

---

УДК 517.925.71

В. Р. СМИЛЯНСКИЙ

**О МНОЖИТЕЛЯХ СТОКСА ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ  
ПЕРВОГО РАНГА**

---

Пусть задана система из  $n$  уравнений ( $\bar{w}$ -вектор):

$$\frac{d\bar{w}}{dz} = \left( A_0 + \frac{A_1}{z} \right) \bar{w}, \quad A_0 = \text{diag} \{ \lambda_1, \dots, \lambda_n \}, \quad (1)$$

для которой все постоянные  $\lambda_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) различны и ни один из диагональных элементов  $[A_1]_{kk} \equiv r_k$  постоянной матрицы  $A_1$  не равен целому числу. Точка  $z = \infty$  является иррегулярной особой точкой (первого ранга) системы (1). Точка  $z = 0$  — регулярная особая точка системы и, следовательно, ее фундаментальная матрица (ф. м.) может быть представлена в виде  $\Psi(z) = U(z) z^J$ , где матрица  $U(z)$  голоморфна при  $z = 0$ , а  $J$  — жорданова форма некоторой постоянной матрицы  $\Delta$ . Формальная матрица — решение системы (1) имеет вид

$$\hat{\Phi}(z) = P(z) z^R e^{A_0 z}, \quad P(z) = \sum_{v=0}^{\infty} P_v z^{-v}, \quad (1a)$$

$$\det P_0 \neq 0, \quad R = \text{diag} \{r_1, \dots, r_n\},$$

где  $P_v$  — постоянные матрицы. Введем линии («линии Стокса») в комплексной плоскости  $z$ , определяемые условием

$$\text{Re } \lambda_{i_1} z = \text{Re } \lambda_{i_2} z = \dots = \text{Re } \lambda_{i_k} z \quad (2 \leq k \leq n). \quad (1б)$$

Возьмем какую-либо линию (1б) в качестве исходной —  $l_1$  и последовательно (против часовой стрелки) обозначим остальные через  $l_2, l_3, \dots$ . В секторе  $l_1 \leq \arg z < l_1 + \pi$  любая пара выражений  $\text{Re } \lambda_{\alpha} z, \text{Re } \lambda_{\beta} z$  ( $\alpha \neq \beta$ ) становится равной только на одной линии  $l_v$ . Любо́й сектор в  $z$ -плоскости, полуоткрытый или открытый, обладающий указанным свойством, будем называть стандартным сектором (С. С.) (см. [1, с. 98]), а число линий (1б) в С. С. обозначим через  $L$ . Если матрица  $P_0$  в выражениях (1a) и нумерация характеристических корней  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  зафиксированы (это и будет предполагаться ниже), то в любом С. С. существует единственная ф. м., для которой формальное решение (1a) является асимптотическим представлением при больших  $|z|$  (см. [1—3, теорема 1.1]). Ф. м., имеющую асимптотическое представление (1a) в каком-либо секторе, будем называть асимптотически базисной в этом секторе.

Пусть ф. м.  $\Phi_{(v-1)L+1}(z)$  ( $v = 1, 2, 3$ ) асимптотически базисны соответственно в С. С.:

$$l_2 - \pi + (v-1)\pi \leq \arg z < l_2 + (v-1)\pi, \quad v = 1, 2, 3 \\ (l_2 + \pi \equiv l_{L+2}; \quad l_2 + 2\pi \equiv l_{2L+2}) \quad (1в)$$

и пусть нумерация  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  выбрана из условия  $\text{Re } \lambda_j z < \text{Re } \lambda_{j+1} z$  в секторе  $l_1 < \arg z < l_2$ . В этом случае  $\Phi_1(z) = \Phi_{L+1}(z) F_1$ ,  $\Phi_{L+1}(z) = \Phi_{2L+1}(z) F_2$ , где  $F_1$  — постоянная верхняя треугольная матрица с единичными элементами на главной диагонали, а  $F_2$  — постоянная нижняя треугольная матрица с единичными элементами на главной диагонали. Нетривиальные элементы матриц  $F_1, F_2$  выражаются через множители Стокса, и если  $k = n$  в (1б), то совпадают с ними. Как известно,  $\Psi(z) = \Phi_1(z) T_1$ , где  $T_1$  — постоянная неособая матрица («матрица связи»). Для определения матриц связи системы (1) в полной окрестности  $z = \infty$  достаточно знать  $T_1$  [4, § 1]. С другой стороны, существуют соотношения

$$1) \quad \Phi_1(z e^{i2\pi}) = \Phi_1(z) Y,$$

где  $i = \sqrt{-1}$ , а  $Y$  — постоянная неособая («циклическая») матрица; 2)  $Y = T_1 e^{i2\pi R} T_1^{-1}$  [4, § 1]; 3)  $F_2 F_1 = e^{-i2\pi R} Y$  [1, теоремы 1.2, 1.7]. По известным матрицам  $Y$  и  $R$  матрицы  $F_1, F_2$  могут быть

однозначно определены по теореме о разложении матрицы в произведение треугольных матриц.

Таким образом, задача сводится к тому, чтобы для системы (1) найти либо  $T_1$  (наиболее общий случай), либо только  $Y$  (не находя явно  $T_1$ ).

Вектор-решение  $\bar{y}_k(z)$  системы (1) в виде контурных интегралов Лапласа имеет вид

$$\bar{y}_k(z) = e^{\lambda_k z} \int_{\Sigma_k} e^{z(\xi - \lambda_k)} \bar{v}_k(\xi) d\xi, \quad k = \overline{1, n}, \quad (2)$$

где  $\bar{v}_k(\xi)$  — подходящим образом выбранный вектор-решение следующей системы из  $n$  уравнений:

$$(A_0 - \xi E) \frac{d\bar{v}}{d\xi} = (A_1 + E) \bar{v} \quad (3)$$

( $E$  — единичная матрица;  $\bar{v}$  — вектор), а  $\sum_k$  — подходящим образом выбранный контур интегрирования. Система (3) имеет только регулярные особые точки  $\xi = \lambda_1, \dots, \lambda_n$  и  $\xi = \infty$ . Показатели, относящиеся к  $\xi = \lambda_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ), равны нулю, за исключением одного, равного  $-(r_k + 1)$ . Вектора-решения, соответствующие нулевым показателям, голоморфны в  $\xi = \lambda_k$ . Обозначим через  $X_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) ф. м. системы (3), у которой первый столбец есть не голоморфное в  $\xi = \lambda_k$  решение  $\bar{v}_k(\xi)$  (соответствующее показателю  $-(r_k + 1)$ ), а остальные  $(n - 1)$  столбцов — голоморфные в  $\xi = \lambda_k$  решения. Вектор  $\bar{v}_k(\xi) = \bar{v}'_k(\xi) (\xi - \lambda_k)^{-(r_k + 1)}$ , где вектор  $\bar{v}'_k(\xi)$  голоморфен в  $\xi = \lambda_k$ . Именно вектор  $\bar{v}_k(\xi)$  подразумевается везде ниже в (2). Обозначим через  $X_\infty$  каноническую (типа  $\Psi(z)$ ) ф. м. системы (3) при  $\xi = \infty$ . Матрицы  $T_1$  и  $Y$  явно выражены через постоянные матрицы, связывающие ф. м.  $X_k, X_\infty$ .

Интегралы (2) и решения системы (3) уже применялись для анализа системы (1) [5]. По мнению автора, метод, развитый в настоящей статье, более удобен для практического нахождения матрицы связи  $T_1$  и множителей Стокса (МС). Например, этим методом найдены в явном виде  $T_1$  и МС для скалярного уравнения  $n$ -го порядка с линейными коэффициентами («уравнения Лапласа»)\*, зависящего от  $2n$  параметров [4, § 2].

Проведем в  $\xi$ -плоскости из точки  $\lambda_k$  полубесконечный луч  $f_k$  так, чтобы он не встречал на своем пути других особых точек  $\lambda_j$  ( $j \neq k$ ). Пусть контур  $\sum_k$  представляет собой петлю, идущую из бесконечности вдоль этого луча, обходящую точку  $\xi = \lambda_k$  в положительном направлении (против часовой стрелки) и возвращающуюся к бесконечности вдоль этого же луча. Как известно [6, 7], если на указанном луче выполнено условие  $\operatorname{Re} z (\xi - \lambda_k) < 0$ , то (2) является решением системы (1), причем решением,

\* МС в [4] найдены также и другим методом.

для которого соответствующий столбец матрицы  $\widehat{\Phi}(z)$  является асимптотическим представлением. Обозначим аргумент левой стороны луча  $f_k$  (если смотреть из точки  $\lambda_k$ ), т. е. линии, вдоль которой контур интегрирования идет из бесконечности к точке  $\lambda_k$ , через  $\omega$ . На левой стороне луча  $f_k$  задаем  $\operatorname{arg}(\xi - \lambda_k) = \omega$ . (Ниже многозначные функции  $(\xi - \lambda_k)^{-r_k+1}$  рассматриваются на римановой поверхности, причем левая сторона луча  $f_k$  здесь — место склейки левого берега разреза нижнего листа  $(\xi - \lambda_k)$  с правым берегом верхнего листа). Условие на луче  $\operatorname{Re} z(\xi - \lambda_k) < 0$  будем записывать в виде

$$\pi/2 < \operatorname{arg} z + \omega < 3\pi/2. \quad (4)$$

Если  $\omega$  задано, то (4) однозначно определяет область  $\operatorname{arg} z$ , где (2) асимптотически базисно. В определенных пределах ( $\omega_k, \min < \omega < \omega_k, \max$ ) луч  $f_k$  можно поворачивать так, чтобы он не пересекал других особых точек  $\lambda_j$ . Если при этом на луче постоянно выполнено (4), то такие решения являются аналитическими продолжениями исходного. Если под (2) понимать именно такое решение, то область асимптотической базисности (2) больше, чем  $\pi \left( \frac{\pi}{2} - \omega_k, \max < \operatorname{arg} z < \frac{3}{2} \pi - \omega_k, \min \right)$ . Пусть все лучи  $f_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) параллельны и не пересекают других особых точек  $\lambda_j$  ( $j \neq k$ ). Тогда совокупность векторов  $\bar{y}_k(z)$  ( $k = \overline{1, n}$ ) в (2) составляет ф. м., асимптотически базисную в общем секторе, большем, чем  $\pi$ , т. е. асимптотически базисную в стандартном секторе.

Введенную выше исключительную ф. м.  $\Phi_1(z)$  будем считать составленной из векторов-столбцов  $\bar{y}_k(z)$ . Полагаем далее, что нумерация  $\lambda_k$  произведена «геометрическим» способом, указанным в теореме 2.1 [4]. Кроме того, для определенности будем считать, что лучи  $f_k$  перпендикулярны оси проектирования [4]. Введем в  $\xi$ -плоскости контур  $\Omega_n$ . Он представляет собой петлю, идущую из бесконечности вдоль луча (параллельного лучам  $f_k$  и выходящего из точки  $\xi = 0$ ), обходящую против часовой стрелки точки  $\xi = 0$  по окружности такой, это все точки  $\lambda_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) лежат внутри ее, и возвращающуюся к бесконечности вдоль этого же луча [4, рис. 2]. В окрестности  $\xi = \infty$  ф. м.  $X_\infty(\xi)$  имеет вид

$$X_\infty(\xi) = \left( \sum_{\nu=0}^{\infty} X_{\infty\nu} \xi^{-\nu} \right) \left( \frac{1}{\xi} \right)^Q, \quad (5)$$

где  $X_{\infty\nu}$  — постоянные матрицы;  $Q$  — жорданова форма некоторой постоянной матрицы. Для выражения (5) задаем на левой стороне луча контура  $\Omega_n$ :  $\operatorname{arg} \xi = \omega$ .

**Предложение 1.** Пусть контур  $\Omega_n$  расположен в той области  $\xi$ -плоскости, где справедливо разложение (5). Пусть в точке

$\xi = \infty$  нет голоморфных векторов-решений системы (3). Тогда

$$\int_{\Omega_n} X_{\infty}(\xi) e^{z\xi} d\xi = \Psi(z). \quad (6)$$

Доказательство разделяется на два случая. 1. Пусть какой-либо вектор-столбец  $\bar{x}_{\infty}(\xi)$  в выражении (5) имеет вид ( $\bar{x}_{\infty v}$  — постоянные векторы)

$$\bar{x}_{\infty}(\xi) = \sum_{v=0}^{\infty} x_{\infty v} \xi^{-v-q}, \quad (7)$$

где  $q$  — соответствующий элемент матрицы  $Q$ . Тогда

$$\int_{\Omega_n} \bar{x}_{\infty}(\xi) e^{z\xi} d\xi = \sum_{v=0}^{\infty} \bar{x}_{\infty v} \int_{\Omega_n} \xi^{-v-q} e^{z\xi} d\xi. \quad (8)$$

Замена  $z\xi = t$  преобразует правую сторону равенства (8) в

$$z^{q-1} \sum_{v=0}^{\infty} z^v \bar{x}_{\infty v} \int_{\Omega'_n} e^{t} t^{-v-q} dt, \quad (9)$$

где контур интегрирования  $\Omega'_n$  в  $t$ -плоскости подобен контуру  $\Omega_n$  в  $\xi$ -плоскости. Очевидно, что (9) является одним из канонических векторов-решений системы (1) в окрестности  $z = 0$ , т. е. является столбцом матрицы  $\Psi(z)$ . 2. Пусть какой-либо вектор-столбец  $\bar{x}_{\infty}(\xi)$  в выражении (5) имеет вид

$$\bar{x}_{\infty}(\xi) = \left(\frac{1}{\xi}\right)^q \sum_{k=0}^l \bar{u}_k \left(\frac{1}{\xi}\right) \ln^k \left(\frac{1}{\xi}\right), \quad (10)$$

где векторы  $\bar{u}_k \left(\frac{1}{\xi}\right)$  голоморфны в  $\xi = \infty$  и

$$\bar{u}_k \left(\frac{1}{\xi}\right) = \sum_{v=0}^{\infty} \bar{u}_{kv} \xi^{-v} \quad (11)$$

( $\bar{u}_{kv}$  — постоянные векторы). Тогда

$$\int_{\Omega_n} \bar{x}_{\infty}(\xi) e^{z\xi} d\xi = \int_{\Omega_n} \left(\frac{1}{\xi}\right)^q \left[ \sum_{k=0}^l \bar{u}_k \left(\frac{1}{\xi}\right) \ln^k \left(\frac{1}{\xi}\right) \right] e^{z\xi} d\xi. \quad (12)$$

Производя после замены  $z\xi = t$  несложные преобразования, получаем правую сторону равенства (12) в виде

$$z^{q-1} \int_{\Omega'_n} t^{-q} \left[ \sum_{k=0}^l \bar{u}_k \left(\frac{z}{t}\right) \sum_{m=0}^k C_k^m (\ln z)^m (-\ln t)^{k-m} \right] e^t dt, \quad (13)$$

где  $C_k^m$  — число сочетаний из  $k$  по  $m$  и  $C_0^0 \equiv 1$ . Далее последовательно получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^l \bar{u}_k \left( \frac{z}{t} \right) \sum_{m=0}^k C_k^m (\ln z)^m (-\ln t)^{k-m} = \\ & = \sum_{m=0}^l (\ln z)^m \left( \sum_{k=m}^l \bar{u}_k \left( \frac{z}{t} \right) C_k^m (-\ln t)^{k-m} \right) = \\ & = \sum_{m=0}^l (\ln z)^m \left( \sum_{k=m}^l \sum_{v=0}^{\infty} \bar{u}_{k\nu} z^{\nu} t^{-\nu} C_k^m (-\ln t)^{k-m} \right) = \\ & = \sum_{m=0}^l (\ln z)^m \left( \sum_{v=0}^{\infty} z^{\nu} t^{-\nu} \left[ \sum_{k=m}^l \bar{u}_{k\nu} C_k^m (-\ln t)^{k-m} \right] \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя последнее выражение из (14) в (13), получаем (13) в виде

$$\begin{aligned} & z^{q-1} \sum_{m=0}^l \varphi_m(z) (\ln z)^m; \\ \varphi_m(z) & = \sum_{v=0}^{\infty} z^{-v} \int_{\Omega'_n} t^{-v-q} \left[ \sum_{k=m}^l \bar{u}_{k\nu} C_k^m (-\ln t)^{k-m} \right] e^t dt. \end{aligned} \quad (15)$$

Очевидно, что (15) является одним из канонических решений системы (1) в окрестности  $z = 0$ , т. е. является столбцом матрицы  $\Psi(z)$ .

*Замечание 1.* Из доказательства предложения 1 видно, что показатели при  $z = 0$  системы (1)  $\rho = q - 1$ . Пусть часть линейно независимых векторов-решений системы (3) голоморфна в  $\xi = \infty$ . Замена  $\bar{w} = z^g E \bar{w}'$  в (1) ( $g$  — скалярный параметр) приводит к системе

$$\frac{d\bar{w}'}{dz} = \left[ A_0 + \frac{A_1 - gE}{z} \right] \bar{w}'. \quad (16)$$

Очевидно, что всегда можно подобрать  $g$  так, чтобы соответствующая (3) система (16) не имела голоморфных решений в  $\xi = \infty$ .

*Замечание 2.* Далее под ф. м.  $\Psi(z)$  будет пониматься ф. м., определяемая (6), а под ф. м.  $\Phi_1(z)$  — определенная выше ф. м.  $\Phi_1(z)$ , составленная из векторов-столбцов  $\bar{y}_k(z)$ . Именно для этих ф. м. рассматриваются матрицы  $T_1$  и  $Y$ .

Пусть  $X_{\infty} = X_k H_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ), где  $H_k$  — постоянная неособая матрица и аналитическое продолжение  $X_{\infty}$  от  $\infty$  к  $\lambda_k$  проведено вдоль левой стороны луча  $f_k$  (или, что то же самое, по той части петли  $\sum_k$ , которая идет от бесконечности к  $\xi = \lambda_k$ ). Произведем аналитическое продолжение ф. м.  $X_{j+1}$  ( $j = \overline{1, n-1}$ ) из

окрестности точки  $\lambda_{j+1}$  в окрестность точки  $\lambda_j$  вдоль линии  $\overline{a_{j+1}a_j}$  (рис. 1). Исходная точка  $a_{j+1}$  этой линии берется на левой стороне луча  $f_{j+1}$  в окрестности точки  $\lambda_{j+1}$ , а конечная точка  $a_j$  — на левой стороне луча  $f_j$  в окрестности точки  $\lambda_j$ . Полагаем, что при аналитическом продолжении вдоль недеформированной линии  $\overline{a_{j+1}a_j}$  выбрано  $\omega \leq \arg(\xi - \lambda_k) < \omega + 2\pi$  в окрестности  $\xi = \lambda_k$  для всех  $\phi$ . м.  $X_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ). Далее деформируем эту линию так, что точка  $b_j$  уходит в бесконечность вдоль луча, параллельного лучам  $f_{j+1}$ ,  $f_j$  и расположенного между ними. Тогда деформированную линию  $\overline{a_{j+1}a_j}$  можно представить состоящей из следующих трех частей: 1) окружность вокруг точки  $\lambda_{j+1}$ , которая начинается в точке  $a_{j+1}$  и обходит точку  $\lambda_{j+1}$  против часовой стрелки, заканчиваясь на правой стороне луча  $f_{j+1}$ ; 2) часть правой стороны луча  $f_j$  (в направлении от  $\lambda_{j+1}$  к  $\infty$ ); 3) часть левой стороны луча  $f_j$  (к направлению от  $\infty$  к  $\lambda_j$ ) вплоть до точки  $a_j$ . Аналитическое продолжение  $\phi$ . м.  $X_{j+1}$  по окружности дает  $X_{j+1} \rightarrow X_{j+1}C_{j+1}$  (где  $C_{j+1} = \text{diag}\{e^{-i2\pi\nu_{j+1}}, 1, \dots, 1\}$ ); далее по правой стороне луча  $f_{j+1}$  дает  $X_{j+1}C_{j+1} \rightarrow X_\infty \times \times H_{j+1}^{-1}C_{j+1}$ ; по левой стороне луча  $f_j$  —  $X_\infty H_{j+1}^{-1}C_{j+1} \rightarrow X_j H_j \times \times H_{j+1}^{-1}C_{j+1}$ . Таким образом, результат аналитического продолжения  $\phi$ . м.  $X_{j+1}$  по линии  $\overline{a_{j+1}a_j}$  есть  $X_{j+1} \rightarrow X_j \Pi_{j, j+1}$ , где «матрица перехода»  $\Pi_{j, j+1} = H_j H_{j+1}^{-1} C_{j+1}$  ( $j = \overline{1, n-1}$ ) Обозначим

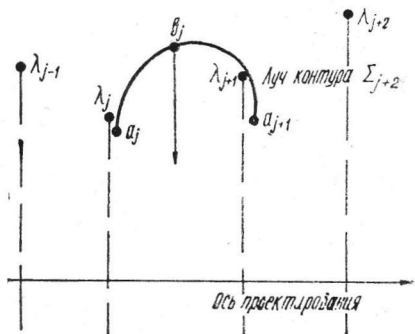


Рис. 1

$$M_k = H_k^{-1} C_k H_k \quad (k = \overline{1, n}). \quad (17)$$

Введем матрицы

$$L_{n-k} = H_{n-k} M_{n-k+1} M_{n-k+2} \dots M_n \equiv B_{n-k} H_n; \quad (18)$$

$$(k = \overline{1, n-1})$$

$$L_n = H_n; \quad B_{n-k} = \Pi_{n-k, n-k+1} \Pi_{n-k+1, n-k+2} \dots \Pi_{n-1, n},$$

а также матрицу  $B$ , у которой  $j$ -я строка есть первая строка матрицы  $B_j$  ( $j = \overline{1, n-1}$ ), а в  $n$ -й строке элемент первого столбца равен единице, элементы всех прочих столбцов равны нулю. Обозначим элементы матриц  $L_k$  через  $[L_k]_{vm}$ .

**Теорема 1.** Пусть система (3) не имеет решений, голоморфных в  $\xi = \infty$ . Тогда

$$T_1 = \begin{pmatrix} [L_1]_{11}, [L_1]_{12}, \dots, [L_1]_{1n} \\ [L_2]_{11}, [L_2]_{12}, \dots, [L_2]_{1n} \\ \dots \\ [L_n]_{11}, [L_n]_{12}, \dots, [L_n]_{1n} \end{pmatrix}; \quad (19)$$

$$F_2 F_1 = e^{-i2\pi R Y} = e^{-i2\pi R} B M B^{-1}; \quad (20)$$

$$M = [\Pi_{12} \Pi_{23} \dots \Pi_{n-1, n}]^{-1} C_1^{-1} [\Pi_{12} C_2^{-1} \Pi_{23} C_3^{-1} \dots \Pi_{n-1, n} C_n^{-1}].$$

Матрицы  $T_1$  и  $F_2 F_1$  не зависят от выбора подсистемы из  $(n-1)$ , голоморфных в  $\xi = \lambda_k$  векторов-столбцов ф. м.  $X_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ).

Матрицу  $M$  в уравнении (20) можно проинтерпретировать следующим образом. Произведем аналитическое продолжение ф. м.

$X_n$  вдоль указанной на рис. 2 кривой, начиная с точки  $a_n$ ; т. е. по простой петле, начинающейся в точке  $a_n$  и охватывающей все конечные особые точки  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , причем обход совершается по часовой стрелке — в отрицательном направлении. (Это эквивалентно обходу в положительном направлении только одной особой точки  $\xi = \infty$ ). Тогда  $X_n \rightarrow X_n M$ .

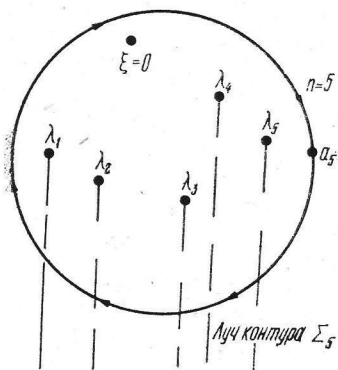


Рис. 2

**Замечание 3.** Как видно из выражения для  $F_2 F_1$  в форме (20), для определения  $F_2 F_1$  достаточно найти только матрицы перехода  $\Pi_{j, j+1}$  ( $j = \overline{1, n-1}$ ) и нет необходимости находить матрицы  $H_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ).

**Доказательство теоремы 1.** Деформируя контур  $\Omega_n$ , легко получить  $\Omega_n = \sum_n \sum_{n-1} \dots \sum_1$ . Подчеркнем, что порядок следования контуров  $\sum_k$  однозначно определяется проекциями векторов  $\lambda_k$  на ось проектирования, т. е. однозначно определяется способом нумерации  $\lambda_k$  по теореме 2.1 [4]. Найдем, во что переходит интеграл в левой стороне равенства (6) при интегрировании по  $\sum_n \sum_{n-1} \dots \sum_1$ . Аналитическое продолжение  $X_\infty$  по левой части петли  $\sum_n$  (вдоль левой стороны луча  $f_n$ ) в окрестность точки  $\xi = \lambda_n$  дает  $X_\infty \rightarrow X_n H_n$ . Далее в процессе обхода по контуру  $\sum_n$  последовательно имеем  $X_n H_n \rightarrow X_n C_n H_n = X_n H_n H_n^{-1} C_n H_n \rightarrow X_\infty M_n$ . Таким образом, обход по  $\sum_n$  дает  $X_\infty \rightarrow X_\infty M_n$ . Продолжая далее полученное выражение по левой части петли  $\sum_{n-1}$  в окрестность точки  $\xi = \lambda_{n-1}$ , имеем  $X_\infty M_n \rightarrow X_{n-1} H_{n-1} M_n$ . Обход по контуру  $\sum_n \sum_{n-1}$  дает  $X_\infty \rightarrow X_\infty M_{n-1} M_n$ . Отсюда очевидно, что при обходе по контуру  $\sum_n \sum_{n-1} \dots \sum_{n-k+1}$  имеем  $X_\infty \rightarrow$



→  $X_\infty M_{n-k+1} M_{n-k+2} \dots M_n$ . Продолжая далее полученное выражение по левой части петли  $\sum_{n-k}$  в окрестность точки  $\xi = \lambda_{n-k}$ , имеем

$$X_\infty \rightarrow X_{n-k} H_{n-k} M_{n-k+1} M_{n-k+2} \dots M_n \equiv X_{n-k} L_{n-k}. \quad (21)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_n} e^{z\xi} X_\infty d\xi &= \sum_{k=0}^{n+1} \int_{\Sigma_{n-k}} e^{z\xi} X_{n-k} L_{n-k} d\xi = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left( \int_{\Sigma_{n-k}} e^{z\xi} X_{n-k} d\xi \right) L_{n-k}, \end{aligned} \quad (22)$$

где, разумеется, при интегрировании по всему контуру  $\sum_{n-k}$  предполагается соответствующее аналитическое продолжение подынтегральной функции. Обозначим любой голоморфный в  $\xi = \lambda_{n-k}$  вектор-столбец ф. м.  $X_{n-k}$  через  $\bar{x}_{n-k}$ . Так как  $\int_{\Sigma_{n-k}} e^{z\xi} \times \bar{x}_{n-k} d\xi = 0$ , то последнее выражение из (22) может быть представлено так ( $\bar{y}_{n-k}$  — вектор вида (2) по контуру  $\sum_{n-k}$ ):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} (\bar{y}_{n-k}, 0, \dots, 0) L_{n-k} &= (\bar{y}_1 [L_1]_{11}, \\ \bar{y}_1 [L_1]_{12}, \dots, \bar{y}_1 [L_1]_{1n}) &+ (\bar{y}_2 [L_2]_{11}, \bar{y}_2 [L_2]_{12}, \dots, \bar{y}_2 [L_2]_{1n}) + \\ \dots &+ (\bar{y}_n [L_n]_{11}, \bar{y}_n [L_n]_{12}, \dots, \\ \bar{y}_n [L_n]_{1n}) &= (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n) T_1 \equiv \Phi_1(z) T_1. \end{aligned} \quad (23)$$

Формула (19) доказана. Из нее имеем  $T_1 = B H_n$ . Следовательно,

$$Y = T_1 e^{i2\pi J} T_1^{-1} = B H_n e^{i2\pi J} H_n^{-1} B^{-1} = B H_n e^{i2\pi Q} H_n^{-1} B^{-1}, \quad (24)$$

поскольку  $J = Q - E$  (см. (9), (15)). Обход ф. м.  $X_\infty$  по контуру  $\Omega_n = \sum_n \sum_{n-1} \dots \sum_1$  дает  $X_\infty(\xi) \rightarrow X_\infty(\xi) M_1 M_2 \dots M_n$ . Обход по контуру  $\Omega_n$  — это обход точки  $\xi = \infty$  в отрицательном направлении. Следовательно (см. (5)), этот обход дает  $X_\infty(\xi) \rightarrow X_\infty(\xi) \times e^{-i2\pi Q}$ , а значит,

$$e^{-i2\pi Q} = M_1 M_2 \dots M_n. \quad (25)$$

Используя уравнение (25), получаем  $H_n e^{i2\pi Q} H_n^{-1} = H_n (M_n^{-1} \times M_{n-1}^{-1} \dots M_1^{-1}) H_n^{-1} = (\prod_{n-1, n}^{-1} \prod_{n-2, n-1}^{-1} \dots \prod_{12}^{-1}) C_1^{-1} H_1 H_n^{-1}$ . Так как  $H_1 H_n^{-1}$  можно представить в виде  $H_1 H_n^{-1} = \prod_{12} C_2^{-1} \prod_{23} C_3^{-1} \dots \prod_{n-1, n} C_n^{-1}$ , окончательно  $H_n e^{i2\pi Q} H_n^{-1} = (\prod_{12} \prod_{23} \dots \prod_{n-1, n})^{-1} (C_1^{-1} \prod_{12} C_2^{-1} \prod_{23} \dots C_{n-1}^{-1} \prod_{n-1, n}) C_n^{-1}$  (26).

Подставляя (26) в (24), получаем (20). Докажем, что матрица  $T_1$  не зависит от выбора подсистемы из  $(n-1)$ , голоморфных в  $\xi = \lambda_k$  векторов-столбцов ф. м.  $X_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ). (Тогда от этого

выбора не зависит и  $Y$ , так как  $Y = T_1 e^{i2\pi J T_1^{-1}}$ . Обозначим элементы матриц  $H_k$  и  $H_k^{-1}$  соответственно через  $[H_k]_{vm}$  и  $[H_k^{-1}]_{vm}$ . Так как

$$H_k^{-1} C_k = (e^{-i2\pi r_k} - 1) \begin{pmatrix} [H_k^{-1}]_{11}, 0, \dots, 0 \\ [H_k^{-1}]_{21}, 0, \dots, 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \dots \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \dots \quad \cdot \\ [H_k^{-1}]_{n1}, 0, \dots, 0 \end{pmatrix} + H_k^{-1}, \quad (27)$$

то ( $\kappa_k = (e^{-i2\pi r_k} - 1)$ ):

$$M_k = \kappa_k \begin{pmatrix} [H_k^{-1}]_{11} [H_k]_{11}, [H_k^{-1}]_{11} [H_k]_{12}, \dots, [H_k^{-1}]_{11} [H_k]_{1n} \\ [H_k^{-1}]_{21} [H_k]_{11}, [H_k^{-1}]_{21} [H_k]_{12}, \dots, [H_k^{-1}]_{21} [H_k]_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \dots \quad \cdot \\ [H_k^{-1}]_{n1} [H_k]_{11}, [H_k^{-1}]_{n1} [H_k]_{12}, \dots, [H_k^{-1}]_{n1} [H_k]_{1n} \end{pmatrix} + E. \quad (28)$$

Матрица  $T_1$  зависит только от элементов первой строки матриц  $L_{n-k}$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ), определяемых по формулам (18), матрица  $M_j$  ( $j = 2, 3, \dots, n$ ) в (18) — только от элементов первой строки матрицы  $H_j$  и элементов первого столбца матрицы  $H_j^{-1}$ . Дополнительно элементы первой строки  $L_{n-k}$  ( $k = \overline{1, n-1}$ ) зависят от элементов первой строки матрицы  $H_{n-k}$ . Первая строка матрицы  $L_n$  совпадает с первой строкой матрицы  $H_n$ . Следовательно, нужно только доказать независимость элементов первой строки матриц  $H_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) и элементов первого столбца матриц  $H_k^{-1}$  от выбора подсистемы их  $(n-1)$ , голоморфных в  $\xi = \lambda_k$  векторов-столбцов ф. м.  $X_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ). Введем ф. м.  $X'_j = X_j P$ , где  $P$  — постоянная квазидиагональная неособая матрица, состоящая из двух блоков соответственно первого и  $(n-1)$  порядков, причем блок первого порядка расположен на пересечении первого столбца и первой строки и  $[P]_{11} = 1$ . Тогда  $X_\infty = X_j H_j = X_j P P^{-1} H_j$ . Следовательно,  $X_\infty = X'_j H'_j$ , где  $H'_j = P^{-1} H_j$ . Так как матрица  $P^{-1}$  также квазидиагональна с двумя блоками соответственно первого и  $(n-1)$  порядков и  $[P^{-1}]_{11} = 1$ , то из выражения  $H'_j = P^{-1} H_j$  непосредственно видно, что элементы первых строк матриц  $H_j$  и  $H'_j$  совпадают. Из выражения  $[H'_j]^{-1} = H_j^{-1} P$  также непосредственно видно, что элементы первых столбцов матриц  $[H_j]^{-1}$  и  $H_j^{-1}$  совпадают.

Докажем, что  $X_n \rightarrow X_n M$  при аналитическом продолжении ф. м.

$X_n$  по петле (см. рис. 2). Участок этой петли  $\widehat{a_n a_{n-1}}$  может быть деформирован, как показано на рис. 3, пунктирной линией. Пунктирная линия состоит из 1) петли, выходящей из точки  $a_n$  и обхо-

дящей точку  $\lambda_n$  по часовой стрелке; 2) линии  $a_n a'_{n-1}$ . Результат аналитического продолжения ф. м.  $X_n$  по петле есть  $X_n \rightarrow X_n C_n^{-1}$ .

Далее продолжение (по пунктирной линии)  $\widehat{a_n a'_{n-1}}$  дает  $X_n \rightarrow \rightarrow X_{n-1} \prod_{n-1, n} C_n^{-1}$ . Таким образом, результат аналитического про-

должения  $X_n$  (по непунктирной линии)  $\widehat{a_n a'_n}$  есть  $X_n \rightarrow X_{n-1} \times \times \prod_{n-1, n} C_n^{-1}$ . Последовательно повторяя этот прием у точек  $\lambda_{n-1}$ ,  $\lambda_{n-2}$ , ...,  $\lambda_2$  и затем обходя по часовой стрелке точку  $\lambda_1$ , полу-  
 $\dots \rightarrow X_1 [\prod_{12} C_2^{-1} \prod_{23} C_3^{-1} \dots \prod_{n-1, n} C_n^{-1}] \rightarrow X_1 C_1^{-1} [\prod_{12} C_2^{-1} \prod_{23} \times$

Оставшуюся часть пути аналитического продолжения можно представить как совокупность последовательно проходимых в обратном направлении

линий  $\widehat{a_2 a_1}$ ,  $\widehat{a_3 a_2}$ , ...,  $\widehat{a_n a_{n-1}}$  (см. рис. 1), т. е. проходимых в прямом направлении ли-

ний  $\widehat{a_1 a_2}$ ,  $\widehat{a_2 a_3}$ , ...,  $\widehat{a_{n-1} a_n}$ . Так как результат аналитического продолжения  $X_{j+1}$  по  $a_{j+1} a_j$  есть  $X_{j+1} \rightarrow X_j \prod_{j, j+1}$ , то последова-

тельное продолжение по линиям  $\widehat{a_1 a_2}$ ,  $\widehat{a_2 a_3}$ ,  
 ...,  $\widehat{a_{n-1} a_n}$  суммарно дает  $X_n \rightarrow X_n [\prod_{n-1, n}^{-1} \times$

$\times \prod_{n-2, n-1}^{-1} \dots \prod_{12}^{-1}] C_1^{-1} [\prod_{12} C_2^{-1} \prod_{23} C_3^{-1} \dots \prod_{n-1, n} C_n^{-1}] \equiv X_n M$ . Это завершает доказательство.

**Предложение 2.** Если в последних столбцов ф. м.  $X_\infty$  голоморфны в точке  $\xi = \infty$ , то

$$\begin{aligned} [H_k]_{ij} &= 0 \quad (j = n - \nu + 1, n - \nu + 2, \dots, n; \\ &\nu = \overline{1, n-1}; k = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (29)$$

**Доказательство.** Обозначим такой столбец через  $\bar{x}_{\infty j}$ . Так как

$$\int_{\Sigma_n} e^{z\xi} \bar{x}_{\infty j} d\xi = 0, \quad (30)$$

то (см. доказательство теоремы 1, выражения (23)) должно выполняться

$$\sum_{k=1}^n \bar{y}_k [L_k]_{ij} = 0 \quad j = n - \nu + 1, n - \nu + 2, \dots, n. \quad (31)$$

Но и в рассматриваемом случае  $\bar{y}_k$  линейно независимы (это видно хотя бы из того, что линейно независимы их асимптотические

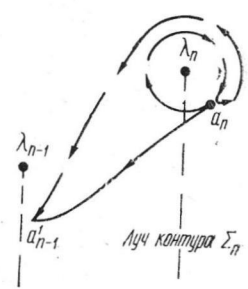


Рис. 3

представления на бесконечности). Тогда должно выполняться

$$[L_k]_{ij} = 0, \quad j = n - v + 1, n - v + 2, \dots, n; \quad k = \overline{1, n}. \quad (32)$$

Поскольку  $L_n = H_n$ , то

$$[H_n]_{ij} = 0 \quad j = n - v + 1, n - v + 2, \dots, n. \quad (33)$$

Следовательно (см. (28)), каждый из  $v$  последних столбцов матрицы  $M_n$  имеет только один ненулевой элемент. Этот элемент расположен на главной диагонали и равен единице. Поэтому  $v$  последних столбцов матрицы  $L_{n-1} = H_{n-1}M_n$  совпадают с  $v$  последними столбцами  $H_{n-1}$  и, значит, в силу (32)

$$[H_{n-1}]_{ij} = 0, \quad j = n - v + 1, n - v + 2, \dots, n. \quad (34)$$

Следовательно (см. (28)), и каждый из  $v$  последних столбцов матрицы  $M_{n-1}$  имеет только один ненулевой элемент, который расположен на главной диагонали и равен единице. Но тогда и матрица  $M_{n-1}M_n$  имеет такую же структуру, т. е. каждый из  $v$  последних столбцов матрицы  $M_{n-1}M_n$  имеет только один ненулевой элемент, расположенный на главной диагонали и равный единице. Следовательно, (29) справедливо для  $k = n - 2$ , так как (см. (18))  $L_{n-2} = H_{n-2}M_{n-1}M_n$ . Общий случай доказывается простой индукцией (с использованием (18)).

*Замечание 4.* Подчеркнем, что (32) не означает, что  $v$  последних столбцов матрицы  $T_1$  равны нулю, так как в рассмотренном случае теорема 1 неприменима (их нельзя определить указанным в доказательстве теоремы 1 способом). В рассмотренном случае для нахождения  $T_1$  и  $Y$  нужно преобразовать систему (1) так, как указано в замечании 1.

**Список литературы:** 1. *Смилянский В. Р.* Некоторые свойства множителей Стокса. I//Исследования по теории операторов и их приложениям. К., 1979, с. 97—107. 2. *Смилянский В. Р.* Некоторые свойства множителей Стокса. II//Теория операторов в функциональных пространствах и ее приложения. К., 1981, с. 107—117. 3. *Смилянский В. Р.* Некоторые свойства множителей Стокса. I. II. Исправление текста//Операторы в функциональных пространствах и вопросы теории функций. К., 1987, с. 27—28. 4. *Смилянский В. Р.* Множители Стокса и коэффициенты связи для некоторых уравнений//Функц. анализ и прикл. мат.— К., 1982,— С. 157—173. 5. *Balser W. et al.* On the reduction of connection problems for differential equations with an irregular singular point to ones with only regular singularities. I/W. Balser, W. B. Jurkat, D. A. Lutz//Siam J. Math. Anal.— 1981.— 12, N 5.— P. 691—721. 6. *Айнс Э. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— X.: ОНТИ, 1939.— 647 с.

Поступила в редколлегию 15.10.85