УДК 517.9 + 513.8

Ф. С. РОФЕ-БЕКТОВ, А. М. ХОЛЬКИН

СВЯЗЬ СПЕКТРАЛЬНЫХ И ОСЦИЛЛЯЦИОННЫХ СВОЙСТВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА. I. ТЕОРЕМЫ ТИПА ШТУРМА

Для дифференциальных уравнений произвольного четного порядка с операторнозначными коэффициентами на конечном и бесконечном интервалах в работе установлены теоремы типа Штурма: осцилляционные, сравнения и перемежаемости, а также факторизационные теоремы, обобщающие на рассматриваемый случай теорему Фробениуса и теорему М. Г. Крейна-Хайнца-Реллиха. В качестве приложения этих теорем получено обобщение критерия осцилляторности Этджена — Павловски (2-й порядок) на уравнения любого четного порядка с операторнозначными коэффициентами. Установлен аналог осцилляционной теоремы для дискретных уровней в лакуне непрерывного спектра уравнений любого четного или нечетного порядка.

Для обыкновенных дифференциальных уравнений и их конечных систем теоремы типа Штурма и различные их обобщения, связанные со спектральной теорией и теорией расширений, рассмотрены в ряде известных монографий по спектральной теории дифференциальных операторов. Там же приведена общирная библиография. Отметим, что обобщения на конечномерные системы теорем о перемежаемости и теорем сравнения Штурма принадлежат М. Морсу, Г. Биркгофу, В. Рейду. Вопросы осцилляторности для линейных канонических систем исследованы в работах В. Б. Лидского (1955), В. А. Якубовича (1962).

Осцилляционные вопросы для бесконечных систем второго порядка, иначе для уравнений Штурма — Лиувилля с операторнозначными коэффициентами, рассмотрены в [1].

Основные результаты данной работы анонсированы в [2]. В [1] и [2] содержатся дополнительные литературные указания*.

§ 1. Самосопряженные краевые условия типа Штурма (распадающиеся условия), фундаментальное решение. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(.\,,.)$ и нормой $|\,.\,|$. Обозначим $H(a, b) = L_2\{H;\ (a, b);\ W(x)\,dx\}$ гильбертово пространство вектор-функций $y(x)$ со значениями в H скалярным произведением:

$$\langle y, z\rangle = \int_a^b (W(x)\,y(x),\ z(x))\,dx,\ -\infty \leqslant a < b \leqslant \infty,$$

* Отметим, что полученные нами для бесконечных систем результаты, будучи примененными к конечным системам или к скалярным задачам, оказываются не менее, а иногда и более точными, чем известные для этих случаев.

и соответствующей нормой $\|\cdot\|$, где $W(x)=W^*(x)\geqslant 0$, $W(x)\in$ $\in C(B(H);\ \overline{(a,\ b)})$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение порядка $r\geqslant 1$ с операторными коэффициентами из $B(H)$:

$$l[y]\equiv\sum_{k=0}^{r} i^k l_k[y]=\lambda W(x)\,y,\ x\in(a,\ b), \tag{1}$$

где

$$l_{2j}=D^j p_j(x)\,D^j;\ p_j^*(x)=p_j(x);$$
$$l_{2j+1}=\frac{1}{2}D^j\{Dq_j(x)+q_j^*(x)\,D\}\,D^j;\ D=\frac{d}{dx};$$

коэффициент при старшей производной, $p_n(x)$ при $r=2n$ или $\operatorname{Re}q_n(x)=\frac{1}{2}(q_n+q_n^*)$ при $r=2n+1$, имеет ограниченный обратный во всем H при $x\in\overline{(a,\ b)}$; $p_j(x)$, $q_{j-1}(x)\in C^j(B(H);\ (a,\ b))$, включая a и b, если они конечны.

Всюду в работе предполается, что для минимального оператора L, порожденного дифференциальным выражением $l_W[y]=$ $=W^{-1}(x)\,l[y]$ в гильбертовом пространстве $H(\alpha,\ \beta)$, существуют самосопряженные распадающиеся граничные условия на любом интервале $(\alpha,\ \beta)\subseteq(a,\ b)$.

Для полуограниченного дифференциального оператора в $H(a,b)$ всегда существуют самосопряженные расширения с распадающимися граничными условиями, например расширение по Фридрихсу L^F.

На конечном интервале операторы четного порядка всегда имеют распадающиеся граничные условия без предположения полуограниченности [3]. Однако на полуоси это не так, ибо уже эрмитово симметричная система двух уравнений второго порядка может иметь там разные дефектные числа (3, 2) (известен пример Г. А. Калябина) и поэтому совсем не иметь самосопряженных расширений. Дополняя такую систему до бесконечной с помощью диагональной системы вида $-y_k''=\lambda y_k$, $k=3,\,4,\,\ldots$, получим пример уравнения второго порядка с операторнозначным потенциалом и с равными дефектными числами $(\infty,\ \infty)$ на полуоси, которое, однако, не имеет распадающихся краевых условий, ибо постановка самосопряженного краевого условия при $x=0$ приводит эту систему к минимальному относительно $x=\infty$ оператору с индексом дефекта (1, 0).

Для операции нечетного порядка $r=2n+1$ на конечном интервале для существования распадающихся граничных условий, когда $\dim H<\infty$ или $\dim H=\infty$, но $r=1$, необходимо и достаточно [3], чтобы

$$\dim H_x^+=\dim H_x^-, \tag{2}$$

где H_x^+, H_x^- — приводящие подпространства оператора $\operatorname{Re}q_n(x)$, на первом из которых $\operatorname{Re} q_n(x)$, а на втором — $\operatorname{Re} q_n(x)$ являются положительно определенными. Если $\dim H = \infty$ и $r \geqslant 3$, то самосопряженные распадающиеся граничные условия на конечном интервале существуют всегда.

Таким образом, при наших предположениях $r \cdot \dim H = \infty$ или четно.

Пусть в точке $a \geqslant -\infty$ задано самосопряженное краевое условие:

$$U_a[y] = 0. \tag{3}$$

Самосопряженность условия (3) означает, что минимальный относительно ξ оператор L_ξ, порожденный в $H(a, \xi)$, $a < \xi \leqslant b$, выражением $l_W[y]$ и условием (3), является симметрическим и функции $y \in D(L_\xi^*)$ также удовлетворяют этому условию. Аналогично определяется самосопряженное условие $U_b[y] = 0$ в точке b. (Описание расширений симметричных операторов в терминах абстрактных граничных условий и литературные указания содержатся в [4]).

Если $a > -\infty$, то самосопряженное краевое условие имеет вид [3] (см. также [4]):

$$U_a[y] := \cos A \cdot y^{\vee}(a) - \sin A \cdot y^{\wedge}(a) = 0, \tag{4}$$

$-\frac{\pi}{2} I < A \leqslant \frac{\pi}{2} I$, A — самосопряженный оператор в $H^{\sim}$, где при $r = 2n$ положено $H^{\sim} = H^n = \underbrace{H \oplus H \oplus \cdots \oplus H}_{n}$,

$$\begin{gathered} y^{\wedge}(x) = \operatorname{col}\{y^{(k)}(x)\}_{k=0}^{n-1} \in H^n, \\ y^{\vee}(x) = \operatorname{col}\{y^{[2n-j]}(x)\}_{j=1}^{n} \in H^n, \end{gathered} \tag{5}$$

а при $r = 2n+1$ и условии (2) — $\mathbf{H}^{\sim} = H' \oplus H^n$,

$$\begin{gathered} y^{\vee}(x) = \operatorname{col}\{(V^+(x)\, q_+^{1/2}(x) + V^-(x)\, q_-^{1/2}(x))\, y^{(n)}(x), \\ y(x),\ y'(x),\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x)\} \in H^{\sim},\ y^{\vee}(x) = \operatorname{col}\{i\,(V^-(x)\, q_-^{1/2}(x) - \\ - V^+(x)\, q_+^{1/2}(x))\, y^{(n)}(x),\ y^{[2n]}(x), \\ y^{[2n-1]}(x),\ \ldots,\ y^{[n+1]}(x)\} \in H^{\sim}, \end{gathered} \tag{6}$$

$q_{\pm}(x) = \pm \frac{1}{2} \operatorname{Re} q_n(x) P_x^{\pm}$, $P_x^{\pm}$ — ортопроекторы на $H_x^{\pm}$, H' — произвольное гильбертово пространство такое, что $\dim H' = \dim H_x^{+}$, $\forall x \in (a, b)$, операторы $V^{\pm}(x)$ изометрически отображают $H_x^{\pm}$ на H' и равны нулю на $H_x^{\mp}$, $y^{[k]}$ — квазипроизводные, отвечающие операции $l[y]$, определенные в соответствии с [3], а именно:

$$y^{[k]} = y^{(k)},\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1;\ \left(n = \left[\frac{r}{2}\right]\right),$$

$$y^{[n]} = p_{r-n} y^{(r-n)} - \frac{i}{2} q_{r-n-1} y^{(r-n-1)};\ y^{[r-j]} = -D y^{[r-j-1]} +$$
$$+ p_j y^{(j)} + \frac{i}{2} [q_j^* y^{(j+1)} - q_{j-1} y^{(j-1)}], \tag{7}$$
$$j = 0,\ 1,\ \ldots,\ r-n-1;\ q_{-1} \equiv 0 \equiv p_{n+1};\ l[y] = y^{[r]}.$$

Если не выполнено условие (2), но $\dim H = \infty$ и $r = 2n + 1 \geqslant 3$, то $y^{\wedge}(x)$, $y^{\vee}(x)$ записываются, подобно (6), используя возможность изометрического отображения $H_x^- \oplus H$ на $H_x^+ \oplus H$ (см. [3]).

При $b < \infty$ самосопряженное граничное условие на правом конце интервала имеет аналогичный (4) вид:

$$U_b[y] := \cos B \cdot y^{\vee}(b) + \sin B \cdot y^{\wedge}(b) = 0. \tag{8}$$

Для задачи на бесконечном интервале (a, ∞), $a \geqslant -\infty$, в абсолютно неопределенном (иначе — квазирегулярном) случае распадающиеся самосопряженные граничные условия при названных выше условиях имеют вид [5]:

$$\cos A \cdot P_1 \cdot (Sy)(a) - \sin A \cdot P_2 \cdot (Sy)(a) = 0,$$
$$\cos B \cdot P_1 \cdot (Sy)(b) + \sin B \cdot P_2 \cdot (Sy)(b) = 0, \tag{9}$$

где A, B — самосопряженные операторы в $H^{\sim}$ (5), (6), $P_1 = (I_n;\ 0_n)$, $P_2 = (0_n;\ I_n)$ при $r = 2n$ (0_n, I_n — нулевой и единичный операторы в H^n), а при $r = 2n + 1$ и условии (2)

$$P_1 = \left(\begin{array}{c|c} & \frac{i}{\sqrt{2}} [V^+(0) + V^-(0)] \\ \hline I_n;\ 0_n & \end{array} \right),$$

$$P_2 = \left(\begin{array}{c|c} & \frac{1}{\sqrt{2}} [V^+(0) - V^-(0)] \\ \hline 0_n;\ I_n & \end{array} \right).$$

(Здесь P_1, P_2 приведены в эквивалентном [5], но несколько упрощенном виде. Все невыписанные операторы равны 0), $(Sy)(x) = (Y_0^{\sim}(x))^{-1} y^{\sim}(x)$, где

$$y^{\sim}(x) = \begin{cases} \operatorname{col}\{y,\ y',\ \ldots y^{(n-1)};\ y^{[2n-1]},\ \ldots y^{[n]}\},\ r = 2n, \\ \operatorname{col}\{y,\ y',\ \ldots y^{(n-1)};\ y^{[2n]},\ \ldots y^{[n+1]};\ -iy^{(n)}\},\ \ r = 2n+1, \end{cases}$$

$Y_0(x) : H^r \to H$ — решение уравнения (1) при $\lambda = 0$, удовлетворяющее начальному условию:

$$Y_0^{\sim}(0) = \begin{cases} I_{2n} &,\ r = 2n, \\ I_{2n} \oplus \frac{1}{\sqrt{2}} [q_+(0) + q_-(0)]^{-\frac{1}{2}},\ r = 2n+1. \end{cases}$$

Заметим, что

$$P_1 \cdot (Sy)(0) = y^{\wedge}(0),\ P_2 \cdot (Sy)(0) = y^{\vee}(0). \tag{10}$$

Для вещественного скалярного уравнения четного порядка описание краевых задач на полуоси в явном виде для общего случая индексов дефекта дано Р. Т. Гусейновым и И. М. Пашаевым (1983).

Определение 1. [2], [6]. *Фундаментальным решением (ф. р.) задачи (1), (3) называем решение уравнения (1) $Y(x, \lambda) \in B(\mathbf{H}, H)$, где $\mathbf{H}$ — какое-либо гильбертово пространство, если 1) $y = Y(x, \lambda) h \in H(a, \xi)$, $\forall h \in \mathbf{H}$, $\xi \in (a, b)$ и удовлетворяет краевому условию (3); 2) любое решение $y \in H(a, \xi)$ задачи (1), (3) представимо в виде $y(x, \lambda) = Y(x, \lambda) h$; 3) при некотором, а потому и при любом x, самосопряженный оператор*

$$M_Y(x, \lambda) := \sum_{k=0}^{r-1} Y^{(k)*}(x, \lambda) Y^{(k)}(x, \lambda) \gg 0. \tag{11}$$

Условия 2), 3) определения 1 означают полноту и линейную независимость определяемой по ф. р. $Y(x, \lambda)$ системы решений задачи (1), (3).

Для задачи (1), (4) с краевым условием в регулярной точке a ф. р. $Y(x, \lambda)$, аналитическое по λ, можно построить как решение уравнения (1) с операторными данными Коши: $Y^{\wedge}(a, \lambda) = \cos A \cdot K$, $Y^{\vee}(a, \lambda) = \sin A \cdot K$, операторы $Y^{\wedge}(x, \lambda)$, $Y^{\vee}(x, \lambda)$ определяются формулами $Y^{\wedge}(x, \lambda) h = (Yh)^{\wedge}(x, \lambda)$, $Y^{\vee} h = (Yh)^{\vee}$, $h \in \mathbf{H}$. При $\mathbf{H} = \mathbf{H}^{\sim}$ можно взять $K = I_{\mathbf{H}}$ — единичный оператор в $\mathbf{H}$; вообще же $K \in B(\mathbf{H}, \mathbf{H}^{\sim})$, $K^{-1} \in B(\mathbf{H}^{\sim}, \mathbf{H})$ — любые.

Если $a = -\infty$ или является конечной сингулярной точкой, то построение ф. р. задачи (1), (3) не сводится к задаче Коши. Однако в ряде случаев ф. р. можно построить явно. Например, для скалярного уравнения Шредингера с высокосингулярным при $x = 0$ потенциалом — Ф. С. Рофе-Бекетов и Е. Х. Христов (1966, 1971), в абсолютно неопределенном случае для уравнения с коэффициентами из $B(H)$ на оси — А. М. Холькин (1981) и [5].

Всюду ниже конечные точки $x \in \mathbf{R}$ считаем регулярными.

Определение 2. [2], [6]. *Решение $Y(x, \lambda) \in B(\mathbf{H}, H)$ уравнения* (1) *при $\lambda \in \mathbf{R}$ называем самосогласованным, если при $\xi \in (a, b)$ существует самосопряженное краевое условие:*

$$U_{\xi, \lambda}[y] := \cos A_{\xi, \lambda} \cdot y^{\vee}(\xi) - \sin A_{\xi, \lambda} y^{\wedge}(\xi) = 0, \tag{12}$$

которому при $x = \xi$ удовлетворяют все функции вида $y(x, \lambda) = Y(x, \lambda) h$.

Если (12) выполняется при некотором ξ, то оно справедливо и при любом $\xi \in (a, b)$, так как (12) эквивалентно эрмитову отношению [3], [4] и так как для решений (1) при $\lambda \in \mathbf{R}$ в силу тождества Лагранжа

$$\frac{d}{dx} [(y^{\vee}, z^{\wedge}) - (y^{\wedge}, z^{\vee})] = 0.$$

Если $Y(x, \lambda)$ есть ф. р. задачи (1), (3), то (12) эквивалентно следующему краевому условию для вектор-функций:

$$Y^{\wedge *}(\xi, \lambda)\, y^{\vee}(\xi) - Y^{\vee *}(\xi, \lambda)\, y^{\wedge}(\xi) = 0. \tag{13}$$

В определении 2 содержатся известные определения попарной сопряженности решений скалярного уравнения и канонической системы при $\dim H = 2k < \infty$.

Обозначим $\sigma(T)$, $\sigma_e(T)$ соответственно спектр и предельный спектр оператора T, $\operatorname{Def} T$ — дефектное число оператора T, $\operatorname{nul} T = \dim \operatorname{Ker} T$.

Существование ф. р. $Y(x, \lambda) \in B(\mathbf{H}, H)$ для задачи (1) (3) при $\dim \mathbf{H} = \frac{r}{2} \dim H \leqslant \infty$ и $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \sigma_e(L_\xi)$ установлено в [6]. Там же показаны при $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \sigma_e(L_\xi)$ самосогласованность ф. р. $Y(x, \lambda)$, равенство $\operatorname{nul} Y^{\wedge}(x, \lambda) = \operatorname{nul} Y^{\wedge *}(x, \lambda)$, а при $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \sigma_e(L_x^0)$ фредгольмовость $Y^{\wedge}(x, \lambda)$, (L_x^0 — расширение оператора L_x в $H(a, x)$ условием $y^{\wedge}(x) = 0$, совпадающее с фридрихсовым для полуограниченных L_x. $\sigma_e(L_\xi)$ не зависит от ξ, а при регулярном конце $a > -\infty$ — пусто).

Лемма 1. *Пусть $Y(x, \lambda)$ — ф. р. задачи (1), (3). Тогда если $0 \in \sigma(Y^{\wedge}(\xi, \lambda'))$ при некоторых $\xi \in (a, b)$, $\lambda' \in \mathbf{R}$, то $\lambda' \in \sigma(L_\xi^0)$. Обратно, если $\lambda' \in \sigma(L_\xi^0) \setminus \sigma_e(L_\xi)$, то $0 \in \sigma(Y^{\wedge}(\xi, \lambda'))$.*

Эта лемма является частным случаем леммы 3 из [6].

§ 2. Осцилляционная теорема для дифференциально-операторных уравнений четного порядка. Предположим, что минимальный относительно конца $b \leqslant \infty$ оператор L_b (1), (3) является полуограниченным снизу. Обозначим $L^{\sim}$ — самосопряженное расширение оператора L_b, при $b < \infty$ оно порождается условием (8), а при $b = \infty$ в квазирегулярном случае — условием (9), $N(\lambda)$ — количество собственных значений $\lambda_k(L^{\sim}) < \lambda$ с учетом их кратностей $\varkappa(\lambda_k)$, $N^F(\lambda)$, $\varkappa^F(\lambda)$ — то же для $\lambda_k(L_b^F)$.

Теорема 1. *При $\lambda < \lambda_e(L^{\sim}) := \inf \sigma_e(L^{\sim})$*

$$N(\lambda) - p \leqslant \sum_{x \in (a, b)} \operatorname{nul} Y^{\wedge}(x, \lambda) = N^F(\lambda) \leqslant N(\lambda), \tag{14}$$

где $p = \operatorname{Def} \{L^{\sim} \mid D(L_b^F) \cap D(L^{\sim})\}$. *Если λ не является собственным значением L_b, то вместо p в (14) можно взять $\min\{p, \operatorname{Def} L_b - \varkappa(\lambda)\}$ (при $b < \infty$ имеем $p = \operatorname{rnk} \cos B$, $\operatorname{Def} L_b = n \times \dim H \leqslant \infty$).*

Если $\lambda_e(L_\xi^F) > \lambda_e(L_b^F)$ при $\xi \in (a, b)$, в частности, если конец $a > -\infty$ регулярен, то (14) верно и при $\lambda = \lambda_e(L^{\sim})$, $p < \infty$.

Заметим, что в случае двух сингулярных концов последнее утверждение ново и для скалярного уравнения Штурма-Лиувилля.

(При $r = 2$, $a > -\infty$ эта теорема доказана в [1], при $r = 4$, $\dim H < \infty$, $-\infty < a < b < \infty$ она содержится в [7]).

Замечание 1. Если $a > -\infty$ и при некотором $\lambda \in \mathbf{R}$ существует ф. р. $Y(x, \lambda)$ задачи (1), (4) такое, что оператор $Y^{\wedge}(x, \lambda)$ фредгольмов при всех $x \in (a, b)$, то $\lambda \leqslant \lambda_e(L_b^F)$.

Доказательство теоремы 1 при $b < \infty$ с учетом монотонной и непрерывной зависимости спектра от интервала ([8] или [2, лемма 2]) и с использованием стандартных для этого круга вопросов рассуждений о движении собственных значений $\lambda_j(\xi) < \lambda_e$ оператора L_ξ^0 при $\xi \searrow a$, начиная с $\xi = b$, проводится аналогично доказательству теорем 1 и 2 из [1], включая использование леммы 5 из [1]*, и затем с помощью предельного перехода от конечных значений b теорема распространяется на случай $b = \infty$, учитывая сходимость спектров последовательности фридрихсовых расширений регулярных задач к спектру фридрихсова расширения предельной задачи (ср. с [1]).

Справедливость замечания 1 вытекает из того, что если $\lambda > \lambda_e(L_b^F)$, то при $a > -\infty$ в силу [8] или [2, лемма 2]**, найдется такое $\xi \in (a, b)$, что $\lambda = \inf \sigma_e(L_\xi^0)$. В этом случае по лемме 1 получим, что $0 \in \sigma_e(Y^{\wedge}(\xi, \lambda))$ и, следовательно, оператор $Y^{\wedge}(\xi, \lambda)$ не является фредгольмовым.

Следствие 1. Если $\lambda_k > \lambda_{k-1}$ для L_b^F, то при этом k

$$\sum_{x \in (a, b)} \operatorname{nul} Y^{\wedge}(x, \lambda_k) = k - 1, \tag{15}$$

а при $\varkappa(\lambda_k) = n \cdot \dim H < \infty$ и $\lambda_k(L^{\sim}) > \lambda_{k-1}(L^{\sim})$, $b < \infty$, (15) верно и для $L^{\sim}$.

В частности, для скалярного уравнения второго порядка $Y^{\vee}(x, \lambda) = Y(x, \lambda)$ и (15) содержит в себе классическую осцилляционную теорему Штурма и ее обобщения на случай невещественных коэффициентов, которые допускаются при первой производной (и поэтому невещественного решения $Y(x, \lambda)$) а также на случай бесконечного интервала, так как при $r = 2$ (15) верно при $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$ и для $L^{\sim}$.

При $b < \infty$ следствие очевидно, а при $b = \infty$, $r = 2$ доказано в [1].

Равенство (15) означает, что для собственного значения λ_k задачи (1), $y^{\wedge}(a) = 0$, $y^{\wedge}(b) = 0$, $(a > -\infty)$, b является k-й присоединенной к a точкой, если при $x \in (a, b)$ $\operatorname{nul} Y^{\wedge}(x, \lambda_k) \leqslant 1$. (Ср. с теоремой А. Халаная и Ш. Шандора (1957), относящейся к случаю $\dim H < \infty$ на конечном интервале).

Отметим, что при $n \cdot \dim H > 1$ и общем краевом условии (8) равенство в (15) без дополнительных предположений может не выполняться (см. пример в [1, с. 413]).

---

* О связи спектров конечномерных расширений.

** О непрерывном стремлении $\inf \sigma_e(L_\xi^0) \nearrow +\infty$ при $\xi \searrow a > -\infty$.

Замечание 2. Теорема 1 содержит в себе при $r=2$, $\dim H < \infty$, $-\infty < a < b < \infty$, $\cos A = \cos B = 0$, теорему Морса об индексе (см. [1]), возможность обобщения которой на общий случай конечных систем Штурма — Лиувилля отметил М. М. Постников (1965).

§ 3. Теоремы сравнения и перемежаемости. Пусть $r=2n$. Операции $l[y]$ (1) сопоставим форму $l_\Delta[y, y]$ — интеграл Дирихле по интервалу Δ:

$$l_\Delta[y, y] = \int_\Delta \Big\{ \sum_{j=0}^{n} (p_j(x) y^{(j)}, y^{(j)}) +$$

$$+ \frac{i}{2} \sum_{j=0}^{n-1} [(q_j^*(x) y^{(j+1)}, y^{(j)}) - (q_j(x) y^{(j)}, y^{(j+1)})] \Big\} dx.$$

Теорема 2. *Пусть* $-\infty < a < b < \infty$, $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ *ф. р. задач вида (1), (4):* $l^{(k)}[Y_k] = 0$, $k = 1, 2$, *с* $A = A_k$ *в (4) соответственно,*

$$\inf \sigma_e(L_b^{(2)0}) > 0, \ W_k(x) \equiv I, \ r = 2n,$$

$$l^{(1)}_{(a,b)}[y, y] \leqslant l^{(2)}_{(a,b)}[y, y] \tag{16}$$

для равных нулю в окрестности точки b *вектор-функций. Тогда, если*

$$\operatorname{rnk}\{Y_2^{\vee *} Y_1^{\wedge} - Y_2^{\wedge *} Y_1^{\wedge}\}_{x=a} = m < \infty$$

или, что эквивалентно

$$\operatorname{rnk}\{\sin A_2 \cdot \cos A_1 - \cos A_2 \cdot \sin A_1\} = m < \infty,$$

то при любом $\beta \in (a, b]$

$$\sum_{x \in (a, \beta]} \operatorname{nul} Y_1^{\wedge}(x) \geqslant \sum_{x \in (a, \beta]} \operatorname{nul} Y_2^{\wedge}(x) - m. \tag{17}$$

Условие (16) *обеспечено, в частности, если при* $j = 0, 1, \ldots n$

$$p_j^{(1)}(x) \leqslant p_j^{(2)}(x), \ q_j^{(1)}(x) = q_j^{(2)}(x), \ x \in (a, b). \tag{16_1}$$

Если $l^{(1)} = l^{(2)}$, *то суммировать в (17) можно по* $x \in [\alpha, \beta] \subset (a, b]$. *Если* $\dim H < \infty$, *то суммировать в (17) можно по* $x \in [\alpha, \beta]$ *и при условии* (16_1), *если заменить* m *на* $n \cdot \dim H$:

$$\sum_{x \in [\alpha, \beta]} \operatorname{nul} Y_1^{\wedge}(x) \geqslant \sum_{x \in [\alpha, \beta]} \operatorname{nul} Y_2^{\wedge}(x) - n \cdot \dim H. \tag{17_1}$$

Следствие 2. *Если* $l^{(1)} = l^{(2)}$, *то при любом* $[\alpha, \beta] \subset (a, b]$

$$\Big| \sum_{x \in [\alpha, \beta]} \operatorname{nul} Y_1^{\wedge}(x) - \sum_{x \in [\alpha, \beta]} \operatorname{nul} Y_2^{\wedge}(x) \Big| \leqslant m, \tag{17_2}$$

и если $\sum_{x \in [\alpha, \beta]} \operatorname{nul} Y_1^{\wedge}(x) \geqslant m + 1$, *то отрезок* $[\alpha, \beta]$ *содержит, по* *крайней мере, одну точку, где* $\mathrm{nul}\, Y_2^{\wedge}(x) \geqslant 1$. В частности, при $\dim H < \infty$ имеем $m \leqslant n \cdot \dim H$ и поэтому из теоремы 2 вытекают также теоремы сравнения и перемежаемости Хайнца — Геллиха в уточненном виде.

Доказательство. Обозначим $M_\beta^{(2)0}$ самосопряженный оператор, порожденный в $H(a, \beta)$ при некотором $\beta \in (a, b]$ операцией $l^{(2)}[y]$, самосопряженными граничными условиями $y^{\wedge}(\beta) = 0$ и (4) с $A = A_1$ которое в силу (13) эквивалентно условию

$$Y_1^{\wedge *}(a) \cdot y^{\vee}(a) - Y_1^{\vee *}(a)\, y^{\wedge}(a) = 0. \tag{18}$$

Заметим теперь, что при $y^{\wedge}(b) = 0$ $\langle l[y], y\rangle_{(a, b)} = (y^{\vee}, y^{\wedge})|_a + l_{(a, b)}[y, y]$, что величины $y^{\wedge(1)}$ и $y^{\wedge(2)}$, построенные по $l^{(1)}$ и $l^{(2)}$, совпадают, поэтому $(y^{\vee(1)}, y^{\wedge(1)}) = (y^{\vee(2)}, y^{\wedge(2)})$, если обе пары $y^{\vee(1)}$ и $y^{\wedge(1)}$, $y^{\vee(2)}$ и $y^{\wedge(2)}$ подчинены условию (4) с одним и тем же A. Поэтому в силу (16) $L_\beta^{(1)0} \leqslant M_\beta^{(2)0}$ и, следовательно,

$$N_1^F(0) \geqslant N_M^F(0),\; N_1^F(0) + \varkappa_1^F(0) \geqslant N_M^F(0) + \varkappa_M^F(0). \tag{19}$$

(Величины $N^F(\lambda)$, $\varkappa^F(\lambda)$ для операторов $L_\beta^{(1)0}$, $L_\beta^{(2)0}$, $M_\beta^{(2)0}$ снабжаем соответственно индексами 1, 2, M). Операторы $L_\beta^{(2)0}$, $M_\beta^{(2)0}$ являются самосопряженными расширениями их максимальной общей части Λ, определенной на вектор-функциях $y \in D(M_\beta^{(2)0})$, удовлетворяющих, кроме того, условию

$$Y_2^{\wedge *}(a)\, y^{\vee}(a) - Y_2^{\vee *}(a)\, y^{\wedge}(a) = 0. \tag{20}$$

Индексы дефекта оператора Λ есть (m, m), где* $m = \mathrm{rnk}\, W_a\{Y_2, Y_1\}$,

$$W_x\{Y_2, Y_1\} \equiv (Y_2^{\vee *} Y_1^{\wedge} - Y_2^{\wedge *} Y_1^{\vee})(x).$$

Действительно, если $g_1, \ldots g_m$ — базис в области значений оператора W_a, а $h_1, \ldots h_m \in \mathbf{H}$ таковы, что $W_a h_k = g_k$, $k = 1, \ldots m$, то вектор-функции $y_k(x) = \varphi(x) Y_1(x) h_k$, где $0 \leqslant \varphi(x) \in C_0^\infty$ — скалярная функция, равная 1 в окрестности точки a и равная 0 в окрестности β, принадлежат $D(M_\beta^{(2)0})$ и линейно независимы по модулю $D(\Lambda)$, так как, если $\sum_{k=1}^{m} c_k y_k \in D(\Lambda)$, то $0 = \sum_{k=1}^{m} c_k [Y_2^{\wedge *} \times \times (a)\, y_k^{\vee}(a) - Y_2^{\vee *}(a)\, y_k^{\wedge}(a)] = -\sum_{k=1}^{m} c_k W_a h_k = -\sum_{k=1}^{m} c_k g_k$, поэтому $c_k = 0$, $k = 1, \ldots m$, и, следовательно, $\dim D(M_\beta^{(2)0})/D(\Lambda) \geqslant m$.

Пусть $z_1(x), \ldots z_{m+1}(x)$ — произвольные вектор-функции из $D(M_\beta^{(2)0})$. В силу (18) и леммы 2 из [3] о параметрическом пред-

* Поэтому $\mathrm{rnk}\, W_a\{Y_2, Y_1\} = \mathrm{rnk}\, W_a\{Y_1, Y_2\}$.

ставлении эрмитовых бинарных отношений, при некоторых $e_k \in \mathbf{H}$

$$z_k^{\wedge}(a) = Y_1^{\wedge}(a)\, e_k,\ z_k^{\vee}(a) = Y_1^{\vee}(a)\, e_k,\ k = 1, \ldots m+1.$$

Векторы $W_a e_1, \ldots W_a e_{m+1}$ линейно зависимы, поэтому существует нетривиальная комбинация: $\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k W_a e_k = 0$. При этом $\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k z_k(x) \in \in D(\Lambda)$, так как

$$Y_2^{\wedge *} \sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k z_k^{\vee}(a) - Y_2^{\vee *} \sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k z_k^{\wedge}(a) = -\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k W_a e_k = 0.$$

Таким образом, $\dim D(M_\beta^{(2)0})/D(\Lambda) = m$ и, следовательно, $\operatorname{Def}\Lambda = m$. Поскольку $M_\beta^{(2)0}$ и $L_\beta^{(2)0}$ являются конечномерными расширениями оператора Λ, то $\sigma_e(M_\beta^{(2)0}) = \sigma_e(L_\beta^{(2)0})$. По условию теоремы $\inf \sigma_e(L_\beta^{(2)0}) > 0$, поэтому при всех $\beta \in (a, b]$ $\inf \sigma_e(L_\beta^{2(0)}) > 0$ и, используя лемму 5 из [1], имеем $N_M^F(0) + \varkappa_M^F(0) \geqslant N_2^F(0) + \varkappa_2^F(0) - m$. Сравнивая с (19), имеем $N_1^F(0) + \varkappa_1^F(0) \geqslant N_2^F(0) + \varkappa_2^F(0) - m$, откуда, в силу теоремы 1, получаем (17), так как

$$\sum_{x \in (a, \beta)} \operatorname{nul} Y_j^{\wedge}(x) + \varkappa_j^F(0) = \sum_{x \in (a, \beta]} \operatorname{nul} Y_j^{\wedge}(x);\ j = 1,\ 2. \qquad (21)$$

Если $l^{(1)} = l^{(2)}$, то рассмотрим операторы $L_\beta^{(1)0}$, $L_\beta^{(2)0}$, $M_\beta^{(2)0}$ в $H(\alpha - \varepsilon, \beta)$, $\varepsilon > 0$, с самосопряженными граничными условиями вида (18), (20) в точке $\alpha - \varepsilon$, определяемыми теми же ф. р. $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, но не при $x = a$, а при $x = \alpha - \varepsilon \geqslant a$. Учитывая фредгольмовость операторов $Y_1^{\wedge}(x)$, $Y_2^{\wedge}(x)$, вытекающую из положительности $\inf \sigma_e$ дифференциальных операторов на (a, b), видим в силу замечания 1, что для рассматриваемых в $H(\alpha - \varepsilon, \beta)$ дифференциальных операторов $\inf \sigma_e > 0$ тоже. Так как при $l^{(1)} = l^{(2)}$ $W_x\{Y_2, Y_1\}$ не зависит от x, то $\operatorname{rnk} W_{\alpha-\varepsilon} = \operatorname{rnk} W_a = m$.

Поэтому, учитывая (21), получаем (17) с суммированием по $x \in (\alpha - \varepsilon, \beta]$, откуда при $\varepsilon \to 0$ следует

$$\sum_{x \in [\alpha, \beta]} \operatorname{nul} Y_1^{\wedge}(x) \geqslant \sum_{x \in [\alpha, \beta]} \operatorname{nul} Y_2^{\wedge}(x) - m. \qquad (22)$$

Утверждение теоремы, относящееся к случаю $\dim H < \infty$, следует из того, что $m \leqslant n \cdot \dim H$. Теорема доказана.

Следствие 2 вытекает из теоремы 2, так как при $l^{(1)} = l^{(2)}$ в (17) $Y_1^{\wedge}(x)$ и $Y_2^{\wedge}(x)$ можно менять местами.

Список литературы: *1. Рофе-Бекетов Ф. С., Холькин А. М.* О связи между спектральными и осцилляционными свойствами матричной задачи Штурма — Лиувилля // Матем. сб.—1977.— **102,** № 3.— С.410—424. *2. Рофе-Бекетов Ф. С., Холькин А. М.* Связь спектральных и осцилляционных свойств дифференциальных систем произвольного порядка // Докл. АН СССР.—1981.— **261,**

№ 3.— С. 551—555. *3. Рофе-Бекетов Ф. С.* О самосопряженных расширениях дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1969.— Вып. 8. — С. 3—24. *4. Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.— К.: Наук. думка. — 1984. —284 с. *5. Холькин А. М.* Описание самосопряженных расширений дифференциальных операторов произвольного порядка на бесконечном интервале в абсолютно неопределенном случае. // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1985. — Вып. 44. — С. 112—122. *6. Рофе-Бекетов Ф. С., Холкин А. М.* Фундаментальная система решений операторного дифференциального уравнения с краевым условием на бесконечности // Мат. заметки.— 1984.— **35**, № 5. —С. 697—709. 7. *Свободные* колебания тонких упругих оболочек/ А. Л. Гольденвейзер, В. Б. Лидский, П. Е. Товстик.— М.: Наука, —1979. —384 с. *8. Рофе-Бекетов Ф. С., Холькин А. М.* Зависимость спектра операторной краевой задачи от изменения интервала // Теория функций, функцион. анализ и их прил.—1985. — Вып. 43.— С. 107—119.

Поступила в редколлегию 25.12.85