УДК 517.53

Д. Е. ПАПУШ

О РОСТЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ С «ПЛОСКИМИ» НУЛЯМИ

Здесь в основном будет рассматриватся связь роста целой функции $f(z)$, $z \in C^n$, с распределением ее множества нулей $Z_f = \{z : f(z) = 0\}$ в случае, когда Z_f имеет простейшую геометрическую структуру. Именно в дальнейшем всюду предполагается, что $f(z)$ имеет «плоские» нули, т. е. $Z_f = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_k$ (1), где $H_k = \{z : \langle z, e^k\rangle = 1\}$ — гиперплоскость. Здесь $e^k \in C^n$, $\langle z, w\rangle = z_1\bar{w}_1 + \cdots + z_n\bar{w}_n$. Этот класс функций, рассмотренный впервые, по-видимому, Л. Баумгартнером (1914), изучался в работах Л. Грумена [1], Е. Н. Бута (1974), Л. И. Ронкина (1979), А. Б. Секерина (1981). Основное достоинство функций этого класса заключается в том, что их нулевые множества допускают естественную прямую параметризацию посредством последовательностей точек $a^k = e^k|e^k|^{-2}$ (e^k из (1)), являющихся основаниями перпендикуляров, опущенных из начала координат на гиперплоскости H_k. В этом случае в качестве характеристик распределения множества нулей функции $f(z)$ можно рассматривать характеристики распределения указанных точек; при этом выявляется достаточно полная аналогия с одномерным случаем, когда считающая функция корней также есть характеристика дискретного множества точек.

Приводимые в этой заметке факты о связи роста функции $f(z)$ с распределением точек a_k большей частью вполне элементарны и могут быть получены из общих теорем путем соответствующих характеристик. Однако и эти факты, приводимые почти без доказательства, необходимы для последующего изучения функций с «плоскими» нулями. В конце заметки рассматривается вопрос об эквивалентности двух определений полной регулярности роста. Этот вопрос отличен по своему характеру от упомянутых выше. Полученное утверждение доказывается хотя и коротко, но с привлечением весьма тонких теорем Грумена, Азарина и Фаворова.

1°. Обозначим число точек a^k в шаре радиуса t через $n(t)$. Пусть далее $M_f(r) = \max_{|z|=r}|f(z)|$; $\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}$ — порядок роста функции $f(z)$, $\rho_1 = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln n(r)}{\ln r}$ — порядок считающей функции. Считая, что $\rho_1 < \infty$, обозначим $\pi(z) = \prod_{k=1}^{\infty} G(\langle z, a^k|a^k|^{-2}\rangle, p)$ (2), где $G(u, p) = (1-u)\exp(u + u^2|2 + \cdots + u^p/p)$ — первичный множитель Вейерштрасса, $p \in N$ определено условиями:

$$\sum^{\infty} |a^k|^{-p} = \infty, \ \sum^{\infty} |a^k|^{-p-1} < \infty. \tag{2'}$$

Следующие утверждения почти дословно переносятся на наш случай из одномерной ситуации (см. [2, гл. 1]).

Предложение 1. $\rho_1 = \inf\{\lambda \in R^+ : \sum^{\infty} |a^k|^{-\lambda} < \infty\} = \inf\{\lambda \in R^+ : \int^{\infty} \frac{n(t)\,dt}{t^{1+\lambda}} < \infty\}$.

Предложение 2. *Имеет место оценка:*

$$\ln|\pi(z)| \leqslant c_p r^{p+1} \int_0^\infty \left\{\frac{p}{(t+r)\,t^{p+1}} + \frac{1}{(t+r)^2\,t^p}\right\} n(t)\,dt. \qquad (3)$$

Предложение 3. *Для канонического произведения вида (2)* $\rho \leqslant \rho_1$.

2°. Для произвольной целой функции $f(z)$, $f(0) \neq 0$, справедлива формула

$$\int_0^R V(t)\,t^{1-2n}\,dt = \frac{1}{\theta_{2n-1} R^{2n-1}} \int_{S_R} \ln|f(z)|\,d\sigma_z + c_f,$$

называемая формулой Иенсена (см., напр., [3, теор. 1.2.2]). Здесь $V(t)$ — объем нулевого множества функции $f(z)$ в шаре $B_t = \{z : |z| < t\}$. Для функций с «плоскими» нулями, как легко видеть,

$$V(t) = (2n-2)\,\sigma_{2n-2} \int_0^t s\,(t^2 - s^2)^{n-2} n(s)\,ds$$

и формула Иенсена принимает вид

$$(2n-2)\,\sigma_{2n-2} \int_0^r K(t, r)\,n(t)\,dt = \frac{1}{\theta_{2n-1} r^{2n-1}} \int_{S_r} \ln|f(z)|\,d\sigma_z + c, \qquad (4)$$

где $K(t, r) = t \int_r s^{1-2n}(s^2 - t^2)\,ds$, σ_m и θ_m — объем единичного шара и площадь единичной сферы в пространстве R^m соответственно.

Из (4) легко следует

Лемма 1. *Если $f(z)$ — функция с «плоскими» нулями, то имеет место оценка:*

$$\ln M_f(r) \geqslant c_1 n\left(\frac{r}{2}\right) + c_2,$$

где $c_1 = 4^{-n-1}(n-1)\,\sigma_{2n-2}$, $c_2 = \ln|f(0)|$. Из этой леммы заключаем, что для любой целой функции с «плоскими» нулями имеет место неравенство $\rho_1 \leqslant \rho$. С учетом предложения 3 это приводит к следующему утверждению:

Теорема 1. *Для канонического произведения вида (2)* $\rho_1 = \rho$.

3°. Имеет место следующий аналог одномерной теоремы Адамара:

Теорема 2. *Пусть целая функция с «плоскими» нулями $f(z)$ имеет конечный порядок и $f(0) \neq 0$. Тогда она представляется в виде*

$$f(z) = \exp(P(z)) \prod_{k=1}^{\infty} G(\langle z,\ a^k \mid a^k \mid^{-2} \rangle,\ p),$$

где p выбрано из условий (2′), а $P(z)$ — аналитический многочлен степени не выше $[\rho]$.

Доказательство. Утверждение теоремы легко следует из оценки (3) и теоремы об оценке частного (в предположении его аналитичности) двух аналитических функций (см., напр., [3, лемма 1.3.2]). Заметим также, что теорема 2 может быть получена как частный случай теоремы Лелона о факторизации (см. [3, теор. 4.3.1]).

4°. Рассмотрим теперь вопрос о типе канонического произведения $\pi(z)$. Пусть

$$\sigma_f = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M_f(r)}{r^\rho};\ \ \Delta_f = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r)}{r^\rho}.$$

С одной стороны, из леммы 1 следует

Предложение 4. Для любой целой функции с «плоскими» нулями $\Delta_f \leqslant c_3\sigma_f$, где $c_3 = 2^\rho c_1^{-1}$, c_1 — из леммы 1.

Так же, как и в случае одного переменного, из оценки (3) получаем следующие два утверждения.

Предложение 5. Если ρ — порядок канонического произведения — нецелое число, то величины σ_π и Δ_π одновременно конечны, равны нулю или бесконечности.

Предложение 6. Если $\rho = p + 1$, где p выбрано посредством (2′), то $\sigma_\pi = \Delta_\pi = 0$.

Несколько более сложным является случай $\rho = p$. Для его рассмотрения воспользуемся теоремой Брело — Линделефа о типе субгармонической функции. В силу этой теоремы (см. [4, с. 26]) из условия $\sigma_\pi < \infty$ (соответственно $\sigma_\pi = 0$) вытекает ограниченность (соответственно равенство нулю) величины

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \sup_{|z|=1} \int\limits_{|w|<r} \frac{B_p((\widehat{z,\ w}))}{|w|^{p+2n-2}} d\mu(w), \tag{5}$$

где μ — мера, ассоциированная по Риссу субгармонической функции $\ln|\pi(z)|$, $B_p(\psi)$ — полином Гегенбауэра.

Для целой функции с «плоскими» нулями условия (5) оказывается возможным заменить конечным числом условий, налагаемых непосредственно на последовательность точек $\{a^k\}$. Эти условия есть аналог для многомерной ситуации обычного условия Линделефа для случая одного переменного.

Условимся говорить, что для последовательности $\{a^k\}$ с показателем сходимости $\rho_1 = p$ (ρ_1 — из предложения 1, p — из условия (2′) выполнено условие A (соответственно условие A_0), если

$$\forall (s_1, \ldots, s_n) \in Z_+^n : s_1 + \cdots + s_n = p$$

величина

$$D_s \overset{\text{def}}{=} \overline{\lim_{r \to \infty}} \left| \sum_{|a^k|<r} \frac{(a_1^k)^{s_1} \ldots (a_n^k)^{s_n}}{|a^k|^{2p}} \right| < \infty$$

(соответственно $D_s = 0$).

Теорема 3. *Для канонического произведения* $\pi(z)$ *вида* (2) *при* $\rho = p$ *справедливы импликации:*

$$\sigma_\pi < \infty \leftrightarrow \begin{cases} \Delta_\pi < \infty \\ \text{выполнено } A \end{cases}; \quad \sigma_\pi = 0 \leftrightarrow \begin{cases} \Delta_\pi = 0 \\ \text{выполнено } A_0 \end{cases}.$$

Доказательство.

а) Пусть $\Delta_\pi < \infty$ и выполнено A. Обозначим $|z| = r$. Имеем $\ln|\pi(z)| \leqslant \sum_{|a^k|<r} \ln\left|G\left(<z, \frac{a^k}{|a^k|^2}>, \quad p-1\right)\right| + \sum_{|a^k|\geqslant r} \ln|G\left(<z, \frac{a^k}{|a^k|^2}>, p\right)\Big| + \frac{1}{p}\left|\sum_{|a^k|<r} <z, \frac{a^k}{|a^k|^2}>^p\right| \leqslant r^p \int_0^r \frac{dn(t)}{t^{p-1}(t+r)} + r^{p+1} \times \times \int_r^\infty \frac{dn(t)}{t^p(t+r)} + \frac{1}{p}\left|\sum_{|a^k|<r} <z, \frac{a^k}{|a^k|^2}>^p\right|$. Обозначим $z|z|^{-1} = \zeta \in S_1$.

Тогда $\frac{\ln|\pi(z)|}{|z|^p} \leqslant \frac{1}{r}\int_0^r \frac{pn(t)\,dt}{t^p} + r\int_r^\infty \frac{dn(t)}{t^{p+2}} + \frac{1}{p}\left|\sum_{|a^k|<r} <\zeta, \frac{a^k}{|a^k|^2}>^p\right| \leqslant$

$\leqslant (2p+1)\Delta_\pi + o(1) + \frac{1}{p}\left|\sum_{|a^k|<r} <\zeta, \frac{a^k}{|a^k|^2}>^p\right| \leqslant (2p+1)\Delta_\pi + o(1) +$

$+ c(p, n) \sup_{\substack{s_1+\cdots+s_n=p \\ s_j \geqslant 0}} \left|\sum_{|a^k|<r} \frac{(a_1^k)^{s_1} \ldots (a_n^k)^{s_n}}{|a^k|^{2p}}\right|$. Переходя в последнем неравенстве к $\overline{\lim}$ при $r \to \infty$, получим $\sigma_\pi < \infty$. Аналогично доказывается импликация $(\Delta_\pi = 0 \wedge A_0) \Rightarrow \sigma_\pi = 0$.

б) Пусть $\sigma_\pi < \infty$; докажем, что выполнено условие A. Заметим, что функция $|z|^p \int_{|w|<R} \frac{B_p((\widehat{w, z}))\,d\mu(w)}{|w|^{p+2n-2}}$ есть однородный гармонический многочлен степени p. Поэтому условия на величину (5) можно заменить условием ограниченности (соответственно равенства нулю) величины

$$\overline{\lim_{R \to \infty}} \sup_{|z|=1} \left| \int_{|w|<R} \frac{B_p((\widehat{w, z}))\,d\mu(w)}{|w|^{p+2n-2}} \right|. \tag{6}$$

Воспользуемся теперь следующим представлением функции $B_p(\psi)$ (см., напр., [3, с. 74]):

$$B_p(\psi) = \sum_{k+l=p} A_k^{n-1} A_l^{n-1} \cos(k-l)\psi, \tag{7}$$

где $A_\alpha^n = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{n!}$. Переразлагая $\cos(k-l)\psi$ по степеням косинуса, получаем, что (7) записывается в виде

$$B_p(\psi) = \sum_{k=0}^{[p/2]} \gamma_k \cos^{p-2k}\psi, \tag{8}$$

где $\gamma_0 \neq 0$.

Зафиксируем временно точку $z \in S_1$ и для $w \in C^n$ обозначим $\langle w, z\rangle = \alpha(w, z) + i\beta(w, z)$. Тогда $\operatorname{Re}\langle w, e^{i\theta}z\rangle = \alpha\cos\theta + \beta\sin\theta$. Отметим, что $\cos(\widehat{w, e^{i\theta}z}) = |w|^{-1}\operatorname{Re}\langle w, e^{i\theta}z\rangle$. Следовательно,

$$B_p((\widehat{w, e^{i\theta}z})) = \sum_{k=0}^{[p/2]} \gamma_k \frac{(\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta)^{p-2k}}{|w|^{p-2k}}.$$

Из условий на величину (6) тогда следует, что

$$\varlimsup_{R\to\infty} \left| \int\limits_{|w|<R} \sum_{k=0}^{[p/2]} \gamma_k |w|^{2k+2-2p-2n} (\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta)^{p-2k} d\mu(w) \right| < \infty. \tag{9}$$

Изучим сумму, стоящую под знаком интеграла. Рассмотрим случай $p = 2q$; случай нечетного порядка аналогичен. Имеем

$$\sum_{k=0}^{q} \gamma_k \frac{(\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta)^{p-2k}}{|w|^{2p+2n-2k-2}} = \sum_{k=0}^{q} \gamma_k \frac{(\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta)^{p-2k}}{|w|^{2p+2n-2k-2}} \times$$

$$\times (\cos^2\theta + \sin^2\theta)^k = \sum_{j=0}^{2q} \lambda_j(w, z)\cos^{2q-j}\theta \sin^j\theta\, |w|^{2-2p-2n}. \tag{10}$$

В силу того что система функций $\cos^{2q-j}\theta\sin^j\theta = \cos^{2q}\theta\,\mathrm{tg}^j\theta$, $j = 0, 1, \ldots, 2q$, линейно независима, выполнение (9) равносильно выполнению условий

$$\varlimsup_{R\to\infty} \left| \int\limits_{|w|<R} \frac{\lambda_j(w, z)\, d\mu(w)}{|w|^{2p+2n-2}} \right| < \infty \tag{11}$$

$$\forall j = 0, 1, \ldots, 2q, \text{ где } \lambda_j(w, z)$$

— коэффициенты из представления (10).

Проводя элементарные, но громоздкие вычисления, нетрудно убедиться в справедливости следующих формул:

$$\sum_{j=0}^{q}(-1)^j\lambda_{2j}(w,\ z)=\gamma_0\sum_{j=0}^{q}(-1)^j C_{2q}^{2j}\alpha^{2q-2j}\beta^{2j}=\gamma_0\operatorname{Re}\,(\alpha+i\beta)^{2q};$$

$$\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^j\lambda_{2j+1}(w,\ z)=\gamma_0\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^j C_{2q}^{2j+1}\alpha^{2q-2j-1}\beta^{2j+1}=$$
$$=\gamma_0\operatorname{Im}(\alpha+i\beta)^{2q}. \tag{12}$$

Следовательно, в силу (11) и (12) выполняется условие

$$\overline{\lim_{R\to\infty}}\left|\int\limits_{|w|<R}\frac{[\alpha(w,\ z)+i\beta(w,\ z)]^p}{|w|^{2p\times 2n-2}}d\mu(w)\right|<\infty,$$

$$\text{т. е. } \overline{\lim_{R\to\infty}}\left|\int\limits_{|w|<R}\frac{\langle w,\ z\rangle^p\,d\mu(w)}{|w|^{2p+2n-2}}\right|<\infty\ \ \forall z\in S_1.$$

Как легко видеть, отсюда следует, что $\forall(s_1,\ \ldots,\ s_n)\in Z_+^n$:

$$s_1+\cdots+s_n=p\Rightarrow\overline{\lim_{R\to\infty}}\left|\int\limits_{|w|<R}\frac{w_1^{s_1}\ \ldots\ w_n^{s_n}}{|w|^{2p+2n-2}}d\mu(w)\right|<\infty. \tag{13}$$

Воспользуемся условиями (13) для целых функций с «плоскими» нулями. В этом случае мера μ имеет вид

$$d\mu(w)\big|_{\{z:|z|<R\}}=\sum_{|a^k|<R}dw^{n-1}(\lambda^k)\big|_{\left\{|\lambda^k|<\sqrt{R^2-|a^k|^2}\right\}},$$

где dw^{n-1} — элемент евклидова объема в пространстве C^{n-1}. Учитывая это, получаем, что

$$\int\limits_{|w|<R}\frac{w_1^{s_1}\ \ldots\ w_n^{s_n}}{|w|^{2p+2n-2}}d\mu(w)=\sum_{|a^k|<R}\frac{\left(a_1^k\right)^{s_1}\ \ldots\ \left(a_n^k\right)^{s_n}}{|a^k|^{2p}}+O(1)$$

при $R\to\infty$, причем величина $O(1)$ оценивается через размерность пространства, порядок и тип функции $\pi(z)$. Отсюда и из (13) следует, что

$$\overline{\lim_{R\to\infty}}\left|\sum_{|a^k|<R}\frac{\left(a_1^k\right)^{s_1}\ \ldots\ \left(a_n^k\right)^{s_n}}{|a^k|^{2p}}\right|<\infty,$$

т. е. в рассматриваемом случае выполнено условие A.

Импликация $\sigma_\pi=0\Rightarrow A_0$ доказывается аналогично. Теорема 3 доказана.

5°. В теории функций одного и нескольких переменных видное место занимает теория функций вполне регулярного роста (в. р. р.). При этом для случая многих переменных существует два различных определения полной регулярности роста. Именно, следуя обзору Л. И. Ронкина «Целые функции» в сб. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления», т. 9, назовем целую функцию $f(z)$, $z \in C^n$, функцией I-в. р. р., если $\forall \zeta \in S_1$ функция $f_\varsigma(\lambda) \overset{\text{def}}{=} f(\lambda\zeta)$ одного комплексного переменного λ имеет вполне регулярный рост в смысле Левина—Пфлюгера * (см. [2, с. 182]). Целую функцию $f(z)$ назовем функцией II — в. р. р., если $\ln|f(z)|$ — субгармоническая функция в. р. р. ** Известно (см. [5, с. 253]), что из условия I — в. р. р. следует условие II — в. р. р. Обратное утверждение неверно; соответствующий пример был построен С. Ю. Фаворовым (1982). Мы покажем сейчас, что для функций с «плоскими» нулями условия I — в. р. р. и II — в. р. р. эквивалентны.

Теорема 4. *Если $f(z)$ — целая функция конечного порядка ρ с «плоскими» нулями, обладающая свойством II — в. р. р., то $f(z)$ обладает и свойством I — в. р. р.*

Доказательство. Мы будем основываться ва следующих утверждениях:

Теорема А [1]. *Радиальный индикатор $L_r(f;\ z) \overset{\text{def}}{=} \overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, t^{-\rho} \times \times \ln|f(tz)|$ целой функции $f(z)$ с «плоскими» нулями есть непрерывная функция.*

Теорема Б [6] ***. *Для того чтобы целая функция $f(z)$ имела II — в. р. р. при порядке ρ, необходимо и достаточно, чтобы для любой целой функции не выше чем нормального типа при порядке ρ имело место соотношение $L_r^*(fg;\ z) = L_r^*(f;\ z) + + L_r^*(g;\ z)$, где $L_r^*(f;\ z)$ — регуляризованный радиальный индикатор функции $f(z)$.*

Пусть $f(z)$ — целая функция II — в. р. р. с «плоскими» нулями, $\zeta \in S_1$. Рассмотрим в комплексной плоскости $\{\lambda\zeta,\ \lambda \in C^1\}$ произвольную целую функцию $g_\varsigma(\lambda)$ не выше чем нормального типа при порядке ρ. Положим $G(z) = g_\varsigma(\langle z,\ \zeta\rangle)$; тем самым мы продолжили функцию $g_\varsigma(\lambda)$ во все пространство C^n. Очевидно, что функции $G(z)$ и $G(z)f(z)$ будут при этом целыми функциями с «плоскими» нулями не выше чем нормального типа при порядке ρ. Следовательно, по теореме Б, $L_r^*(fG;\ z) = L_r^*(f;\ z) + L_r^*(G;\ z)$. Но в силу теоремы А все функции, фигурирующие в последнем равенстве, непрерывны до взятия регуляризации, поэтому $L_r(fG;\ z) = L_r(f;\ z) + + L_r(G;\ z)$. Сужая это равенство на комплексную плоскость $\{\lambda\zeta,\ \lambda \in C^1\}$, получим $h_{f_\varsigma}(\theta) + h_{g_\varsigma}(\theta) = h_{f_\varsigma g_\varsigma}(\theta)$, где $h_\varphi(\theta)$ — обычный индикатор целой функции φ одного переменного. Поскольку это соотношение выполнено для любой целой функции $g_\varsigma(\lambda)$ не

* Это определение принадлежит Л. Грумену (1971).

** Определение субгармонической функции в. р. р. принадлежит В. С. Азарину (см. [4, с. 39]).

*** Для случая $n = 1$ теорема Б (точнее, та ее часть, которая относится к достаточности) получена В. С. Азариным (1966).

выше чем нормального типа при порядке ρ, то по теореме Б для $n=1$ $f_\zeta(\lambda)$ есть целая функция в. р. р. $\forall\zeta\in S_1$. Это означает, что $f(z)$ — целая функция I — в. р. р. Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Gruman L.* The regularity of growth of entire functions whose zeros are hyperplanes // Arkiv. mat.— 1972.— **10**, № 1.— S. 23—31. 2. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.— М.: Гостехтеоретиздат, 1956.— 632 с. 3. *Ронкин Л. И.* Введение в теорию целых функций многих переменных.— М.: Наука, 1971.—430 с. 4. *Азарин В. С.* Теория роста субгармонических функций.— Х.: Вища шк. Изд-во при ХГУ.— 1982.— 74 с. 5. *Агранович П. З., Ронкин Л. И.* О функциях вполне регулярного роста многих переменных//Annales Polonici Mathematici.— 1981.— С. 239—254. 6. *Фаворов С. Ю.* О сложении индикаторов целых и субгармонических функций многих переменных//Мат. сб.—1978.— **105** (147).— С. 128—140.

Поступила в редколлегию 02.10.85