УДК 517.9

Н. В. НОРИН

ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ, СВЯЗАННАЯ С БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫМИ ТЕПЛОВЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ

Важную роль в конечномерной теории уравнений с частными производными играет теорема о среднем для решения дифференциального уравнения. Перенесение этой теоремы на бесконечномерный случай наталкивается на значительные трудности, связанные, в первую очередь, с отсутствием в этой ситуации меры Лебега, т. е. ненулевой σ-конечной меры, инвариантной относительно всех сдвигов. Эта работа близка к работам А. А. Беляева, рассматривавшего эллиптический случай (см. [1, 2]).

1. Обозначим через $H_+ \subset H \subset H_-$ оснащенное гильбертово пространство, которое можно получить следующим образом: если $A: H_- \to H_-$ — положительно определенный самосопряженный оператор Гильберта — Шмидта в сепарабельном гильбертовом пространстве H_-, наделенном нормой $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\ \cdot)}$, то $H = AH_-$, $H_+ = A^2H_-$ — гильбертовы пространства, наделенные нормами $|\cdot| = \sqrt{\langle\cdot,\ \cdot\rangle} = \sqrt{(A^{-1}\cdot,\ A^{-1}\cdot)}$ и $\|\cdot\|_+ = \sqrt{(\cdot,\ \cdot)_+} = \sqrt{(A^{-2}\cdot,\ A^{-2}\cdot)}$ соответственно. Пусть $\Phi = H_- \times R^1$, U — область в Φ, $S \equiv S_\lambda = \{x \in H_- : \|x\| = \lambda\}$, $D \equiv D_\lambda = \{x \in H_- : \|x\| \leqslant \lambda$, $T > 0$, $DT = D \times [-T,\ 0]$, $n(x) = x/\|x\|$ — внешняя нормаль к S в точке x, $\overline{n}(x) = A^2 n(x)$ — конормаль, $p_t(x,\ \cdot)$ — гауссовская мера на H_- с корреляционным оператором tA^2 и средним x, $p_t^s(x,\ \cdot)$ — соответствующая ей поверхностная мера (см. [3]). Для функции $f: U \to R^1$ обозначим символами Df и D^2f первую и вторую производные Фреше по подпространству H [4], символом f' — первую

производную Фреше по подпространству H_-, символом $\frac{\partial f}{\partial t}$ — производную по подпространству R^1. Пусть $\{e_n\}$ — ортонормированный в H_- базис, собственный для $A: Ae_n = \lambda_n e_n$, $\lambda_n \geqslant \lambda_{n+1} > 0$.

Определение 1. *Функция $f: U \to R^1$ принадлежит множеству $C_H^{1,2}(U)$, если производные $Df: U \to H$, $D^2 f: U \to L(H, H)$, $f': U \to H_+$, $\frac{\partial f}{\partial t}: U \to R^1$ существуют, непрерывны и ограничены, а частичные суммы $\Delta_N f(x, t) = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^2 d_{e_n}^2 f(x, t)$ ограничены в совокупности.*

Замечание 1. Очевидно, что, какова бы ни была точка $(x, t) \in U$, существуют такие $\lambda > 0$, $T > 0$, что $DT + (x, t) \subset U$. Делая в случае необходимости сдвиг времени на $t - T$, можем считать $t - T$, несколько упрощая дальнейшие выкладки.

Теорема 1. *Если $f \in C_H^{1,2}(U)$, то для любой точки $(x, t) \in U$*

$$f(x, t) = \int_0^t \int_S d_{\overline{n}(\xi)} f(\xi, \tau)\, p_{2(t-\tau)}^S(x, d\xi)\, d\tau +$$
$$+ \int_0^t \int_S f(\xi, \tau)(n(\xi), \xi - x)(2(t-\tau))^{-1} p_{2(t-\tau)}^S(x, d\xi)\, d\tau - \tag{1}$$
$$- \int_0^t \int_D \left(-\frac{\partial}{\partial \tau} + \Delta\right) f(\xi, \tau)\, p_{2(t-\tau)}(x, d\xi)\, d\tau +$$
$$+ \int_D f(\xi, 0)\, p_{2t}(x, d\xi),$$

где $\Delta = \lim_{N \to \infty} \Delta_N$.

Замечание 2. По аналогии с конечномерным случаем естественно называть первое слагаемое в правой части (1) тепловым потенциалом простого слоя с плотностью $d_{\overline{n}(\xi)} f(\xi, \tau)$, второе слагаемое — тепловым потенциалом двойного слоя с плотностью $f(\xi, \tau)$, а третье — объемным тепловым потенциалом с плотностью $\left(-\frac{\partial}{\partial \tau} + \Delta\right) f(\xi, \tau)$ [5].

Определение 2. *Функция $f: U \to R^1$ удовлетворяет уравнению теплопроводности, если $f \in C_H^{1,2}(U)$ и $\left(-\frac{\partial}{\partial t} + \Delta\right) f = 0$ в U.*

Пусть $q: [0, \lambda] \to R^1$ — произвольная суммируемая функция, $b_\lambda(\tau) = \int_\lambda^\tau q(r)\, dr$.

Теорема 2. *Если функция f удовлетворяет уравнению теплопроводности, то*

$$\Big(\int_0^{\lambda} rq(r)\,dr\Big) f(x,\ t) \int_0^{t} \int_{D_\lambda} f(\xi,\ \tau)\, C_1(\xi - x,\ t-\tau) \times$$
$$\times\, p_{2(t-\tau)}(x,\ d\xi)\, d\tau + \int_{D_\lambda} f(\xi,\ 0)\, C_2(\xi - x)\, p_{2t}(d\xi), \tag{2}$$

где $C_1(y,\ s) = \gamma(y)\, q(\|y\|) + b_\lambda(\|y\|)\,[-\|A\|_2^2\|y\|^{-1} + \gamma(y)\|y\|^{-1} + \|y\|/s]$, $C_2(y) = \int_{\|y\|}^{\lambda} rq(r)\,dr - \|y\|\, b_\lambda(\|y\|)$, *а* $\gamma(y) = \|Ay\|^2/\|y\|^2$, $\|A\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2$.

Замечание 3. Теорема 2 является аналогом конечномерной теоремы об объемном среднем для решения уравнения теплопроводности и выражает значение решения f в точке $(x,\ t)$ через его значения на множестве $(x,\ t) + D_\lambda \times [-t,\ 0]$ (см. также замечание 1). Подбирая подходящие функции q, можно изучать поведение решения уравнения теплопроводности, в частности, его дифференцируемость.

Следствие 1. *Функция f, удовлетворяющая уравнению теплопроводности в U, бесконечное число раз дифференцируема по Фреше по подпространству H.*

Доказательство следствия 1. Пусть функция $F: [0,\ \lambda] \to R^1$ такова, что 1) $\exists\, \varepsilon > 0$: $F|_{[0,\varepsilon]} \equiv K > 0$; 2) $F(\lambda) = K$; 3) F бесконечно дифференцируема на $[0,\ \lambda]$, $\lambda K - \int_0^{\lambda} F(r)\,dr > 0$. Определим функцию q равенством $q = F'$. Легко видеть, что она удовлетворяет следующим условиям: 1) q — бесконечно дифференцируема; 2) $q|_{[0,\varepsilon]} \equiv 0$. Так как $b_\lambda(\tau) = \int_\tau^{\lambda} q(r)\,dr = F(r)\,|_\tau^\lambda = F(\lambda) - F(\tau) = K - F(\tau)$, то 1) $b_\lambda(\lambda) = 0$; 2) $b_\lambda|_{[0,\ \varepsilon]} \equiv 0$; 3) b_λ бесконечно дифференцируема. Пользуясь этим, а также тем, что $\frac{d}{d\tau} \times \Big(\int_\tau^{\lambda} rq(r)\,dr - \tau b_\lambda(\tau)\Big) = \frac{d}{dt}\Big(K(\lambda - \tau) - \int_\tau^{\lambda} F(r)\,dr\Big) = -b_\lambda(\tau)$, в (2) можно продифференцировать правую часть по x любое число раз.

2. Доказательство теоремы 1 основано на лемме, представляющей самостоятельный интерес.

Лемма. *В условиях теоремы 1 функция* $\varphi_\tau(x,\ t) = \int_D f(\xi,\ \tau)\, p_{2(t-\tau)}(x,\ d\xi)$ *удовлетворяет уравнению теплопроводности, если* $0 < \tau < t - \varepsilon$ *и* $0 < \varepsilon < t$.

Доказательство леммы. Пусть мера $\mu : B(H_-) \to R^1$ достаточное число раз дифференцируема по H (см. [4]) и относительно нее интегрируема в смысле Угланова [3] поверхность S. Тогда справедлива формула

$$\int\limits_D d_h \mu(d\xi) = \int\limits_S (h,\ n(\xi))\, \mu^S(d\xi) \tag{3}$$

(см., например, [1]). Из (3), пользуясь тем, что

$$d_{e_i}(\psi \cdot \mu) = \psi \cdot (d_{e_i}\mu) + (d_{e_i}\psi) \cdot \mu \tag{4}$$

([6, теорема 2.2.1]), получаем

$$\int\limits_D d_{e_i}^2 \psi(\xi)\, \mu(d\xi) = -\int\limits_D d_{e_i}\psi(\xi)\,(d_{e_i}\mu)(d\xi) + \\ + \int\limits_S d_{e_i}\psi(\xi)\, e_i,\ n(\xi))\, \mu^S(d\xi).$$

Полагая $\psi(\xi) = \|\xi - x\|^2/(2(t-\tau))$, $\mu(E) = \int\limits_E f(\xi,\ \tau)\, p_{2(t-\tau)}(x, d\xi)$, $E \in B(U)$, получим после вычисления производных гауссовской меры и перегруппировки

$$\int\limits_S (e_i,\ \xi - x)(e_i,\ n(\xi))(2(t-\tau))^{-1} f(\xi,\ \tau)\, p^S_{2(t-\tau)}(x,\ d\xi) = \\ = (2(t-\tau))^{-1} \int\limits_D [1 - (e_i,\ \xi - x)\langle e_i,\ \xi - x\rangle (2(t-\tau))^{-1}] \times \\ \times f(\xi,\ \tau)\, p_{2(t-\tau)}(x,\ d\xi) + \int\limits_D (e_i,\ \xi - x)(2(t-\tau))^{-1} d_{e_i} f(\xi,\ \tau) \times \\ \times p_{2(t-\tau)}(x,\ d\xi).$$

Пользуясь тем, что $(e_i,\ \xi - x)\langle e_i,\ \xi - x\rangle = \langle \tilde{e}_i,\ \xi - x\rangle^2$, где $\tilde{e}_i = \lambda_i e_i$, а $d_{e_i}^2 \varphi_\tau(x,\ t) = -(2\lambda_i^2(t-\tau))^{-1} \int\limits_D [1 - \langle \tilde{e}_i,\ \xi - x\rangle^2 (2(t-\tau))^{-1}] f(\xi,\ \tau)\, p_{2(t-\tau)}(x,\ d\xi)$, получим, применяя теорему Лебега, что

$$\Delta\varphi_\tau(x,\ t) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 d_{e_i}^2 \varphi_\tau(x,\ t) = \int\limits_D \langle f'(\xi,\ \tau),\ \xi - x\rangle \times \\ \times (2(t-\tau))^{-1} p_{2(t-\tau)}(x,\ d\xi) - \int\limits_S f(\xi,\ \tau)(n(\xi), \\ \xi - x)(2(t-\tau))^{-1} p^S_{2(t-\tau)}(x,\ d\xi). \tag{5}$$

С другой стороны,

$$\varphi_\tau(x,\ t) = \int_{(D-x)/\sqrt{2(t-\tau)}} f(q\sqrt{2(t-\tau)} + x,\ \tau)\, p_1(dq)$$

и, пользуясь теоремой, аналогичной теореме 10 (о поверхностном слое) из [3], утверждающей, что (в обозначениях [3])

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-1} [\mu (Q_+^\varepsilon) - \mu (Q_-^\varepsilon)] = \int_Q \langle \overline{n} (\xi), \quad \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} (\xi, 0) \rangle \mu^G (d\xi),$$

где $Q_+^\varepsilon (Q_-^\varepsilon)$ — «положительный» («отрицательный») поверхностный слой, определяемый знаком функции u, получим, что $\frac{\partial}{\partial t} \varphi_\tau (x, t)$ существует и

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_\tau (x, t) = \int_D \langle f' (\xi, \tau), \xi - x \rangle (2 (t - \tau))^{-1} p_{2(t-\tau)} (x, d\xi) -$$

$$- \int_S f (\xi, \tau) (n (\xi), \xi - x) (2 (t - \tau))^{-1} p_{2(t-\tau)}^S (x, d\xi). \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует, что $\left(-\frac{\partial}{\partial t} + \Delta\right) \varphi_\tau (x, t) = 0$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Из формул (3) и (4) можно получить, что

$$\int_D \Delta f (\xi, \tau) p_{2(t-\tau)} (x, d\xi) - \Delta \int_D f (\xi, \tau) p_{2(t-\tau)} (x, d\xi) =$$

$$= \int_S \langle f' (\xi, \tau), A^2 n (\xi) \rangle p_{2(t-\tau)}^S (x, d\xi) - \tag{7}$$

$$- \int_S f (\xi, \tau) \langle A^2 n (\xi), \xi - x \rangle (2 (t - \tau))^{-1} p_{2(t-\tau)}^S (x, d\xi).$$

Объединяя (7) и

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_\tau (x, t) = - \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_\tau (x, t) + \int_D \frac{\partial}{\partial \tau} f (\xi, \tau) p_{2(t-\tau)} (x, d\xi),$$

интегрируя их по τ от 0 до $t - \varepsilon$ и применяя формулу Ньютона—Лейбница, получим

$$\int_0^{t-\varepsilon} \int_D \left(-\frac{\partial}{\partial \tau} + \Delta\right) f (\xi, \tau) p_{2(t-\tau)} (x, d\xi) \, d\tau -$$

$$- \int_0^{t-\varepsilon} \left(-\frac{\partial}{\partial t} + \Delta\right) \int_D f (\xi, \tau) p_{2(t-\tau)} (x, d\xi) \, d\tau =$$

$$= \int_0^{t-\varepsilon} \int_S \langle f' (\xi, \tau), A^2 n (\xi) \rangle p_{2(t-\tau)}^S (x, d\xi) \, d\tau +$$

$$+ \int_0^{t-\varepsilon} \int_S f (\xi, \tau) (n (\xi), \xi - x) (2 (t - \tau))^{-1} p_{2(t-\tau)}^S (x, d\xi) \, d\tau -$$

$$- \int_D f (\xi, t - \varepsilon) p_{2\varepsilon} (x, d\xi) + \int_D f (\xi, 0) p_{2t} (x, d\xi).$$

Устремляя ε к нулю, пользуясь леммой и тем, что $p_{2\varepsilon}(x, \cdot) \to \delta(x)$, завершаем доказательство теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Для упрощения выкладок без потери общности будем считать, что $x=0$. Так как функция f удовлетворяет уравнению теплопроводности, то из (1) следует, что

$$f(0, t) = \int_0^t \int_{S_r} d_{\bar{n}(\xi)} f(\xi, \tau)\, p_{2(t-\tau)}^{S_r}(d\xi)\, d\tau +$$
$$+ \int_0^t \int_{S_r} f(\xi, \tau)\,(n(\xi), \xi - x)\,(2(t-\tau))^{-1} p_{2(t-\tau)}^{S_r}(d\xi)\, d\tau +$$
$$+ \int_{D_r} f(\xi, 0)\, p_{2t}(d\xi). \tag{8}$$

Интегрируя (8) по r от r_1 до r_2 и заменяя $n(\xi)$ на $\xi/\|\xi\|$, получим

$$(r_2 - r_1) f(0, t) = \int_0^t \int_{D_{r_1, r_2}} \langle f'(\xi, \tau), A^2\xi\rangle \|\xi\|^{-1} p_{2(t-\tau)}(d\xi)\, d\tau +$$
$$+ \int_0^t \int_{D_{r_1, r_2}} f(\xi, \tau)\,\|\xi\|\,(2(t-\tau))^{-1} p_{2(t-\tau)}(d\xi)\, d\tau +$$
$$+ \int_{r_1}^{r_2} \int_{D_r} f(\xi, 0)\, p_{2t}(d\xi)\, dr, \tag{9}$$

где $D_{r_1, r_2} = \bigcup\limits_{r_1 < r < r_2} S_r$. Пользуясь формулой интегрирования по частям

$$\int_{D_{r_1, r_2}} d_{e_i}(f\mu) = \int_{S_{r_2}} f(n, e_i)\,\mu^{S_{r_2}} - \int_{S_{r_1}} f(n, e_i)\,\mu^{S_{r_1}},$$

получим

$$\int_{D_{r_1, r_2}} \langle f'(\xi, \tau), A^2\xi\rangle \|\xi\|^{-1} p_{2(t-\tau)}(d\xi) = \int_{S_{r_2}} f(\xi, \tau)\,\gamma(\xi)\, p_{2(t-\tau)}^{S_{r_2}}(d\xi) -$$
$$- \int_{S_{r_1}} f(\xi, \tau)\,\gamma(\xi)\, p_{2(t-\tau)}^{S_{r_1}}(d\xi) - \int_{D_{r_1, r_2}} f(\xi, \tau) \times$$
$$\times \Big[-\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 \|\xi\|^{-1} + \gamma(\xi)\|\xi\|^{-1} + \|\xi\|\,(2(t-\tau))^{-1}\Big]\, p_{2(t-\tau)}(d\xi). \tag{10}$$

Меняя в последнем слагаемом в правой части (9) порядок интегрирования, подставляя (10), устремляя r_1 к нулю и заменяя r_2 на r, получим

$$rf(0, t) = \int_0^t \int_{S_r} (f, \tau)\,\gamma(\xi)\, p_{2(t-\tau)}^{S_r}(d\xi)\, d\tau +$$

$$+\int_0^t\int_{D_r} f(\xi,\tau)\,[-\|A\|_2^2\|\xi\|^{-1}+\gamma(\xi)\|\xi\|^{-1}+\|\xi\|(t-\tau)^{-1}]\times$$

$$\times\, p_{2(t-\tau)}(d\xi)\,d\tau+\int_{D_r}(r-\|\xi\|)\,f(\xi,0)\,p_{2t}(d\xi). \tag{11}$$

Умножая (11) на $q(r)$ и интегрируя по r от 0 до λ, получим после преобразований

$$\Big(\int_0^\lambda rq(r)\,dr\Big)f(0,\ t)=\int_0^t\int_{D_\lambda} f(\xi,\ \tau)\,\gamma(\xi)\,q(\|\xi\|)\times$$

$$\times\, p_{2(t-\tau)}(d\xi)\,d\tau+\int_0^t\int_{D_\lambda} f(\xi,\ \tau)\,b_\lambda(\|\xi\|)\times$$

$$\times\,[-\|A\|_2^2\|\xi\|^{-1}+\gamma(\xi)\|\xi\|^{-1}+\|\xi\|/(t-\tau)]\,p_{2(t-\tau)}(d\xi)\,d\tau+$$

$$+\int_{D_\lambda} f(\xi,\ \tau)\Big[\int_{\|\xi\|}^{\lambda} rq(r)\,dr-\|\xi\|\,b_\lambda(\|\xi\|)\Big]\,p_{2t}(d\xi),$$

а это и есть искомая формула (2) (при $x=0$).

Список литературы: 1. *Беляев А. А.* Интегральное представление гармонических функций на гильбертовом пространстве//Вестн. МГУ. Сер. мат.—1982.— № 6.— С. 44—47. 2. *Беляев А. А.* Теорема о среднем для функций, гармонических в области гильбертова пространства//Вестн. МГУ. Сер. мат. — 1982, № 5. —С. 32—35. 3. *Угланов А. В.* Поверхностные интегралы в банаховом пространстве//Мат. сб. — 1979.—**110**, №2.—С. 189—217. 4. *Смолянов О. Г.* Анализ в топологических линейных пространствах и его приложения.— М.: Изд-во МГУ, 1979.—86 с. 5. *Норин Н. В.* Тепловые потенциалы на гильбертовом пространстве//Мат. заметки.— 1984.— **35**, № 4.—С. 531—548. 6. *Авербух В. И.* и др. Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. 1. Дифференцируемые меры/В. И. Авербух, О. Г. Смолянов, С. В. Фомин//Науч. тр. Моск. мат. об-во.—1975.—**24**.— С. 173—174.

Поступила в редколлегию 12.06.85