УДК 517.982

М. И. ОСТРОВСКИЙ

СРАВНЕНИЕ СЛАБОГО И НЕПРЕРЫВНОГО СВОЙСТВ БАНАХА — САКСА

Настоящая заметка посвящена сравнению следующих двух модификаций свойства Банаха—Сакса.

Определение 1 [1, с. 39]. *Говорят, что банахово пространство X обладает слабым свойством Банаха—Сакса (записывается: $X \in WBS$), если каждая слабо сходящаяся к нулю последовательность $\{x_n\} \subset X$ содержит подпоследовательность $\{y_n\}$ такую, что*

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} y_k \right\|_X = 0.$$

Определение 2. (А. Н. Пличко). *Говорят, что банахово пространство X обладает непрерывным свойством Банаха—Сакса (записывается: $X \in CBS$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что любая последовательность $\{x_i\} \subset X$, удовлетворяющая условию $\limsup\limits_{i \to \infty} |f(x_i)| < \delta(\varepsilon)$ для любого f из единичного шара X^*, содержит подпоследовательность $\{y_i\}$, для которой*

$$\limsup_{n \to \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} y_k \right\|_X < \varepsilon.$$

Из полученной Бозами [1, с. 50] характеризации слабого свойства Банаха — Сакса непосредственно вытекает, что из $X \in CBS$

следует $X \in WBS$. Целью настоящей работы является доказательство того, что обратное неверно.

Теорема. *Существует банахово пространство X такое, что $X \in WBS$, но $X \notin CBS$.*

Доказательство. Нам понадобится конструкция пространства Шрейера [1, с. 97]. Множество $A = \{n_1, \ldots, n_k\} \subset \boldsymbol{N}$ с $n_1 < \ldots < n_k$ назовем допустимым, если $k \leqslant n_1$. Обозначим через B множество всех допустимых подмножеств в $\boldsymbol{N}$. Пространство Шрейера S — это пополнение пространства финитных последовательностей вещественных чисел по норме

$$\|x\|_S = \sup_{A \in B} \sum_{i \in A} |x(i)|$$

(через $x(i)$ обозначаем i-й член последовательности x). Ясно, что S содержит l_1 (как множество) и что при $\alpha > 0$ и $\beta \geqslant 0$ выражение $\alpha \|x\|_{l_1} + \beta \|x\|_S$ задает эквивалентную норму на l_1.

Введем последовательность норм на l_1 равенствами

$$\|x\|_k = \frac{1}{k+1} \|x\|_{l_1} + \frac{k}{k+1} \|x\|_S; \ k = 1, 2, \ldots .$$

Пространство l_1 с нормой $\|\cdot\|_k$ обозначим X_k. Покажем, что прямая сумма $X = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \oplus X_k\right)_2$ (определение прямой суммы см., например, в [2, с 12]) и будет искомым пространством.

Сначала покажем, что $X \in WBS$.

Векторы из X будем записывать в виде последовательностей: $x = (x^1, \ldots x^i, \ldots)$; $x^i \in X_i$. Последовательности векторов $\{y_i\} \subset X$ и $\{z_i\} \subset X$ будем называть эквивалентными, если $\|y_i - z_i\|_X \to 0$ при $i \to \infty$. Ясно, что сходимости средних Чезаро эквивалентных последовательностей равносильны.

Пусть $\{x_i\}$ — слабо сходящаяся к нулю последовательность из X. Ясно, что она эквивалентна некоторой последовательности $\{y_i\}$ вида

$$y_i = (y_i^1, \ldots, y_i^{q(i)}, 0, \ldots), \ y_i^j \in X_j.$$

Поскольку при любом j последовательность $\{y_i^j\}_{i=1}^{\infty}$ является слабо сходящейся к нулю в пространстве X_j, а в X_j слабая и сильная сходимости последовательностей к нулю эквивалентны (для l_1 соответствующий результат имеется в [3, с. 59], для X_j это свойство сохраняется, так как является изоморфно инвариантным), то из $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ можно выделить подпоследовательность $\{y_{k_m}\}_{m=1}^{\infty}$, эквивалентную последовательности $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ следующего вида:

$$\begin{aligned} z_1 &= (z_1^1, \ldots, z_1^{p_1}, 0, \ldots, 0, 0, \ldots), \\ z_2 &= (0, \ldots, 0, z_2^{p_1+1}, \ldots, z_2^{p_2}, 0, 0, \ldots), \\ z_3 &= (0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0, z_3^{p_2+1}, \ldots) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (1)$$

Ясно, что $\{z_m\}$ тоже слабо сходится к нулю. Поэтому для некоторого $M<\infty$ имеем $\sup_m \|z_m\| \leqslant M$. Отсюда из определения нормы в X и из (1) следует, что

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} z_m \right\| \leqslant M/\sqrt{n} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Так как $\{z_m\}$ эквивалентна некоторой подпоследовательности в $\{x_i\}$, это означает, что $X \in WBS$.

Легко видеть, что для доказательства $X \notin CBS$ достаточно установить, что для ортов пространства X_k (обозначим их $\{e_i^k\}_{i=1}^{\infty}$), любого функционала f из единичного шара X_k^* и любого набора $\{p_1 < \ldots < p_n\} \subset \boldsymbol{N}$ имеют место неравенства

$$\text{а) } \limsup_{i \to \infty} |f(e_i^k)| \leqslant 1/\sqrt{k+1};$$

$$\text{б) } \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e_{p_i}^k \right\|_k > 1/2.$$

Неравенство а) установим от противного. Пусть функционал $f \in X_k^*$ таков, что

$$\limsup_{i \to \infty} |f(e_i^k)| > \frac{1}{\sqrt{k+1}}. \tag{2}$$

Поскольку пространство X_k изоморфно l_1, то f можно рассматривать как элемент l_∞:

$$f = (f_1, \ldots, f_n, \ldots); \ f_i \in \boldsymbol{R}, \ \sup_i |f_i| < \infty,$$

и считать, что $f(e_i^k) = f_i$. В силу (2) найдется такая возрастающая последовательность натуральных чисел $(s_i)_{i=1}^{\infty}$, что $|f_{s_i}| > 1/\sqrt{k+1}$. Для любого конечного набора $(t_i) \subset \boldsymbol{R}$ имеем

$$\|f\|_k \geqslant |\sum f_i t_i| / \|\sum t_i e_i^k\|_k. \tag{3}$$

Доказательство неравенства а) будет завершено, если докажем, что существует такой набор (t_i), для которого выражение в правой части (3) будет больше 1. Для этого последовательность $(s_i)_{i=1}^{\infty}$ разобьем на «участки» $(\tau_i)_{i=1}^{\infty}$ следующим образом:

$\tau_1 = \{s_1\}$;

$\tau_2 = \{s_2, \ldots, s_{q_2}\}$, где $q_2 \in \boldsymbol{N}$ таково, что $q_2 - 1 > s_1$;

$\tau_3 = \{s_{q_2+1}, \ldots, s_{q_3}\}$, где $q_3 \in \boldsymbol{N}$ таково, что $q_3 - q_2 > s_{q_2}$;

. . . . .

$\tau_n = \{s_{q_{n-1}+1}, \ldots, s_{q_n}\}$, где $q_n \in N$ таково, что $q_n - q_{n-1} > s_{q_{n-1}}$.
. . . . .

Пусть теперь $\{t_m : 1 \leqslant m \leqslant s_{q_n}\}$ — последовательность следующего вида:

$$t_m = \begin{cases} 0, & \text{если } m \notin (s_i); \\ \operatorname{sign} f_m/(q_j - q_{j-1}), & \text{если } m \in \tau_j;\ j = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Тогда $\left|\sum f_i t_i\right| > n/\sqrt{k+1}$, а для $\left\|\sum t_i e_i^k\right\|_k$ имеем оценку:

$$\left\|\sum t_i e_i^k\right\|_k \leqslant \frac{n}{k+1} + \frac{k}{k+1} \sup_{A \in B} \sum_{i \in A} |t_i|.$$

Если $\min A > s_{q_n}$, то вторая сумма равна нулю, если же для некоторого $j \leqslant n$ имеем $s_{q_{j-1}} < \min A \leqslant s_{q_j}$, то $\sum\limits_{i \in A} |t_i| \leqslant \sum |t_i| + \operatorname{card} A \times \max |t_i|$, где сумма в правой части берется от $s_{q_{j-1}+1}$ до s_{q_j} а max берется по $i > s_{q_j}$. Воспользовавшись тем, что для $r \geqslant j$ имеет место $q_{r+1} - q_r > s_{q_r} \geqslant s_{q_j}$, имеем $\sum\limits_{i \in A} |t_i| \leqslant 1 + s_{q_j}(1/s_{q_j}) = 2$.

В итоге получаем оценку:

$$\left\|\sum_i t_i e_i^k\right\|_k \leqslant \frac{n}{k+1} + \frac{2k}{k+1}.$$

Так как для достаточно больших n имеем

$$\left(\frac{n}{\sqrt{k+1}}\right) \Big/ \left(\frac{n}{k+1} + \frac{2k}{k+1}\right) > 1,$$

то тем самым неравенство а) доказано.

Докажем неравенство б). Имеем

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_{p_i}^k\right\|_k = \frac{1}{k+1}\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_{p_i}^k\right\|_{l_1} + \frac{k}{k+1}\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_{p_i}^k\right\|_S.$$

Первое слагаемое равно $1/(k+1)$. Для оценки второго заметим, что множество $\{p_{j+1}, p_{j+2}, \ldots, p_n\}$, где j — целая часть $(n/2)$, является допустимым; следовательно,

$$\frac{k}{k+1}\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^k_{p_i}\right\|_S \geqslant \frac{k(n-j)}{(k+1)\,n} \geqslant \frac{k}{2(k+1)}.$$

Так что

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^k_{p_i}\right\|_k \geqslant \frac{1}{k+1} + \frac{k}{2(k+1)} > \frac{1}{2}.$$

Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Beauzamy B., Lapreste J. T.* Modèles étalés des espaces de Banach. — Paris: Hermann, 1983.—211 p. 2. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces, v. I. — Berlin: Springer, 1977.—188 p. 3. *Дэй М. М.* Нормированные линейные пространства.— М.: Изд-во иностр. лит., 1961—232 с.

Поступила в редколлегию 29.05.86