УДК 517.53

Б. И. ЛОКШИН

О МНОЖЕСТВАХ ПОНИЖЕНИЯ ПОРЯДКА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ В C^n

Рост целой функции $F(z, \omega)$, $z \in C^n$, $w \in C$ по переменному w в том или ином смысле мало зависит от выбора z [1, 2]. Обозначим через $\rho(z)$ порядок функции $F(z, w)$ по переменному w при фиксированном переменном z. Известна [2] следующая

Теорема. *Функция $\rho(z)$ — константа всюду, за исключением, быть может, C^n — полярного множества.*

В случае $n=1$ полярность совпадает с нулевой емкостью. Как было показано в работах [1, 3, 4], эта характеристика исключительных множеств точна. Так, М. Ш. Ставским [4] показано, что любое замкнутое множество нулевой емкости в C совпадает с множеством понижения порядка некоторой целой функции $f(z, w)$.

В этой работе, используя один результат Джозефсона [5], мы показываем, что теорема в некотором смысле точна и для $n > 1$.

Именно, справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть E принадлежит борелевскому классу множеств F_σ в C^n и является C^n полярным множеством. Тогда существует целая функция $F(z, w)$ такая, что $\rho(z)=0$ при $z \in E$, а $\sup(\rho(z) : z \in C^n) = 1$.*

Для построения искомой функции понадобится следующая

Лемма. *Пусть $f(z)$ — целая функция в C^n, $\ln|f(0)| > -\alpha$, $\ln|f(z)| \leqslant \alpha A$ в поликруге $\Pi(0, 2R)$, где α, A, R — положительные числа. Тогда существует положительное число $C(n)$ такое, что для любого $T > C(n)$ найдется полином $P(z)$, $\deg P \leqslant s = 2n\alpha(A+1)T^{n-1}$ такой, что 1) $1 \leqslant \max(|P(z)| : z \in \Pi(0, 2R)) \leqslant 2^s$*

2) $\{z \in \Pi(0, R) : |f(z)| < \exp(-\alpha(A+1)T^n)\} \subset \{z : |P(z)| < \exp(-\frac{2}{13}\alpha(A+1)T^n)\}$.

Доказательство мы опускаем, так как эта лемма является несложным следствием аналогичной леммы из [5], в которой рассматривается случай $A=1$, $R=\frac{1}{2}$.

Сначала мы займемся построением последовательности чисел $T_j \to \infty$ при $j \to \infty$, связанной с полярным множеством E. Пусть $u(z)$ — плюрисубгармоническая в C^n функция такая, что $u(z) = -\infty$ при $z \in E$. Обозначим через $f(z, w)$ функцию, областью голоморфности которой является множество $\{(z, w): z \in C^n, |w| < \exp(-u(z))\}$. Тогда, если $f(z, w) = \sum f_j(z) w^j$, то $u(z) = \overline{\lim\limits_{z' \to z}}\, \overline{\lim\limits_{j \to \infty}}\, j^{-1} \ln |f_j(z')|$.

Здесь $f_j(z)$ целые в C^n функции. Не уменьшая общности, можно считать, что $u(0) > -1$ и для некоторой последовательности $j(k) \to \infty$

$$\ln |f_{j(k)}(0)| > -j(k), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Индексы для T_j мы будем выбирать из этой последовательности. Пусть $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, где E_k — компактные множества в C^n и $E_k \subset E_{k+1}$. Тогда, так как последовательность функций $j^{-1} \ln |f_j(z)|$ равномерно ограничена сверху на любом компакте в C^n, а $u(z) = -\infty$ на E, то для любого целого положительного числа k найдется число j_k такое, что для всех $z \in E_k$ и всех $j \geqslant j_k$ будет выполняться неравенство $j^{-1} \ln |f_j(z)| < -k$. Очевидно, можно считать $j_k < j_{k+1}$. Полагая теперь $\tilde{T}_j = k$ для всех $j \in [j_k, j_{k+1}]$, будем иметь неравенство $\ln |f_j(z)| < -j \tilde{T}_j$ для любого $z \in E$ и всех $j \geqslant j(z)$. Здесь $\tilde{T}_j$ — некоторая неубывающая последовательность чисел, стремящаяся к ∞. Положим $A_j = 2 \sup (u(z) : z \in \Pi(0, 2R_j))$, выбрав последовательность $R_j \uparrow \infty$ таким образом, чтобы $R_j^{4n^2} A_j / \tilde{T}_j \to 0$ при $j \to \infty$. Положим $T_j = (\tilde{T}_j / (A_j + 1))^{1/n}$, тогда $R_j^{4n} / T_j \to 0$. Если теперь зафиксировать $z_0 \in E$, то найдется такой номер $j(z_0)$, что для всех $j \geqslant j(z_0$ будут выполняться неравенства $\ln |f_j(z)| \leqslant j A_j$; $z \in \Pi(0, 2R_j)$; $\ln |f_j(z_0)| < -j(A_j + 1) T_j^n$, а для $j = j(k)$ $\ln |f_j(0)| > -j$. В дальнейшем индексы j мы будем выбирать из последовательности $j(k)$. Выберем последовательность целых положительных чисел j_k, $k = 1, 2, \cdots$ так, что $T_{j_k} \geqslant 2^{4k} R_{j_k}^{4n}$ и можно было построить строго возрастающую последовательность целых чисел q_k такую, что $q_k \ln q_k \sim j_k A_{j_k} T_{j_k}^{n-1/2}$ $(k \to \infty)$. Очевидно, такой выбор чисел j_k возможен. Для каждого $k = 1, 2, \cdots$ по функции $f_{j_k}(z)$ и числу T_{j_k} с помощью леммы, полагая в ней $A = A_{j_k}$, $\alpha = j_k$, $R = R_{j_k}$, построим полином $P_k(z)$ степени не выше $s_k = 2n j_k (A_{j_k} + 1) T_{j_k}^{n-1}$.

Положим $F(z, w) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} P_k(z) q_k^{-q_k} w^{q_k}$.

Функция $F(z, w)$ будет искомой. Проверим, что ряд равномерно сходится в любом поликруге. Фиксируем произвольно число $R > 1$. Пусть $|w| < R$, $z \in \overline{\Pi(0, R)}$. Тогда при достаточно больших k имеют место оценки $q_k \ln R < (q_k \ln q_k)/3$;
$\ln|P_k(z)| \leqslant s_k \ln 2 < (q_k \ln q_k)/3R$;

$$\ln|P_k(z) q_k^{-q_k} w^{q_k}| < \frac{q_k \ln q_k}{3} + \frac{q_k \ln q_k}{3} - q_k \ln q_k < -(k \ln k)/3,$$

откуда следует равномерная сходимость ряда на любом компакте. Это означает, что функция $F(z, w)$ целая. Кроме того, из второй оценки вытекает, что $\rho(z) \leqslant 1$, $z \in C^n$.

Покажем, что для любого $z \in E$ $\rho(z) = 0$. Для всех достаточно больших k функции $f_{j_k}(z)$ будут удовлетворять условиям леммы с $\alpha = j_k$; $A = A_{j_k}$; $R = R_{j_k}$. Тогда $\ln|P_k(z)| < -\frac{2}{13} j_k (A_{j_k} + 1) T_{j_k}^n$. Так как $q_k \ln q_k = 0 (j_k A_{j_k} T_{j_k}^n)$ $(k \to \infty)$, то $0 \leqslant \rho(z) = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \times$

$$\times \frac{q_k \ln q_k}{q_k \ln q_k - \ln|P_k(z)|} \leqslant \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{1 + 2 j_k (A_{j_k} + 1) T_{j_k}^n / (13 q_k \ln q_k)} = 0.$$

Осталось показать, что существуют точки z, для которых $\rho(z) = 1$. Пусть $D_k = \{z \in \Pi(0, 2R_{j_k}) : \ln|P_k(z)| < -s^4\sqrt{T_{j_k}}\}$.
Оценим сверху меру множества D_k. Так как $\|P_k\|_{\Pi(0,\, 2R_{j_k})} \geqslant 1$, то $\exists_{z'} \in \Pi(0, 2R_{j_k})$ такое, что $\ln|P_k(z')| \geqslant 0$.
Тогда в силу плюрисубгармоничности функции $\ln|P_k(z)|$

$$0 \leqslant \int\limits_{\Pi(z',\, 4R_{j_k})} \ln|P_k(z)|\, dm = \int\limits_{D_k} + \int\limits_{\Pi(z')\, 4R_{j_k}) / D_k} \leqslant -s_k{}^4\sqrt{T_{j_k}}\, m(D_k) +$$

$$+ \ln\|P_k\|_{\Pi(0, 6R_{j_k})} \int\limits_{\Pi(0, 6R_{j_k})} dm \leqslant -s_k{}^4\sqrt{T_{j_k}}\, m(D_k) + A(n) s_k R_{j_k}^n,$$

откуда получаем $m(D_k) \leqslant A(n) R_{j_k}^n T_{j_k}^{-1/4} \leqslant A(n) 2^{-k}$.

Это означает, что множество $C^n \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} D_k$ не пусто Для любой точки z из этого множества $\ln|P_k(z)| \geqslant -s_k \sqrt[4]{T_{j_k}}$ для достаточно больших k. Так как $s_k \sqrt[4]{T_{j_k}} \sim (2n T_{j_k}^{-1/4}) q_k \ln q_k$, то $s_k \sqrt[4]{T_{j_k}} / (q_k \times \ln q_k) \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда для $z' \in C^n \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} D_k$ $\rho(z) = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, q_k \ln q_k / (q_k \ln q_k - \ln|P_k(z)|) \geqslant \overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, q_k \ln q_k / (q_k \ln q_k + s_k \sqrt[4]{T_{j_k}}) = 1$.

Таким образом, искомая целая функция $F(z, w)$ построена.

Список литературы: 1. *Ронкин Л. И.* Введение в теорию целых функций многих переменных. —М.: Наука, 1971. — 432 с. 2. *Lelong P.* Fonctions entières (n variables) et les fonctions plurisousharmoniques de type exponentielle. Applications à l'analyse fonctionelle. — Современные проблемы теории аналитических функций. —М.: Наука, 1966, с. 188—208. 3. *Ронкин Л. И.* О типах целой функции двух комплексных переменных. — Мат. сб. 1956, 39, (81) № 2, с. 253—266. 4. *Ставский М. Ш.* О порядке роста целой функции двух переменных по одной из переменных. — Теория функций, функц. анализ и их прил., 1969, вып. 8, с. 136—142. 5. *Losefson B.* On the eguivalence between locally polar and globally polar sets for the pluri subharmonis functions in C^n. — Arc. für Mat: 16, 1978, p. 109—115.

Поступила в редколлегию 12. 05. 80.