УДК 517.937 : 962

Л. А. ВЛАСЕНКО

О ПОЛНОТЕ НОРМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ $Au'(t)+Bu(t)=f(t)$

Пусть A, B — замкнутые линейные операторы, действующие из банахова пространства X в банахово пространство Y, $f(t)$ — локально интегрируемая по Бохнеру на $0 \leqslant t < T < \infty$ вектор-функция со значениями в Y. Обобщенным решением задачи Коши

$$\begin{gathered} Au'(t)+Bu(t)=f(t), \quad 0<t<T \\ u(0)=u_0 \end{gathered} \tag{1}$$

называется такая функция $u(t) \in C([0,T),X)$, что $Au(t) \in C([0,T),Y)$ и удовлетворяется уравнение $Au(t)-Au_0+B\int\limits_0^t u(s)\,ds=\int\limits_0^t f(s)\,ds$.

Решение называется нормальным, если функции $u(t)$, $Au(t)$ имеют конечные экспоненциальные типы. Через ρ_γ обозначается множество γ — регулярных точек, в которых резольвентный оператор $R(\lambda)=(\lambda A+B)^{-1}A$ определен на D_A, через $E_A=D_A$ банахово пространство с нормой графика оператора A. Для $\lambda \in \rho_\gamma$ резольвента $R(\lambda) \in [E_A,\ X]$ является голоморфной оператор-функцией. Обозначим $g(\lambda)=\|R(\lambda)\|_{[E_a,\,X]}$, $S(\lambda)=(\lambda A+B)^{-1}$

В работе [2] локальным преобразованием Лапласа на $[0,T)$ над локально суммируемым оригиналом $y(s)$ называется вектор-функция $F(\lambda)$, мероморфная в открытом угле:

$$\Gamma=\left\{\lambda : \psi_1<\arg\lambda<\psi_2,\ -\frac{\pi}{2}<\psi_1<0,\ 0<\psi_2<\frac{\pi}{2}\right\} \tag{2}$$

и допускающая в меньшем угле

$$\Gamma_+=\{\lambda : \alpha \leqslant \arg\lambda \leqslant \beta,\ \psi_1<\alpha\leqslant 0,\ 0<\beta\leqslant\psi_2\} \tag{3}$$

представление

$$F(\lambda)=\int\limits_0^t y(s)\,e^{-\lambda s}\,ds+e^{-\lambda t}\varepsilon(\lambda,\ t),\ 0\leqslant t<T \tag{4}$$

с некоторой функцией $\varepsilon(\lambda, t)$. Для формулировки условий на $\varepsilon(\lambda, t)$ вводится следующий предел по множеству M полной относительной меры на луче $r>0$:

$$\omega(\varepsilon, M, \alpha, \beta)=\begin{cases}\overline{\lim\limits_{\substack{r\to\infty\\ r\in M}}}\dfrac{1}{r(\beta-\alpha)}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}\ln^{+}\|\varepsilon(re^{i\varphi}, t)\|\,d\varphi, & \alpha<\beta;\\ \overline{\lim\limits_{\substack{r\to\infty\\ r\in M}}}\dfrac{1}{r}\ln^{+}\|\varepsilon(re^{i\alpha}, t)\|, & \alpha=\beta.\end{cases}$$

Несколько ослабляя требования на $\varepsilon(\lambda, t)$ из [2], потребуем для локального преобразования Лапласа (4) выполнение $\overline{\omega}(\varepsilon, \alpha, \beta)=\inf\limits_{M}\omega(\varepsilon, M, \alpha, \beta)=0$. Такое обобщение не меняет свойств локального преобразования Лапласа, установленных в [2].

Степенью мероморфной оператор-функции $R(\lambda)\in[E_A, X]$ называется величина $\tau=\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\dfrac{1}{2\pi r}\displaystyle\int_0^{2\pi}\ln^{+}g(re^{i\varphi})\,d\varphi$. Через $\overline{\tau}$ обозначается величина $\overline{\omega}\left(g, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$.

Теорема 1. *Пусть* $R(\lambda)\in[E_A, X]$ — *мероморфная оператор-функция в некотором угле* Γ *(2) и существует такой угол* Γ_+ *(3), в котором* $\overline{\omega}(g, \alpha, \beta)=0$, *а функция* $f(t)$ *допускает представление*

$$\int_0^t f(s)\,e^{-\lambda s}\,ds=v(\lambda)+\sigma(\lambda, t)\,e^{-\lambda t},\quad 0\leqslant t<T \tag{5}$$

с мероморфной в Γ *функцией* $S(\lambda)\,\sigma(\lambda, t)$ *такой, что* $\omega(S\sigma, M, \alpha, \beta)=0$ *для* $0\leqslant t<T$ *и всякого множества* M *полной относительной меры на луче* $r>0$. *Тогда любое обобщенное решение задачи Коши (1) является оригиналом для локального преобразования Лапласа* $F(\lambda)=R(\lambda)\,u_0+S(\lambda)\,v(\lambda)$.

Замечание. В силу теоремы единственности оригинала для локального преобразования Лапласа [2] условия мероморфности $R(\lambda)\in[E_A, X]$ в угле Γ и $\overline{\omega}(g, \alpha, \beta)=0$ обеспечивают единственность решения задачи Коши (1).

Доказательство. Нетрудно видеть (подробности см. в [6]), что всякое обобщенное решение задачи Коши (1) удовлетворяет уравнению

$$R(\lambda)\,u_0=\int_0^t u(s)\,e^{-\lambda s}\,ds+R(\lambda)\,u(t)\,e^{-\lambda t}-$$
$$-S(\lambda)\int_0^t f(s)\,e^{-\lambda s}\,ds,\quad 0\leqslant t<T.$$

Учитывая разложение для $f(t)$ (5), в Γ_+ при $0 \leqslant t < T$ справедливо $R(\lambda)u_0 + S(\lambda)v(\lambda) = \int\limits_0^t u(s)e^{-\lambda s}ds + e^{-\lambda t}[R(\lambda)u(t) - S(\lambda) \times \sigma(\lambda, t)]$. Остается показать, что $\overline{\omega}(\varepsilon, \alpha, \beta) = 0$, где $\varepsilon(\lambda, t) = R(\lambda)u(t) - S(\lambda)\sigma(\lambda, t)$. Так как $\omega(\varepsilon, M, \alpha, \beta) \leqslant \omega(g, M, \alpha, \beta) + \omega(S\sigma, M, \alpha, \beta)$, то, действительно, $\overline{\omega}(\varepsilon, \alpha, \beta) = 0$.

Теорема доказана.

Для однородного уравнения

$$Au'(t) + Bu(t) = 0, \quad 0 < t < T \tag{6}$$

элементарным решением называется функция вида $u(t) = e^{\lambda_0 t} \times \left[\varphi_k + \varphi_{k-1}t + \cdots \varphi_0 \frac{t^k}{k!}\right]$, где $\varphi_j \in X$. Можно показать, что эта функция будет обобщенным решением уравнения (6) тогда и только тогда, когда векторы $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$ образуют цепочку из собственного и присоединенных векторов пучка $\lambda A + B$, соответствующих собственному числу λ_0. Нетрудно видеть, что если λ_0 — полюс $R(\lambda) \in [E_A, X]$ кратности r_0, то проектор $P_0 y = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{c_0} R(\mu)y\,d\mu$, определенный в [5], проектирует D_A на множество собственных и присоединенных векторов пучка $\lambda A + B$, соответствующих собственному числу λ_0. В этом случае множество элементарных решений уравнения (6), соответствующих собственному числу λ_0, описывается функциями вида $u(t) = \left(\frac{d}{dt} - \lambda_0\right)^p \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{c_0} R(\lambda)ye^{\lambda t}d\lambda$, $0 \leqslant p \leqslant r_0 - 1$, $y \in D_A$.

Теорема 2. *Пусть $R(\lambda) \in [E_A, X)$ является мероморфной функцией конечной степени с множеством полюсов $\{\lambda_k\}_1^\infty$ кратности $\{r_k\}_1^\infty$ и существует такой угол Γ_+ (3), что $\overline{\omega}(g, \alpha, \beta) = 0$. Тогда существует постоянная $c \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]^*$ такая, что любое обобщенное решение $u(t)$ однородного уравнения (6) равномерно аппроксимируется на каждом сегменте $[c\overline{\tau}, T_1]$ $(c\overline{\tau} < T_1 < T)$ линейными комбинациями элементарных решений:*

$$u_j(t) = \sum_{k=1}^{j} \sum_{p=1}^{r_k - 1} \alpha_{p,k}^{(j)} \left(\frac{d}{dt} - \lambda_k\right)^p \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{c_k} e^{\lambda t}R(\lambda)u(0)\,d\lambda,$$

где c_k — окружность с центром λ_k и столь малым радиусом, что все остальные полюсы лежат вне c_k.

Если $\overline{\tau} = 0$, то многообразие собственных и присоединенных векторов пучка $\lambda A + B$ плотно в пространстве решений задачи Коши для уравнения (6).

---

* Константа c определена в [2].

Доказательство. По теореме 1 в случае $f(t)=0$ любое обобщенное решение $u(t)$ уравнения (6) является оригиналом для локального преобразования Лапласа $R(\lambda)\,u(0)$. В силу теоремы 3.2 из [2] функцию $u(t)$ можно равномерно аппроксимировать на каждом сегменте $[c\bar{\tau}, T_1]$ $(c\bar{\tau}<T_1<T)$ функциями вида

$$u_j(t)=\sum_{k=1}^{j}\sum_{p=1}^{r_k-1}\alpha_{p,k}^{(j)}\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_k}e^{\lambda t}(\lambda-\lambda_k)^p R(\lambda)\,u(0)\,d\lambda,$$

которые являются линейными комбинациями экспоненциальных решений однородного уравнения (6).

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Предположим, что функция $f(t)$ (дополненная нулем, если $T<\infty$) допускает классическое преобразование Лапласа $\tilde{f}(\lambda)$ с абсциссой сходимости σ_f и на прямой $\operatorname{Re}\lambda=a>\max\{0,\sigma_f\}$ определена функция $\theta(\lambda)=S(\lambda)\tilde{f}(\lambda)$ и конечны интегралы $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}(\cdot)\,d\lambda$ от функций $\|\theta(\lambda)\|$, $\|A\theta(\lambda)\|$. Тогда любое обобщенное решение задачи Коши (1) равномерно аппроксимируется на каждом сегменте $[c\bar{\tau}, T_1]$ нормальными решениями:*

$$u_j(t)=\sum_{k=1}^{j}\sum_{p=1}^{r_k-1}\alpha_{p,k}^{(j)}\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_k}e^{\lambda t}(\lambda-\lambda_k)^p R(\lambda)\,\bar{u}_0\,d\lambda+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{\lambda t}\theta(\lambda)\,d\lambda,$$

$$\text{где }\ \bar{u}=u_0-\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\theta(\lambda)\,d\lambda.$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что любое решение неоднородного решения (1) представимо в виде $u(t)=\bar{u}(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{\lambda t}\theta(\lambda)\,d\lambda$, где $\bar{u}(t)$ — некоторое решение соответствующего однородного уравнения. По теореме 2 функция $\bar{u}(t)$ равномерно на каждом сегменте $[c\bar{\tau}, T_1]$ аппроксимируется следующими функциями:

$$u_j(t)=\sum_{k=1}^{j}\sum_{p=1}^{r_k-1}\alpha_{p,k}^{(j)}\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_k}(\lambda-\lambda_k)^p R(\lambda)\,\bar{u}_0\,d\lambda.$$

Отсюда сразу же следует доказательство следствия.

Следствие 2. *При $\bar{\tau}=0$ в условиях следствия 1 всякий начальный вектор u_0 задачи Коши (1) аппроксимируется элементами вида* $\sum_{k=1}^{j} h_k + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \theta(\lambda)\,d\lambda$, *где h_k — собственные и присоединенные векторы пучка $\lambda A + B$.*

Пусть Ω — открытая ограниченная область в R^n с гладкой границей L. В $L_2(\Omega,\ \boldsymbol{C}^N)$ рассмотрим сильно эллиптический оператор [3]:

$$B=(-1)^m \sum_{(k)} B^{k_1\ldots k_m}(x)\frac{\partial^{2m}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_m^{k_m}}+Q,$$

где $B^{k_1\ldots k_m}(x)$ — $N\times N$ матрицы; Q — линейный дифференциальный оператор порядка меньше $2m$. Область определения D_B есть многообразие тех вектор-функций $u(x)$ из пространства Соболева $W_2^{2m}(\Omega)$, которые удовлетворяют условию

$$u|_L=\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_L=\cdots\frac{\partial^{m-1}u}{\partial \nu^{m-1}}\Big|_L=0.$$

$\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right.$ — дифференцирование по нормали к поверхности $\left.L\right)$.

В [3] показано, что при достаточной гладкости коэффициентов оператора B за счет добавки вида sI ($s>0$, I — единичная матрица) можно обеспечить компактность обратного отображения B^{-1}. Более того, при $n<2m$ оператор B^{-1} оказывается ядерным.

В гильбертовом пространстве $L_2(\Omega,\ \boldsymbol{C}^N)$ рассмотрим задачу Коши:

$$A\frac{\partial u(t,\ x)}{\partial t}+Bu(t,\ x)=0,\ 0<t<T \quad u(0,\ x)=u_0(x), \qquad (7)$$

где A — ограниченный в $L_2(\Omega,\ \boldsymbol{C}^N)$, вообще говоря, необратимый оператор.

Теорема 3. *Пусть $n<2m$. Всякое обобщенное решение задачи Коши (7) на любом сегменте $[0,\ T_1]$ $(0<T_1<T)$ можно равномерно аппроксимировать линейными комбинациями элементарных решений:*

$$u_j(t,\ x)=\sum_{k=1}^{j}\sum_{p=1}^{r_k-1}\alpha_{p,\,k}^{(j)}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{c_k}(\lambda-\lambda_k)^p e^{\lambda t}R(\lambda)\,u_0(x)\,d\lambda,$$

где λ_k — полюсы резольвенты $S(\lambda)$ кратности r_k.

Собственные и присоединенные векторы пучка $\lambda A + B$ плотны в пространстве решений задачи Коши (7).

Доказательство. Согласно теореме 2 достаточно показать, что резольвента $S(\lambda)=(\lambda A+B)^{-1}$ является мероморфной функцией нулевой степени. Заметим, что $(\lambda A+B)=B(\lambda B^{-1}A+I)$, где $B^{-1}A$ — вполне непрерывный оператор. Поэтому $S(\lambda) \in [L_2]$ является мероморфной функцией. С помощью оценки на резольвенту $(\lambda B^{-1}A + I)^{-1}$ для ядерного оператора $B^{-1}A$ (см. [1, с. 298]) доказывается, что оператор $(\lambda B^{-1}A + I)^{-1}$ имеет нулевую степень. Следовательно, нулевую степень имеет $S(\lambda)$.

Теорема доказана.

Заметим, что для неоднородной задачи Коши, соответствующей уравнению (7), при требованиях на $f(t)$ из следствия 1 обобщенное решение на любом сегменте $[0, T_1]$ $(0 < T_1 < T)$ можно равномерно аппроксимировать нормальными.

Список литературы: 1. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. — М.: Наука. — 1965. — 445 с. 2. *Любич Ю. И., Ткаченко В. А.* Теория и некоторые применения локального преобразования Лапласа//Мат. сб. — 1966. — Вып. 3. — С. 416—437. 3. *Лидский В. Б.* О суммируемости рядов по главным векторам несамосопряженных операторов//Науч. тр./ Моск. мат. об-во. — 1962. — Ч. 2. — С. 3—35. 4. *Руткас А. Г.* Задача Коши для уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$//Дифференц. уравнения. — 1975. — Ч. 2, № 11. — С. 1996—2010. 5. *Радбель Н. И.* Упорядочение пары линейных операторов и задача Коши для уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = 0$ в банаховом пространстве: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Донецк, 1984. — 133 с. 6. *Власенко Л. А., Руткас А. Г.* Исследование уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$ с помощью резольвенты пучка $\lambda A + B$. — М., 1982. — С. 7—18. Деп. в ВИНИТИ, 1982. № 4885—82.

Поступила в редколлегию 03.10.85