N_1} - \zeta P_H A)^{-1} \mid H, \quad (|\zeta| < 1). \tag{1.3}$$

Или в другой форме

$$G_1(\zeta) = (1_H - \zeta A_{in})^{-1} A_1, \quad G_2(\zeta)^* = A_2^* (1_H - \zeta A_{in})^{-1}. \tag{1.3'}$$

В терминах введенных обозначений

$$A (1_{H \oplus N_1} - \zeta P_H A)^{-1} = \begin{bmatrix} A_{in} (1_H - \zeta A_{in})^{-1} & G_1(\zeta) \\ G_2(\zeta)^* & \theta(\zeta) \end{bmatrix}. \tag{1.4}$$

Из унитарности узла вытекают важные соотношения

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1_{N_2} - \theta(\zeta)\theta(\mu)^*}{1 - \xi\bar{\mu}} & \dfrac{\theta(\zeta) - \theta(\mu)}{\zeta - \mu} \\ \dfrac{\theta(\zeta)^* - \theta(\mu)^*}{\bar{\zeta} - \bar{\mu}} & \dfrac{1_{N_1} - \theta(\zeta)^*\theta(\mu)}{1 - \bar{\zeta}\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_2(\zeta)^* \\ G_1(\zeta)^* \end{bmatrix} [G_2(\mu), \ G_1(\mu)]. \tag{1.5}$$

Из них, в частности, следует сжимаемость $\Theta$.

[1] Всюду, где это не приводит к двусмысленности, мы опускаем индекс $\delta$.

3. Узел и динамика (связь последовательностей узлом). Подробно об этом см., например, [2]. Операторный узел задает динамику (эволюцию) открытой системы с дискретным временем по формуле

$$\begin{bmatrix} h(n+1) \\ \varphi_2(n) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} h(n) \\ \varphi_1(n) \end{bmatrix}, \quad (n \geqslant 0),$$

где $h(n) \in H$ — эволюция внутреннего состояния (начальное внутреннее состояние $h(0)$ — произвольно); $\varphi_1(n) \in N_1$—произвольный входной сигнал; $\varphi_2(n) \in N_2$— сигнал, получающийся на выходе.

Для вычисления характеристической функции бывает полезно следующее определяющее ее свойство: пусть $h(0) = 0$, а $\varphi_1(n)$ такова, что ряд $\Phi_1(\zeta) = \Sigma\varphi_1(n)\zeta^n$ сходится в некоторой окрестности нуля, тогда ряд $\Phi_2(\zeta) = \Sigma\varphi_2(n)\zeta^n$ также сходится в окрестности нуля ($\varphi_2(n)$ задается динамикой узла) и $\Phi_2(\zeta) = \Theta(\zeta)\Phi_1(\zeta)$. **(1.6)**

4. Простая и изолированная части узла. Узел называется простым (относительно внешних пространств $N_1$ и $N_2$), если у оператора $A$ нет приводящих подпространств, содержащихся в $H$ и отличных от нулевого. Пусть $H' \subset H$ — максимальное приводящее $A$ подпространство, тогда совокупность пространств $H^\circ = H \ominus H'$, $N_1$, $N_2$ и оператор $A^\circ = A \mid H^\circ \oplus N_1$ образует узел $\delta_0$ (тоже унитарный), который называется простой частью узла $\delta$. При этом операторы $A_1$, $A_2$, $A_{12}$ не изменяются. Характеристическая функция при этом также не изменяется.

Пространство $H'$ и $A \mid H'$ будем называть изолированной (от внешних пространств $N_1$ и $N_2$) частью узла $\delta$. Отметим, что $A \mid H'$— унитарный оператор.

5. Представление Фурье. Унитарный узел может быть реализован в виде функциональной модели, состоящей из двух частей, которые отвечают простой и изолированной частям узла.

а) Рассмотрим следующее преобразование, которое будем называть представлением Фурье, отвечающим простой части узла $\delta$,

$$(Gh)(\zeta) = \begin{bmatrix} G_2(\zeta)^* h \\ \bar{\zeta} G_1(\zeta)^* h \end{bmatrix}, \quad (h \in H, \ |\zeta| < 1). \tag{1.7}$$

Пространство получающихся при этом функций $f(\zeta)$, которое мы будем обозначать через $H^\Theta$, может быть описано внутренним образом: $f(\zeta) = \begin{bmatrix} f_+(\zeta) \\ f_-(\zeta) \end{bmatrix}$, где 1. $f_+(\zeta) \in H^2_+(N_2)$, $f_-(\zeta) \in H^2_-(N_1)$[1], $|\zeta| < 1$; 2. $f(t)$ при почти всех $|t| = 1$ принадлежит области определения оператора

$$\begin{bmatrix} 1_{N_2} & \theta(t) \\ \theta(t)^* & 1_{N_1} \end{bmatrix}^{[-1/2]} \quad \text{и} \quad \int_T < \begin{bmatrix} 1_{N_2} & \theta \\ \theta^* & 1_{N_1} \end{bmatrix}^{[-1]} f, \ f > dm < \infty,$$

где $T$ — единичная окружность; $dm$ — нормированная мера Лебега на ней. Отметим, что по определению область значений оператора

[1] Функции из $H^2_-$ мы считаем продолженными с единичной окружности во внутренность единичного круга антиголоморфным образом, при этом $f_-(0) = 0$.

$\begin{bmatrix} 1_{N_2} & \theta \\ \theta^* & 1_{N_1} \end{bmatrix}^{[-1/2]}$ ортогональна ядру оператора $\begin{bmatrix} 1_{N_2} & \theta \\ \theta^* & 1_{N_1} \end{bmatrix}$. Интеграл в условии 2 задает скалярное произведение в $H^\theta$.

Отображение $G: H \to H^\theta$ унитарно на $H^0$ (внутреннее пространство простой части узла $\delta$) и обращается в ноль на его ортогональном дополнении $H'$, образом является все $H^\theta$. Следовательно,

$$P_{H^0}h = G^*Gh = \int_T [G_2,\ tG_1] \begin{bmatrix} 1_{N_2} & \theta \\ \theta^* & 1_{N_1} \end{bmatrix}^{[-1]} Gh\, dm, \tag{1.8}$$

где сходимость интеграла понимается в слабом смысле (на $H$ или $H^0$).

Оператор $A_{in}$ при отображении $G$ переходит в модельный оператор

$$A_{in}^\theta f = \bar{t}\left(f - \begin{bmatrix} 1_{N_2} & \theta \\ \theta^* & 1_{N_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_+(0) \\ 0 \end{bmatrix}\right), \text{ т. е. } GA_{in} = A_{in}^\theta G. \tag{1.9}$$

Оператор $A_{in}^\theta$ в совокупности с операторами

$$A_1^\theta = \bar{t} \begin{bmatrix} 1_{N_2} & \theta \\ \theta^* & 1_{N_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\theta(0) \\ 1_{N_1} \end{bmatrix}, \quad (N_1 \to H^\theta), \quad (A_2^\theta)^* f = f_+(0), \quad (f \in H^\theta);$$
$$A_{12}^\theta = \theta(0), \quad (N_1 \to N_2)$$

образуют унитарный узел, являющийся функциональной моделью узла $\delta$[1]. Отметим, что

$$(A_1^\theta)^* f = (tf_-)(0), \quad A_2^\theta = \begin{bmatrix} 1_{N_2} & \theta \\ \theta^* & 1_{N_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{N_2} \\ -\theta(0)^* \end{bmatrix}, \quad (N_2 \to H^\theta).$$

И кроме того

$$G_2^\theta(\mu)^* f = f_+(\mu), \quad G_2^\theta(\mu) = \frac{\begin{bmatrix} 1_{N_2} & \theta \\ \theta^* & 1_{N_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{N_2} \\ -\theta(\mu)^* \end{bmatrix}}{1 - t\bar{\mu}}. \quad \bar{\mu} G_1^\theta(\mu)^* f = f_-(\mu),$$

$$G_1^\theta(\mu) = \begin{bmatrix} 1_{N_2} & \theta \\ \theta^* & 1_{N_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\theta(\mu) \\ 1_{N_1} \end{bmatrix} \frac{1}{t - \mu}.$$

б) Для построения функциональной модели, отвечающей изолированной части, воспользуемся следующей конструкцией. Пусть $K$ — гильбертово пространство; $\Gamma$ — линейный оператор из $K$ в $H'$ такой, что замыкание $\Gamma(K)$ — циклическое подпространство унитарного оператора $U = A_{in} | H'$.

Положим $$(Ih)(\zeta) = \frac{1}{2}\Gamma^* \left( \frac{1_H + \zeta A_{in}}{1_H - \zeta A_{in}} + \frac{1_H + \bar{\zeta} A_{in}^*}{1_H - \bar{\zeta} A_{in}^*} \right) P_{H'} h. \tag{1.10}$$

---

[1] Характеристическая функция модельного узла равна $\Theta$. Следовательно, определяемая формулой (1.2) характеристическая функция может быть произвольной сжимающей (не обязательно чистой).

Это гармоническая $K$-значная вектор функция. Ей однозначно соответствует $K$-значная мера на единичной окружности $T$

$$d\nu_h = w - \lim_{r \uparrow 1} (lh)(rt)\, dm(t) = \Gamma^* d\Sigma(t) P_{H'} h, \tag{1.11}$$

где $d\Sigma(t)$ — разложение единицы унитарного оператора $U$.

Определим голоморфную в единичном круге оператор-функцию (из $K$ в $K$):

$$a(\zeta) = \frac{1}{2} \Gamma^* \frac{1_H + \zeta A_{in}}{1_H - \zeta A_{in}} \Gamma. \tag{1.12}$$

Она обладает свойством $a(\zeta) + a(\zeta)^* \geqslant 0$ **(1.13).** Соответствующая мера (операторно-значная)

$$d\sigma(t) = w - \lim_{r \uparrow 1} (a(rt) + a(rt)^*)\, dm(t) = \Gamma^* d\Sigma(t) \Gamma. \tag{1.14}$$

Пространство мер $d\nu_h$, $(h \in H)$ есть пополнение пространства мер вида $d\nu = d\sigma f$ (где $f$ — $K$-значная вектор-функция на $T$) в метрике

$$\langle d\nu,\ d\nu \rangle = \int_T \langle d\sigma f,\ f \rangle = \int_T \langle d\sigma^{[-1]} d\nu,\ d\nu \rangle. \tag{1.15}$$

В этой метрике отображение $h \to d\nu_h$ унитарно на $H'$. На $H^0$ оно обращается в ноль. При этом $d\nu_{A_{in}h} = \bar{t}\, d\nu_h$ **(1.16).** Описанное пространство мер будем обозначать через $H^{d\sigma}$.

Итак формулы (1.7) и (1.11) задают унитарное отображение $H$ на $H^\theta \oplus H^{d\sigma}$ ($H^0$ на $H^\theta$ и $H'$ на $H^{d\sigma}$ соответственно). При этом оператор $A_{in}$ переходит в модельный оператор, задаваемый формулами (1.9) и (1.16) соответственно. Элемент $Gh \oplus d\nu_h$ называется преобразованием Фурье вектора $h$, а свойство унитарности этого преобразования записывается в виде равенства Парсеваля

$$\langle h,\ h \rangle = \int_T \left< \begin{bmatrix} 1_{N_2} & \theta \\ \theta^* & 1_{N_1} \end{bmatrix}^{[-1]} Gh,\ Gh \right> dm + \int_T \langle d\sigma^{[-1]} d\nu_h,\ d\nu_h \rangle. \tag{1.17}$$

6. Соединение узлов. В этом пункте мы рассматриваем одну из возможных операций соединения узлов. Систематическому изучению подобной операции и многих других посвящена работа [2].

Пусть $\alpha$ и $\beta$ узлы, причем $N_1^\alpha = N_2 \oplus L_1$, $N_2^\alpha = N_1 \oplus L_2$. Будем говорить, что узел $\gamma$ получается замыканием узла $\alpha$ посредством узла $\beta$, если $N_2^\beta = N_2$, $N_1^\beta = N_1$, уравнения динамики узлов $\alpha$ и $\beta$

$$\begin{bmatrix} h^\alpha(n+1) \\ \varphi_2^\alpha(n) \end{bmatrix} = A^\alpha \begin{bmatrix} h^\alpha(n) \\ \varphi_1^\alpha(n) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} h^\beta(n+1) \\ \varphi_2^\beta(n) \end{bmatrix} = A^\beta \begin{bmatrix} h^\beta(n) \\ \varphi_1^\beta(n) \end{bmatrix} \tag{1.18}$$

совместно с соотношениями (отражающими факт соединения)

$$\varphi_1^\alpha(n) = \varphi_2^\beta(n) \oplus \varphi_1(n), \quad \varphi_2^\alpha(n) = \varphi_1^\beta(n) \oplus \varphi_2(n) \tag{1.19}$$

допускают исключение $\varphi_1^\beta(n)$ и $\varphi_2^\beta(n)$ и могут быть записаны в виде

$$\begin{bmatrix} h^\alpha(n+1)\oplus h^\beta(n+1) \\ \varphi_2(n) \end{bmatrix} = A^\gamma \begin{bmatrix} h^\alpha(n)\oplus h^\beta(n) \\ \varphi_1(n) \end{bmatrix}. \tag{1.20}$$

Вообще говоря это возможно не всегда. Однако при наших рассмотрениях возникает узел $\alpha$, обладающий свойством $P_{N_1}A_{12}^\alpha \mid N_2 = 0$.

При выполнении этого условия узел $\alpha$ допускает замыкание посредством любого узла $\beta$ такого, что $N_2^\beta = N_2$, $N_1^\beta = N_1$. Могут быть выписаны явные формулы узла $\gamma$; $H^\gamma = H^\alpha \oplus H^\beta$, $N_1^\gamma = L_1$, $N_2^\gamma = L_2$. Если узлы $\alpha$ и $\beta$ унитарны, то $\gamma$ также унитарен.

7. Представление Фурье соединения узлов (простая часть). Характеристическую функцию узла $\alpha$ в дальнейшем будем обозначать через $S(\zeta)$ и разбивать на блоки в соответствии с разбиением пространств $N_1^\alpha = N_2 \oplus L_1$, $N_2^\alpha = N_1 \oplus L_2$, индексируя блоки так же, как и в работе [1, формула (1)]:

$$S = \begin{bmatrix} s_{21} & s_{22} \\ s_{11} & s_{12} \end{bmatrix},$$

которая действует на векторы вида $\begin{bmatrix} n_2 \\ l_1 \end{bmatrix}$, получаются векторы вида $\begin{bmatrix} n_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$, т. е. $s_{11} = P_{L_2}S \mid N_2$, $s_{12} = P_{L_2}S \mid L_1$, $s_{21} = P_{N_1}S \mid N_2$, $s_{22} = P_{N_1}S \mid L_1$.

Характеристическую функцию замыкающего узла $\beta$ будем обозначать через $\omega$ и через $w$ — характеристическую функцию узла $\gamma$ ($\omega : N_1 \to N_2$, $w : L_1 \to L_2$).

Положим

$$\Phi_1^\alpha(\zeta) = \sum \varphi_1^\alpha(n)\zeta^n = \sum (\varphi_2^\beta(n)\oplus\varphi_1(n))\zeta^n = \Phi_2^\beta(\zeta)\oplus\Phi_1(\zeta),$$
$$\Phi_2^\alpha(\zeta) = \sum \varphi_2^\alpha(n)\zeta^n = \sum (\varphi_1^\beta(n)\oplus\varphi_2(n))\zeta^n = \Phi_1^\beta(\zeta)\oplus\Phi_2(\zeta),$$

(см. формулы (1.18), (1.19)).

Пользуясь определяющим свойством характеристической функции (см. п. 3), запишем

$$\begin{bmatrix} \Phi_1^\beta(\zeta) \\ \Phi_2(\zeta) \end{bmatrix} = S(\zeta)\begin{bmatrix} \Phi_2^\beta(\zeta) \\ \Phi_1(\zeta) \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{matrix} \Phi_2^\beta(\zeta) = \omega(\zeta)\Phi_1^\beta(\zeta), \\ \Phi_2(\zeta) = w(\zeta)\Phi_1(\zeta). \end{matrix}$$

Откуда получаются следующие соотношения:

$\begin{bmatrix} \varphi \\ w \end{bmatrix} = S\begin{bmatrix} \omega\varphi \\ 1_{L_1} \end{bmatrix}$ **(1.21)**, где $\varphi = (1_{N_1} - s_{21}\omega)^{-1}s_{22}$ **(1.22)**. Функция $\varphi(\zeta)$ определена и голоморфна при $|\zeta| < 1$ (в силу того, что $s_{21}(\zeta)$ и $\omega(\zeta)$ — сжимающие функции, а $s_{21}(0) = P_{N_1}A_{12}^\alpha \mid N_2 = 0$); $\varphi : L_1 \to N_1$. Таким образом, $w = s_{12} + s_{11}\omega(1_{N_1} - s_{21}\omega)^{-1}s_{22}$ **(1.23)**. Рассматривая замыкание узла $\alpha^*$ посредством узла $\beta^*$, получим узел $\gamma^*$ и соотношения двойственные (1.21): $\begin{bmatrix} \psi^* \\ w^* \end{bmatrix} = S^*\begin{bmatrix} \omega^*\psi^* \\ 1_{L_2} \end{bmatrix}$ **(1.21′)**, где $\psi = s_{11}(1_{N_2} -$

$-\omega s_{21})^{-1}$, **(1.22′)** $\psi(\zeta)$ определена и голоморфна при $|\zeta|<1$; $\psi(\zeta): N_2 \to L_2$. Отметим, что формула (1.23) содержится в работе [1].

Представление Фурье узла $\gamma$, порождаемое его простой частью (определение см. п. 5), может быть выражено через соответствующие представления узлов $\alpha$ и $\beta$, а именно, для любого $h^\gamma = h^\alpha \oplus h^\beta$ и любого $|\zeta|<1$

$$G^\gamma h^\gamma = \begin{bmatrix} \psi\omega & 1_{L_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi^*\omega^* & 1_{L_1} \end{bmatrix} G^\alpha h^\alpha + \begin{bmatrix} \psi & 0 \\ 0 & \varphi^* \end{bmatrix} G^\beta h^\beta, \qquad (1.24)$$

где $\varphi$ и $\psi$ определены формулами (1.22) и (1.22′); $\omega$ — характеристическая функция узла $\beta$. Напомним, что $N_2^\alpha = N_1 \oplus L_2$, $N_1^\alpha = N_2 \oplus L_1$, $N_1^\beta = N_1$, $N_2^\beta = N_2$.

8. Представление Фурье соединения (изолированная часть). Оказывается, что построенный таким образом узел $\gamma$ может быть не простым (даже если узлы $\alpha$ и $\beta$ просты). Впервые такого сорта вопросы были полностью исследованы, по-видимому, в работах Ю. Л. Шмульяна (см., например, [3]).

Пусть $\alpha$ и $\beta$ — простые узлы.

Пусть $K^\gamma = N_2 \oplus N_1$,[1] $P'$ — ортопроектор на $(H^\gamma)'$

$$(P' = 1_{H^\gamma} - (G^\gamma)^* G^\gamma), \quad \Gamma^\gamma = P'(A_2^\alpha \oplus A_2^\beta) \times \begin{bmatrix} \omega(0)^* & 1_{N_1} \\ 0 & 0 \\ 1_{N_2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда $\Gamma^\gamma(K^\gamma)$ — циклическое подпространство оператора $U^\gamma = A_{in}^\gamma | (H^\gamma)'$. Функция $a^\gamma(\zeta)$, определяемая формулой (1.12), может быть вычислена и равна $(a^\gamma(\zeta): N_2 \oplus N_1 \to N_2 \oplus N_1)$

$$a^\gamma(\zeta) = \begin{bmatrix} \overset{0}{\psi}(\zeta) & \overset{0}{\psi}(\zeta)\,\omega(\zeta) \\ s_{21}(\zeta)\,\overset{0}{\psi}(\zeta) & \overset{0}{\varphi}(\zeta) \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1_{N_2} & \omega(0) \\ -\omega(0)^* & 1_{N_1} \end{bmatrix} -$$

$$-\frac{1}{2}\int_T \frac{t+\zeta}{t-\zeta} \begin{bmatrix} \psi^* & \omega\varphi \\ \omega^*\psi^* & \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{L_2} & w \\ w^* & 1_{L_1} \end{bmatrix}^{[-1]} \begin{bmatrix} \psi & \psi\omega \\ \varphi^*\omega^* & \varphi^* \end{bmatrix} dm(t), \qquad (1.25)$$

где $\varphi$ и $\psi$ — те же, что определены выше, $\overset{0}{\varphi}(\zeta) = (1_{N_1} - s_{21}(\zeta)\,\omega(\zeta))^{-1}$, $\overset{0}{\psi}(\zeta) = (1_{N_2} - \omega(\zeta)\,s_{21}(\zeta))^{-1}$ **(1.26)**, $T$ — единичная окружность, $dm$ — нормированная мера Лебега на ней. Корректность определения интеграла в (1.25) следует, например, из того, что

$$G^\gamma(A_1^\alpha \oplus A_1^\beta)\begin{bmatrix} 1_{N_2} & \omega(0) \\ 0 & 0 \\ 0 & 1_{N_1} \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} \psi & \psi\omega \\ \varphi^*\omega^* & \varphi^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1_{L_2} \\ w^* \end{bmatrix} [\psi(0).\ \omega(0)\,\psi(0)]}{t}. \qquad (1.27)$$

---

[1] Заметим, что $K^\gamma$ — есть пространство, по которому соединяются узлы $\alpha$ и $\beta$.

Таким образом, правая часть (1.27), примененная к $\begin{bmatrix} n_2 \\ n_1 \end{bmatrix}$, принадлежит $H^w$ при любых $n_2$ и $n_1$.

Функцию $a^\gamma(\zeta)$ можно записать еще в следующем виде:

$$a^\gamma(\zeta) = \frac{1}{2} \frac{1_{N_2 \oplus N_1} + \begin{bmatrix} 0 & \omega(\zeta) \\ s_{21}(\zeta) & 0 \end{bmatrix}}{1_{N_2 \oplus N_1} - \begin{bmatrix} 0 & \omega(\zeta) \\ s_{21}(\zeta) & 0 \end{bmatrix}} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \omega(0) \\ -\omega(0)^* & 0 \end{bmatrix} -$$

$$- \frac{1}{2} \int\limits_T \frac{t+\zeta}{t-\zeta} \begin{bmatrix} \psi^* & \omega\varphi \\ \omega^*\psi^* & \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{L_2} & w \\ w^* & 1_{L_1} \end{bmatrix}^{[-1]} \begin{bmatrix} \psi & \psi\omega \\ \varphi^*\omega^* & \varphi^* \end{bmatrix} dm. \quad (1.28)$$

Представление Фурье узла $\gamma$, порождаемое его изолированной частью (определение см. п. 5, формула (1.10)) вычисляется и имеет вид

$$(I^\gamma h^\gamma)(\zeta) = \begin{bmatrix} \omega\overset{0}{\varphi} & 0 & \overset{0}{\psi}{}^* & 0 \\ \overset{0}{\varphi} & 0 & \omega^*\overset{0}{\psi}{}^* & 0 \end{bmatrix}(\zeta) \cdot (G^\alpha h^\alpha)(\zeta) +$$

$$+ \begin{bmatrix} \overset{0}{\psi} & s_{21}^*\overset{0}{\varphi}{}^* \\ s_{21}\overset{0}{\psi} & \overset{0}{\varphi}{}^* \end{bmatrix}(\zeta) \cdot (G^\beta h^\beta)(\zeta) -$$

$$- \int\limits_T \frac{1-|\zeta|^2}{|t-\zeta|^2} \begin{bmatrix} \psi^* & \omega\varphi \\ \omega^*\psi^* & \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{L_2} & w \\ w^* & 1_{L_1} \end{bmatrix}^{[-1]} G^\gamma h^\gamma \, dm. \quad (1.29)$$

Напомним, что $G^\gamma h^\gamma$ вычисляется по формуле (1.24).

9. Критерий простоты соединения. Пусть $\alpha$ и $\beta$ — простые узлы. Из определения функции $a^\gamma(\zeta)$ видно, что узел $\gamma$ — прост тогда и только тогда, когда $a^\gamma(\zeta) + a^\gamma(\zeta)^* = 0$ или (что тоже самое, ввиду неотрицательности $a^\gamma(\zeta) + a^\gamma(\zeta)^*$) тогда и только тогда, когда $a^\gamma(0) + a^\gamma(0)^* = 0$ или (ввиду нормировки $a(0)$ на неотрицательную величину) тогда и только тогда, когда $a(0) = 0$ (или в какой-нибудь одной точке единичного круга). Последний вариант критерия простоты узла $\gamma$ в силу формулы (1.25) можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} 1_{N_2} & \omega(0) \\ \omega(0)^* & 1_{N_1} \end{bmatrix} = \int\limits_T \begin{bmatrix} \psi^* & \omega\varphi \\ \omega^*\psi^* & \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{L_2} & w \\ w^* & 1_{L_1} \end{bmatrix}^{[-1]} \begin{bmatrix} \psi & \psi\omega \\ \varphi^*\omega^* & \varphi^* \end{bmatrix} dm. \quad (1.30)$$

Кроме критерия простоты узла $\gamma$ нас будет интересовать критерий обращения в ноль преобразования $I^\gamma$ на $H^\alpha$ (а не на всем $H^\gamma = H^\alpha \oplus H^\beta$). Для получения такого критерия достаточно вычислить преобразование $I^\gamma$ на полном в $H^\alpha$ множестве $G_2^\alpha(\mu)\, n_2^\alpha$ и $G_1^\alpha(\mu)\, n_1^\alpha$ ($|\mu|<1$). Как показывают вычисления:

$$I^\gamma (G_2^\alpha(\mu)\, n_2^\alpha) = \frac{d\sigma^\gamma}{1-\bar{t}\mu} \begin{bmatrix} -s_{21}(\mu)^* & -s_{11}(\mu)^* \\ 1_{N_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ l_2 \end{bmatrix}, \quad (1.31)$$

где $d\sigma^{\nu}$ — мера, отвечающая функции $a^{\nu}(\zeta)+a^{\nu}(\zeta)^*$, $n_2^{\alpha}=n_1\oplus l_2$;

$$I^{\nu}(G_1^{\alpha}(\mu)n_1^{\alpha})=\frac{d\sigma^{\nu}}{t-\mu}\begin{bmatrix}1_{N_2} & 0\\ -s_{21}(\mu) & -s_{22}(\mu)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n_2\\ l_1\end{bmatrix}, \tag{1.32}$$

где $n_1^{\alpha}=n_2\oplus l_1$.

Мы в настоящей работе ограничиваемся рассмотрением таких узлов $\alpha$, для которых $s_{21}(0)=0$. Но тогда, полагая в формулах (1.31) и (1.32) $\mu=0$, $l_1=0$, $l_2=0$, получим

$$I^{\nu}(G_2^{\alpha}(0)(n_1\oplus 0))=d\sigma^{\nu}\begin{bmatrix}0\\ n_1\end{bmatrix}, \tag{1.33}$$

$$I^{\nu}(G_1^{\alpha}(0)(n_2\oplus 0))=\bar{t}\,d\sigma^{\nu}\begin{bmatrix}n_2\\ 0\end{bmatrix}. \tag{1.34}$$

Из обращения в ноль выражений (1.33) и (1.34) следует, что $d\sigma^{\gamma}=0$, т. е. узел $\gamma$ — прост! Таким образом в нашем случае критерий обращения в ноль $I^{\gamma}$ на $H^{\alpha}$ совпадает с критерием простоты узла $\gamma$ (т. е. равенства нулю $I^{\gamma}$ на $H^{\alpha}\oplus H^{\beta}$). Отметим, что при наличии у узла $\alpha$ изолированной части, она же тривиальным образом войдет и в узел $\gamma$. Описанный выше критерий в этом случае утверждает, что сверх того у $\gamma$ нет ничего в изолированной части.

10. Равенство Парсеваля для узла $\gamma$. В общем случае имеет место следующее равенство (узел $\beta$ мы считаем простым, $h^{\gamma}=h^{\alpha}\oplus h^{\beta}$):

$$\langle h^{\gamma}, h^{\nu}\rangle=\int_T<\begin{bmatrix}1_{L_2} & w\\ w^* & 1_{L_1}\end{bmatrix}^{[-1]}G^{\nu}h^{\nu},\ G^{\nu}h^{\nu}>dm+$$

$$+\int_T\langle(d\sigma^{\gamma})^{[-1]}d\nu_{h^{\nu}}^{\nu},\ d\nu_{h^{\gamma}}^{\gamma}\rangle+\langle P_{(H^{\alpha})'}h^{\alpha},\ h^{\alpha}\rangle, \tag{1.35}$$

где $w$, $G^{\nu}h^{\nu}$ определяются из формул (1.23), (1.24), $d\sigma^{\nu}$, $d\nu_{h^{\nu}}^{\gamma}$ — из формул (1.25), (1.29), $P_{(H^{\alpha})'}$ — ортопроектор на изолированную часть узла $\alpha$.

**Список литературы:** 1. *Аров Д. З., Гроссман Л. З.* Матрицы рассеяния в теории расширений изометрических операторов // Докл. АН СССР. Сер. мат.— 1983. 270, № 1.— С. 17—20. 2. *Гроссман Л. З.* Операторные узлы.— Одесса, 1985.— 216 с.— Деп. в УкрНИИНТИ 15.05.85.— № 1025 Ук-Д 85. 3. *Шмульян Ю. Л.* Некоторые вопросы теории операторов с конечным рангом неэрмитовости // Мат. сб.— 1962. —57 (99), № 1.— С. 105—136. 4. *Кацнельсон В. Э. и др.* Абстрактная задача интерполяции и теория расширений изометрических операторов / В. Э. Кацнельсон, А. Я. Хейфец, П. М. Юдицкий.— Х., 1986.— 26 с.— Деп. в УкрНИИНТИ 23.09.86.— № 2274 Ук-Д 86. 5. *Юдицкий П. М.* Задача о лифтинге.— Х., 1983.— 59 с.— Деп. в УкрНИИНТИ 18.04.83.— № 311 УК-Д 83. 6. *Nikolskii N. K., Vasyunin V. I.* LOMI, preprint E-5-86.— L., 1986.— 28 с.

*Поступила в редколлегию 15.04.86*