УДК 517.5

М. В. НОВИЦКИЙ

ФУНКЦИИ, ВЫПУКЛЫЕ ПО ОТНОШЕНИЮ К НЕКОТОРОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Пусть $<\lambda_n>$, $n=1, 2, \cdots$ — последовательность неотрицательных чисел. Бесконечно дифференцируемая функция $f(x)$ на отрезке $[0,1]$ называется *выпуклой по отношению к последовательности* $\langle\lambda_n\rangle$ или более кратко λ_n — *вполне выпуклой*, если она удовлетворяет условиям $\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i-\frac{d^2}{dx^2})f(x)\geqslant 0$; $x\in[0,1]$, $n=1, 2, \cdots$

Класс таких функций обозначим через $W\langle\lambda_n, \frac{d^2}{dx^2}\rangle$. В этой статье мы даем интегральное представление функций класса $W\langle\lambda_n, \frac{d^2}{dx^2}\rangle$ (теоремы 1, 2) и доказываем его единственность (теорема 3). Определение класса $W\langle\lambda_n, \frac{d^2}{dx^2}\rangle$ подсказано работами [1, 2]. При $\lambda_n=0$, $n=1, 2, \cdots$ класс $W\langle\lambda_n, \frac{d^2}{dx^2}\rangle$ совпадает с классом вполне выпуклых функций, введенных Уиддером, который исследовал аналитические свойства таких функций [1, с. 177]. В [2] был введен и исследован класс $\langle\rho, \lambda_n\rangle$ — абсолютно монотонных функций, заданных на интервале $[0, 1]$ и удовлетворяющих неравенствам $f(x)\geqslant 0$; $\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i+D^{\frac{1}{\rho}})f(x)\geqslant 0$; $n=1, 2, \ldots, x\in(o, l)$, где $D^{\frac{1}{\rho}}$ — оператор дробного дифференцирования Римана — Лиувилля порядка $\frac{1}{\rho}$, $\rho\geqslant 1$. Там же получены интегральные представления $\langle\rho, \lambda_n\rangle$ — абсолютно монотонных функций. Классы $W\langle\lambda_n, \frac{d^2}{dx^2}\rangle$ и $\langle\rho, \lambda_n\rangle$ весьма различны, однако при формулировке и доказательстве некоторых предложений этой работы мы используем понятия и предложения работы [2]. В работе [3] автором было получено интегральное представление вполне выпуклых функций.

Сформулируем основные результаты работы. Последовательность $\langle\lambda_n\rangle$ всегда удовлетворяет одному из условий (I) $\forall m\geqslant 1$ $\sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}=\infty$; (II) $\exists m_0\geqslant 1$ $\sum_{k=m_0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}<\infty$.

Обозначим через $L_0 f = f$; $L_n f = \prod_{k=1}^{n} (\lambda_k - \frac{d^2}{dx^2}) f$; $P_n(t) = \prod_{k=1}^{n} \times$
$\times (\lambda_k + t)$; $n = 1, 2, \cdots$

Теорема 1. *Пусть* $f \in W\langle \lambda_n, \frac{d^2}{dx^2} \rangle$, а $\langle \lambda_n \rangle$ *удовлетворяет условию* (*I*). *Тогда* $f(x)$ *представима в виде*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [L_n f(0) Q_n(x) + L_n f(1) Q_n(1-x)] + \rho \sin \Pi x, \tag{1}$$

где $\rho \geqslant 0$, $Q_n(x) \in W\langle \lambda_n, \frac{d^2}{dx^2} \rangle$ — *квазиполиномы, однозначно определяемые условиями*

$$\begin{aligned} &L_{n+1} Q_n(x) = 0, \ x \in [0, 1]; \\ &L_n Q_n(0) = 1; \ L_n Q_n(1) = 0; \\ &L_k Q_n(0) = L_k Q_n(1) = 0, \ k = 0, 1, 2 \ldots, n-1, \end{aligned} \tag{2}$$

последовательности $\{L_n f(0)\}$, $\{L_n f(1)\}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$. *удовлетворяют условиям*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n f(0)}{P_{n+1}(\pi^2)} < \infty; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n f(1)}{P_{n+1}(\pi^2)} < \infty. \tag{3}$$

Обратно, функция $f(x)$, *определяемая равенством* (*1*), *где две заданные последовательности неотрицательных чисел* $\{L_n f(0)\}$ *и* $\{L_n f(1)\}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ *удовлетворяют условию* (*3*), *а* $\rho \geqslant 0$ *является* $\langle \lambda_n \rangle$ — *вполне выпуклой функцией.*

Для формулировки следующей теоремы рассмотрим последовательность $\langle \lambda_n \rangle$, удовлетворяющую условию (II). Пусть $\psi(\zeta)$ целая функция, определяемая равенством $\psi(\zeta) = \zeta^p \prod_{\lambda k \neq 0} \left(1 + \frac{\zeta}{\lambda_k}\right)$,

где p — число тех λ_k, которые равны нулю, $\gamma(\varepsilon, \beta)$ — контур в плоскости ζ, пробегаемый в направлении неубывания $\arg \zeta$ и состоящий из двух лучей $\arg \zeta = \pm \beta (\varepsilon \leqslant |\zeta| < \infty)$ и дуги $-\beta \leqslant \arg \zeta \leqslant +\beta$ окружности $|\zeta| = \varepsilon$, соединяющей концы $\varepsilon \exp(\pm i\beta)$ этих лучей. Пусть $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, определим функцию $K_\infty(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\varepsilon, \beta)} \frac{e^{t\zeta}}{\psi(\zeta)} d\zeta$

и функции $v_y(x)$, y, $x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} &v_y(x) = \frac{1}{\sin \pi y} \int_0^\infty K_\infty(t) p(t, x, y) dt; \ y \in (0, 1), \ x \in [0, 1]; \\ &v_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty K_\infty(t) \frac{\partial}{\partial y} p, (t, x, 0) dt; \\ &v_1(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty K_\infty(t) \frac{\partial}{\partial y} p(t, x, 1) dt, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\text{где } p(t,x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}2e^{-n^2\pi^2t}\sin\pi nx\cdot\sin\pi ny \tag{5}$$

фундаментальное решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ с особенностью в точке y и нулевыми условиями в точках 0 и 1.

Теорема 2. *Пусть* $f\in W\left\langle\lambda_n,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\rangle$, *а* $\langle\lambda_n\rangle$ *удовлетворяет условию* (II). *Тогда* $f(x)$ *представима в виде*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}[L_nf(0)Q_n(x)+L_nf(1)Q_n(1-x)]+\int_0^1 v_y(x)\,d\sigma(y). \tag{6}$$

Здесь $Q_n\in W<\lambda_n,\frac{d^2}{dx^2}>$ — *квазиполиномы, однозначно определяемые условиями* (2), *функции* $v_y(x)$ *при каждом фиксированном* $y\in[0,1]$ *принадлежат* $W<\lambda_n,\frac{d^2}{dx^2}>$, σ — *конечная мера на* $[0,1]$, *последовательности* $\{L_nf(0)\}$ *и* $\{L_nf(1)\}$, $n=0,1,2,\ldots$ *удовлетворяют условию (3).*

Обратно, функция $f(x)$, *определяемая равенством* (6), *где две заданные последовательности неотрицательных чисел* $\{L_nf(0)\}$ *и* $\{L_nf(1)\}$, $n=0,1,2,\ldots$ *удовлетворяют* (3), *а* σ — *конечная мера, является* $<\lambda_n>$ — *вполне выпуклой функцией.*

Теорема 3. *Коэффициент* ρ *и мера* σ *в представлениях* (1) *и* (6) *определяются по функции* $f\in W\left\langle\lambda_n,\frac{d^2}{dx^2}\right\rangle$ *единственным образом. При этом справедливы соотношения*

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2P_n(\pi^2)}\int_0^1 L_nf(x)\sin\pi x\,dx; \tag{7}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{L_nf}{\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant n,\ \lambda_i\neq 0}\lambda_i};\ \varphi\right)=\int_0^1\frac{\varphi(y)}{\sin\pi y}\,d\sigma(y), \tag{8}$$

где $\varphi\in C^\infty[0,1]$ *и удовлетворяет условиям* $\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\varphi(0)=\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\varphi(1)=0$, $n=0,1,2,\ldots$ (9)

При доказательстве теорем 1—3 мы используем ряд вспомогательных утверждений.

Обозначим через G_λ оператор Грина, отвечающий оператору $\left(\lambda-\frac{d^2}{dx^2}\right)$ и нулевым граничным условиям в точках 0 и 1.

Лемма 1. *Пусть* $f\in W\left\langle\lambda_n,\frac{d^2}{dx^2}\right\rangle$. *Тогда для любого* $n\geqslant 1$

а) $$f(x)=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\prod_{s=1}^{k}G_{\lambda_s}\right)f_{k+1}(x)+\left(\prod_{s=1}^{n}G_{\lambda_s}\right)(L_nf)(x). \tag{10}$$

где $f_{k+1}(x) \geqslant 0, \left(\lambda_k - \frac{d^2}{dx^2}\right) f_{k+1} = 0,\ f_{k+1}(0) = L_k f(0)$ и $f_{k+1}(1) = L_k f(1)$;

$$\text{б)} \int_0^1 f(x) \sin \pi x dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\pi^2}{P_{k+1}(\pi^2)} [L_k f(0) + L_k f(1)] + \frac{1}{P_n(\pi^2)} \times$$
$$\times \int_0^1 L_n f(x) \sin \pi x dx. \qquad (11)$$

Доказательство. Для произвольного $\lambda \geqslant 0$ и функции $u \in C^2[0, 1]$ справедливо разложение $u(x) = v(x) + G_\lambda\left(\lambda - \frac{d^2}{dx^2}\right) u(x)$ **(12)**, где v — решение уравнения $\left(\lambda - \frac{d^2}{dx^2}\right) v = 0$ с граничными условиями $v(0) = u(0)$, $v(1) = u(1)$. Полагая в этом выражении $u = L_k f$ и $\lambda = \lambda_{k+1}$, имеем n равенств $L_k f(x) = f_{k+1}(x) + G_{\lambda_{k+1}}(L_{k+1} f)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ **(13)**.

Равенство (10) получается путем последовательной подстановки (13) при $k = 1, 2, \ldots, n-1$ в (13) при $k = 0$. Умножим (10) на $\sin \pi x$ и проинтегрируем по отрезку $[0, 1]$. Учитывая равенство $G_\lambda \sin \pi x = \frac{\sin \pi x}{\pi^2 + \lambda^2}$, получаем $(f, \sin \pi x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{P_k(\pi^2)} \times (f_{k+1}, \sin \pi x + \frac{1}{P_n(\pi^2)}(L_n f, \sin \pi x)$ **(14)**. Подставляя выражение для $(f_{k+1}, \sin \pi x) = \frac{\pi^2}{\lambda_{k+1} + \pi^2}[L_k f(0) + L_k f(1)]$ в (14) и учитывая, что $P_{k+1}(t) = P_k(t)(\lambda_{k+1} + t)$, находим (11). Из неотрицательности слагаемых в правой части равенства (11) следует, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{L_k f(0)}{P_k(\pi^2)} < \infty; \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L_k f(1)}{P_{k+1}(\pi^2)} < \infty.$$

Лемма 2. *Произвольная, дважды непрерывно дифференцируемая функция* $u(x)$ *на конечном интервале* (a, b), *удовлетворяющая условиям* $u(x) \geqslant 0$, $\left(\lambda - \frac{a^2}{dx^2}\right) u(x) \geqslant 0$, $\lambda \geqslant 0$, $x \in (a, b)$, *имеет предельные значения в точках* a *и* b, *причем*

$$\int_a^b u(x)\ dx \geqslant \frac{b-a}{2} \max_{a<x<b} u(x). \qquad (15)$$

Лемма 3. Пусть $f \in W\left\langle \lambda_n, \frac{d^2}{dx^2}\right\rangle$. *Тогда она допускает разложение* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [L_n f(0) \; Q_n(x) + L_n f(1) \; Q_n(1-x)] + f_\infty(x)$, *где квазиполиномы* $Q_n \in W\left\langle \lambda_n, \frac{d^2}{dx^2}\right\rangle$ *удовлетворяют условиям* (2), *а* $f_\infty \in W\left\langle \lambda_n, \frac{d^2}{dx^2}\right\rangle$, *причем* $L_n f_\infty(0) = L_n f_\infty(1) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (16).

Доказательство. Покажем, что для $k = 1, 2, \ldots$

$$\left(\prod_{s=0}^{k} G_{\lambda_s}\right) f_{k+1}(x) = L_k f(0) \; Q_k(x) + L_k f(1) \; Q_k(1-x). \qquad (17)$$

Очевидно, что $f_{k+1} = L_n f(0) \varphi_{k+1}^{(1)} + L_n f(1) \varphi_{k+1}^{(2)}$, где функции $\varphi_k^{(i)}$, $i = 1,2$ являются решениями уравнения $\left(\lambda_{k+1} - \frac{d^2}{dx^2}\right) \times \varphi_{k+1}^{(2)}(x) = 0$ и удовлетворяют граничным условиям $\varphi_{k+1}^{(1)}(0) = \varphi_{k+1}^{(2)}(1) = 1$, $\varphi_{k+1}^{(1)}(1) = \varphi_{k+1}^{(2)}(0) = 0$. Поэтому

$$\prod_{s=1}^{n} G_{\lambda_s} f_{k+1} = L_n f(0) \prod_{s=1}^{k} G_{\lambda_s} \varphi_{k+1}^{(1)} + L_n f(1) \prod_{s=1}^{k} G_{\lambda_s} \varphi_{k+1}^{(2)}.$$

Полагаем $\prod_{s=1}^{k} G_{\lambda_s} \varphi_{k+1}^{(1)}(x) = Q_k(x)$. Очевидно, что $Q_k(x)$ — квазиполином с показателями $\pm\sqrt{\lambda_s}$, $s = 1, 2, \ldots, k$ и условия (2) его однозначно определяют. Функция $\prod_{s=1}^{n} G_{\lambda_s} \varphi_{k+1}^{(2)}(1-x)$ удовлетворяет тем же условиям (2), поэтому $\prod_{s=1}^{k} G_{\lambda_s} \varphi_{k+1}^{(2)}(1-x) = Q_k(x)$, откуда и следует (17). Обозначим $g_n = \prod_{s=1}^{n} G_{\lambda_s} L_n f$. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{s=1}^{k} G_{\lambda_s} f_{k+1}(x) + g_n(x). \qquad (18)$$

Слагаемые в правой части (18) — неотрицательные функции, значит, g_n при $n \to \infty$ образует невозрастающую последовательность. Следовательно, существует $f_\infty(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$, $x \in [0, 1]$. Исследуем дифференциальные свойства функции $f_\infty(x)$. Применим к (18) оператор L_m $(m < n)$. Тогда

$$L_m f(x) = \sum_{k=m-1}^{n-1} \prod_{s=m}^{k} G_{\lambda_s} f_{k+1}(x) + L_m g_n.$$

Аналогично предыдущему получаем, что $L_m g_n$, $n = m+1, m+2, \ldots$ образуют невозрастающую последовательность ограниченных неотрицательных функций и существует $\lim_{n\to\infty} L_m q_n = V_m$. Очевидно, $q_n(x) = \prod_{s=1}^{n} G_{\lambda_s}(L_m q_n)(x)$. Оператор $\prod_{s=1}^{n} G_{\lambda_s}$ есть интегральный оператор с неотрицательным ограниченным ядром, поэтому, применяя теорему Лебега к предыдущему равенству, имеем $f_\infty(x) = \prod_{s=1}^{n} G_{\lambda_s} V_m(x)$, где $m = 1, 2, \ldots$ Следовательно, $f_\infty \in C^{2n-1}[0, 1]$, причем $L_k f_\infty(0) = L_k f_\infty(1) = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. В силу произвольности n получаем утверждение леммы.

Доказательство теоремы 1. Покажем, что если $\langle\lambda_n\rangle$ удовлетворяет (I), то $f_\infty(x) = \rho \sin \pi x$, где $\rho \geqslant 0$. Пусть $f_\infty(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin \pi k x$. В силу условий (16) $L_n f_\infty(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k P_n(\pi^2 k^2) \times \sin \pi k x$ и, значит, $c_k P_n(\pi^2 k^2) = 2\int_0^1 \sin \pi k x\, L_n f(x)\, dx$.

В связи с этим $|c_k|\, P_n(\pi^2 k^2) \leqslant 2\int_0^1 |\sin \pi k x| L_n f_\infty(x)\, dx \leqslant 2k \int_0^1 \sin \pi x \times L_n f_\infty(x)\, dx$.

Из (11) следует, что $\int_0^1 \sin \pi x\, L_n f_\infty(x)\, dx = P_n(\pi^2) \int_0^1 f_\infty(x) \sin \pi x dx$.

Поэтому, для любого $n = 1, 2, \ldots$ $|c_k| \leqslant B \cdot \dfrac{P_n(\pi^2)}{P_n(\pi^2 k^2)}$ **(19)**,

где $B = 2k \int_0^1 f(x) \sin \pi x\, dx$. Из условия (I) на последовательность $\langle\lambda_n\rangle$ следует, что при $k \geqslant 2$ правая часть неравенства (19) стремится к нулю, когда $n \to \infty$. Поэтому $f_\infty(x) = c_1 \sin \pi x$ и так как $f_\infty \geqslant 0$, то $c_1 = \rho \geqslant 0$.

Покажем, что функция f, определяемая равенством (1), где $\{L_n f(0)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{L_n f(1)\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию (3), а $\rho \geqslant 0$, принадлежит $W\left\langle \lambda_n, \dfrac{d^2}{dx^2} \right\rangle$. Полагая в равенстве (11) $f(x) = Q_n(x)$, получаем $\int_0^1 Q_n(x) \sin \pi x dx = \dfrac{\pi^2}{P_{n+1}(\pi^2)}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Зафиксируем отрезок $[\delta, 1-\delta] \subset (0, 1)$. Тогда

$$\int_\delta^{1-\delta} Q_n(x)\, dx \leqslant \frac{\pi^2}{P_{n+1}(\pi^2) \sin \pi\delta}.$$

Согласно формуле (15) леммы 2 $Q_n(x) \leqslant \dfrac{2\pi^2}{1-2\delta} \cdot \dfrac{1}{P_{n+1}(\pi^2)}$, $x \in [\delta, 1-\delta]$. Аналогичное неравенство имеет место для функции $Q_n(1-x)$.

Поэтому ряд $\sum_{n=0}^{\infty}[L_n f(0) Q_n(x) + L_n f(1) Q_n(1-x)]$ сходится равномерно на $[\delta, 1-\delta]$ и, значит, $f \in C[\delta, 1-\delta]$. Аналогично доказывается, что функции $L_n f$ (понимаемые в обобщенном смысле) принадлежат $C[\delta, 1-\delta]$, и поэтому $f \in W_2^m$ $[\delta, 1-\delta]$, $m=1, 2, \ldots$ По теореме вложения получаем, что $f_\infty \in C^\infty(\delta, 1-\delta)$. Следовательно, $f \in C^\infty(0, 1)$. Чтобы доказать, что $f \in C^\infty[0, 1]$, применим лемму 2 к функции $L_n f$. Поскольку $\left(\lambda_{n+1} - \frac{d^2}{dx^2}\right) L_n f = L_{n+1} f \geqslant 0$, то функция $L_n f$ согласно этой лемме непрерывна в точках 0 и 1 для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ Это влечет $f \in W\left\langle \lambda_n, \frac{d^2}{dx^2}\right\rangle$. Поскольку функции $Q_n(x)$, $Q_n(1-x)$, $\sin \pi x$ принадлежат $W\left\langle \lambda_n, \frac{d^2}{dx^2}\right\rangle$, то $f \in W\left\langle \lambda_n, \frac{d^2}{dx^2}\right\rangle$.

Лемма 4. Пусть T_t — *полугруппа на* $C[0, 1]$, *порождаемая фундаментальным решением* $P(t, x, y)$. *Тогда, если* $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots,$ *а* $f \in C[0, 1]$, *то* $\prod_{s=1}^{n} G_{\lambda_s} f(x) = \int_0^\infty \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\varepsilon,\beta}} \frac{e^{t\zeta}}{\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i+\zeta)} d\zeta\right] \times$ $\times T_t f(x) dt$. (20)

Доказательство этого утверждения легко получить, используя метод математической индукции.

Лемма 5. *Функция* $K_\infty(t)$ *является неотрицательной бесконечно дифференцируемой функцией на* $[0, \infty)$, *удовлетворяющей условиям: а)* $K_\infty^{(n)}(0) = 0$, $\prod_{i=1}^{n}\left(\lambda_i + \frac{d}{dt}\right) K_\infty(t) \geqslant 0$, $t \in (0, \infty)$, $n = 1, 2, \ldots$ **(21)**;

б) для любого $\lambda > 0$ $\int_0^\infty e^{-\lambda t} K_\infty(t)\, dt = \frac{1}{\psi(\lambda)}$ **(22)**.

Доказательство утверждения *а*) леммы содержится в [2] Для проверки свойства *б*) заметим, что в формуле, дающей определение функции $K_\infty(t)$, контур $\gamma(\varepsilon, \beta)$ можно заменить контуром $\gamma\left(\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right)$. Считая $0 < \varepsilon < \lambda$, имеем $\int_0^\infty K_\infty(t) e^{-\lambda t} dt =$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma\left(\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right)} \frac{e^{t\zeta}}{\psi(\zeta)} d\xi\right] e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma\left(\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right)} \frac{1}{\psi(\zeta)} \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t + t\zeta} dt\right] d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma\left(\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right)} \frac{-1}{\psi(\zeta)(\zeta-\lambda)} d\zeta = \frac{1}{\psi(\lambda)}.$$

Чтобы получить последнее равенство, используем теорему Коши для области, лежащей справа от контура $\gamma\left(\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right)$.

Доказательство теоремы 2. Согласно лемме 3 достаточно показать, что $f_\infty(x) = \int\limits_0^1 v_y(x)\, d\sigma(y)$. Для упрощения записи будем считать, что $\lambda_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Положим $\psi_n(\zeta) = \prod\limits_{i=1}^{n}\left(1+\frac{\zeta}{\lambda_i}\right)$ $\zeta \in C$, $K_n(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma(\varepsilon,\beta)} \frac{e^{t\zeta}}{\psi_n(\zeta)}\, d\xi$. По лемме 4 $q_n(x) = \prod\limits_{i=1}^{n} G_{\lambda_i} L_n f(x) = \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n} \lambda_i}\int\limits_0^\infty K_n(t)\, T_t L_n f(x)\, dt$ **(23)**. Поскольку $T_t u(x) = \int\limits_0^1 p(t, x, y)\, u(y)\, dy$, то, умножив и разделив подынтегральное выражение в правой части (23) на $\sin \pi y$, получим $q_n(x) = \int\limits_0^1 v_{y,n}(x)\, d\sigma_n(y)$ **(24)**, где $v_{y,n}(x) = \int\limits_0^\infty \frac{K_n(t)\, P(t, x, y)}{\sin \pi y}\, dt$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, а $d\sigma_n(y) \leqslant \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n} \lambda_i} \times$ $\times L_n f(y) \sin \pi y$. Согласно **(11)** $\int\limits_0^1 d\sigma_n(y) \leqslant \int\limits_0^1 f(y) \sin \pi y\, dy \cdot \psi_n(\pi^2)$.

Так как $\psi_n(\pi^2) \to \psi(\pi^2)$ при $n \to \infty$, то семейство мер $\{d\sigma_n\}_{n=1}^\infty$ слабо компактно в $C[0, 1]$. Пусть $d\sigma$ — какая-нибудь предельная мера. Докажем, что $v_{y,n}(x)$ при каждом фиксированном $y \in [0,1]$ сходится равномерно на $[0, 1]$ к $v_y(x)$. При определении функций $K_\infty(t)$ и $K_n(t)$ $(n \geqslant 2)$ контур $\gamma(\varepsilon, \beta)$ можно заменить контуром $\gamma\left(\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right)$. Считая $0 < \varepsilon < \pi$, $0 < y < 1$, получаем $v_{y,n}(x) - v_y(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty \int\limits_{\gamma\left(\varepsilon,\frac{\pi}{2}\right)}$ $\times\left[\frac{1}{\psi_n(\zeta)} - \frac{1}{\psi(\zeta)}\right] e^{t\zeta}\, d\zeta\, \frac{p(t, x, y)}{\sin \pi y}\, dy$. На контуре $\gamma\left(\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right)$ $|e^{t\zeta}| \leqslant e^{\varepsilon t}$.

Учитывая равенство $G_{-\varepsilon}(x, y) = \int\limits_0^\infty e^{\varepsilon t} p(t, x, y)\, dt$, получаем

$$|v_{y,n}(x) - v_y(x)| \leqslant \frac{G_{-\varepsilon}(x, y)}{2\pi \sin \pi y}\left|\int\limits_{\gamma(\varepsilon,\beta)}\left(\frac{1}{\psi_n(\zeta)} - \frac{1}{\psi(\zeta)}\right) d\zeta\right|.$$

Поскольку $\sup\limits_{0<y<1} \frac{G_{-\varepsilon}(x,y)}{2\pi \sin \pi y} \leqslant C(x) < \infty$, а последовательность $q_n(\zeta) =$

$= \frac{1}{\psi_n(\zeta)} - \frac{1}{\psi(\zeta)} = \frac{\prod\limits_{i=n+1}^{\infty}\left(1+\frac{\zeta}{\lambda_i}\right)-1}{\psi(\zeta)}$ при $n \geqslant 2$ мажорируется сверху интегрируемой на контуре $\gamma\left(\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right)$ функцией $\frac{1}{|\psi(\zeta)|} + \frac{1}{|\psi_2(\zeta)|}$ и $\prod\limits_{k=n+1}^{\infty}\left(1+\frac{\zeta}{\lambda_k}\right) - 1 \to 0$, $n \to \infty$, $\zeta \in C$, то по теореме Лебега получим $\int\limits_{\gamma\left(\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right)} \left(\frac{1}{\psi_n(\zeta)} - \frac{1}{\psi(\zeta)}\right) d\zeta \to 0$, $n \to \infty$. Поэтому в равенстве (24) возможен предельный переход по n, откуда и следует (6).

Для завершения доказательства нужно показать, что функция $f(x)$, определяемая равенством (6), принадлежит $W\left\langle \lambda_n, \frac{d^2}{dx^2}\right\rangle$, если $\{L_n f(0)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{L_n f(1)\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию (3), а мера σ — конечная. Достаточно показать, что $v_y \in W\left\langle \lambda_n, \frac{d^2}{dx^2}\right\rangle$, $y \in [0, 1]$. Из равенства $p(t, x, y) = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-(n\pi)^2 t} \sin \pi n x \cdot \sin \pi n y$ следует, что

$$v_y(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n x \cdot \sin \pi n y}{\psi(\pi^2 n^2) \sin \pi y}.$$

Поэтому $v_y \in C^\infty[0,1]$. Учитывая свойства $\frac{\partial}{\partial t} p(t, x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \times$ $\times p(t, x, y)$, $K_\infty^{(n)}(0) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ получаем $L_n v_y(x) =$ $= \int\limits_0^\infty K_\infty(t) L_n p(t, x, y)\, dt = \int\limits_0^\infty \prod\limits_{i=1}^{n}\left(\lambda_i + \frac{d}{dt}\right) K_\infty(t)\, p(t, x, y)\, dt$. В силу (21) имеем $L_n v_y \geqslant 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $y \in (0,1)$. Аналогично рассматриваются случаи $y = 0$, $y = 1$.

Доказательство теоремы 3. Если $\langle \lambda_n \rangle$ удовлетворяет условию (I), то $f_\infty(x) = \rho \sin \pi x = \lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{n=1}^{n} G_{\lambda_s}(L_n t)$. Умножив это равенство на $\sin \pi x$ и проинтегрировав по отрезку (0,1), получим $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{P_n(\pi^2)} \int\limits_0^1 L_n f(x) \sin \pi x dx$. Для доказательства (8) достаточно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{L_n v_y(x)}{\prod\limits_{i=1}^{n} \lambda_i}, \varphi(x)\right) = \frac{\varphi(y)}{\sin \pi y}, \quad y \in [0, 1]. \quad (25)$$

Формулу (25) легко получить, если разложить функцию $\varphi(x)$ в ряд по системе $\sin \pi kx$, $k=1, 2, \ldots$ и вычислить предел в левой части (25).

Равенство (8) определяет на $C[0, 1]$ линейный непрерывный функционал, определенный на плотном множестве функций вида $\frac{\varphi(y)}{\sin \pi y}$, где φ удовлетворяет условиям (9). Поэтому мера σ определяется по функции f единственным образом.

Список литературы: 1. *Widder D.* The Laplace Transform, Princeton, 1941, p. 123, 2. *Джарбашян М. М., Саакян Б. А.* Классы формул и разложения типа Тейлора — Маклорена, ассоциированные с дифференциальными операторами дробного порядка.—Изв. АН СССР, 1975, сер. мат., 39, № 1, с. 69—122.
3. *Новицкий М. В.* О вполне выпуклых функциях. — Теория функций, функц. анализ и их прил., 1973, вып. 17, с. 99—105.

Поступила в редколлегию 14.04.80.