УДК 517.432

А. В. КУЖЕЛЬ

САМОСОПРЯЖЕННЫЕ И $\mathcal{J}$-САМОСОПРЯЖЕННЫЕ ДИЛАТАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

При изучении неунитарных и несамосопряженных операторов полезными оказываются развиваемые в последние десятилетия метод характеристических функций, и имеющий с ним много точек соприкосновения метод дилатаций (т. е. метод «растяжения» заданного оператора до унитарного или самосопряженного). При этом теория унитарных дилатаций сжатия довольно полно разработана в ряде работ Б. С.-Надя и Ч. Фояша [1, 2]. Затем Ч. Дэвис [3], опираясь на метод С.-Надя—Фояша, построил и в какой-то мере исследовал $\mathcal{J}$-унитарную дилатацию произвольного замкнутого плотно заданного оператора. Однако в отношении результатов работы [3] можно сделать следующее замечание. Если оператор T (или T^{-1}) не является сжатием, то соответствующая дилатация строится в пространстве с индефинитной метрикой ($\mathcal{J}$-унитарная дилатация). При этом даже в случае самосопряженного (или диссипативного) оператора T рассматриваемый метод приводит к $\mathcal{J}$-унитарной дилатации. В то же время простейшие соображения говорят о том, что в случае диссипативных операторов должна существовать самосопряженная дилатация. Для этого достаточно воспользоваться преобразованием Кэли.

Таким образом, в случае диссипативных операторов задача сводится к явному построению соответствующей самосопряженной дилатации. Для некоторых конкретных операторов и в общем случае для операторов с $D(A^*) = D(A)$ (при некотором ограничении на мнимую часть оператора A) эта задача была решена Б. С. Павловым [4].

В настоящей статье строится самосопряженная дилатация произвольного замкнутого диссипативного оператора с плотной областью определения, а также $\mathcal{J}$-самосопряженная дилатация произвольного замкнутого плотно определенного оператора*. Предполагается лишь, что множество регулярных точек $\rho(A)$ рассматриваемого оператора A не является пустым.

Метод построения указанных дилатаций в идейном отношении близок методу Б. С.-Надя — Ч. Фояша [1, 2].

Отметим, что в [5] симметрическая и самосопряженная дилатации диссипативного оператора построены другим способом, в основу которого положены идеи Б. С. Павлова.

1. Дилатация линейных операторов. В случае ограниченных операторов оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\tilde{H}$, называется *дилатацией* [1, 2] оператора A, который действует в гильберговом пространстве H, если H — подпространство пространства $\tilde{H}$ и $A^n = PB^n|_H$ $(\forall n \in N)$ **(1)**, где P — оператор ортогонального проектирования из $\tilde{H}$ на H.

Условие (1) эквивалентно любому из следующих: $(A^n f, g) = (B^n f, g)\,(\forall \{fg\} \subset H)$ **(2)**; $(A - \lambda I)^{-1} = P(B - \lambda I)^{-1}|_H$ **(3)** (для некоторой окрестности фиксированной точки $\lambda_0 \in \rho(A) \cap \rho(B)$); $R^n \times (A, \alpha) = PR^n(B, \alpha)|_H\,(\forall n \in N)$ **(4)**, где α — некоторая фиксированная точка из $\rho(A) \cap \rho(B), R(T, \alpha) = (T - \alpha I)^{-1}$.

---

* В п. 4 приведена также $\mathcal{J}$-унитарная дилатация произвольного ограниченного оператора, которая значительно проще $\mathcal{J}$-унитарной дилатации, предложенной в [3].

Действительно, эквивалентность (1), (2) очевидна. Чтобы убедиться в эквивалентности (1), (3) или (1), (4), достаточно воспользоваться соответственно разложениями: $R_\lambda = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{k+1}} T^k$ $(R_\lambda = (T-\lambda I)^{-1}, |\lambda| > \|T\|)$; $R_\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda-\alpha)^k R_\alpha^{k+1}$ $(|\lambda-\alpha| < \|R_\alpha\|^{-1})$.

Условие (3) или (4) можно использовать, очевидно, при определении дилатации оператора A и в том случае, когда этот оператор неограниченный.

2. Диссипативные операторы. Оператор A называется *диссипативным*, если $\mathcal{J}m(Af, f) \geqslant 0$ $(\forall f \in D(A))$.

Если оператор A^* существует, то оператор A является диссипативным тогда и только тогда, когда диссипативным есть оператор $-A^*$.

Пусть $\rho(A) \neq \varnothing$ (для определенности предполагаем, что $-i \in \rho(A)$).

Рассмотрим самосопряженные операторы: $R = iR_{-i} - iR^*_{-i} - 2R^*_{-i}R_{-i}$, $\tilde{R} = iR_{-i} - iR^*_{-i} - 2R_{-i}R^*_{-i}$.

Нетрудно проверить, что для любых f и g из $D(A)$ $(R(A+iI)f, (A+iI)g) = i(f, Ag) - i(Af, g)$ **(5)**. При $g = f$ правая часть в (5) равна $2\mathcal{J}m(Af, f)$ и, таким образом, оператор A диссипативный тогда и только тогда, когда $R \geqslant 0$.

Аналогично устанавливается, что $(\tilde{R}(A^* - iI)f, (A^* - iI)f) = 2\mathcal{J}m(-A^*f, f) (\forall f \in D(A^*))$ и, следовательно, $\tilde{R} \geqslant 0$.

Пусть A — диссипативный оператор и $Q = \sqrt{R}$, $D = Q(A+iI)$ **(6)**.
Тогда, на основании (5), (6), $(Df, Dg) = i(f, Ag) - i(Af, g)$ $(\{f, g\} \subset D(A))$ **(7)** и, в частности, $\|Df\|^2 = 2\,\mathcal{J}m(Af, f)$.

Рассмотрим еще операторы $\tilde{Q} = \sqrt{\tilde{R}}$, $T = I - 2iR_{-i}$ $(= (A - iI)(A+iI)^{-1})$. **(8)**.
Тогда, как легко проверить, $TR = \tilde{R}T$ и, следовательно, $TQ = \tilde{Q}T$ **(9)**.
Многообразие $G_A = \{g \in D(A) | (Af, g) = (f, Ag) (\forall f \in D(A))\}$ называется *областью эрмитовости оператора* A, а оператор $A_0 = A|_{G_A}$ — *эрмитовой частью оператора* A. Пусть $g \in G_A$. Тогда при любом $f \in D(A)$ правая часть равенства (5) равна нулю. Следовательно, оператор R (а значит, и оператор Q) отображает пространство H в дефектное подпространство N_{-i} оператора A_0 $(N_\lambda = H - M_\lambda$, $M_\lambda = (A_0 - \lambda I)G_A)$. Аналогично приходим к заключению, что $\tilde{Q} : H \to N_i$.

3. Самосопряженная дилатация. Пусть A — диссипативный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H и $-i \in \rho(A)$.

Образуем гильбертово пространство $\tilde{H}$ из векторов $^*f = (\cdots, f_{-2}, f_{-1}, \boxed{f_0}, f_1, f_2, \cdots)$ с компонентами $f_0 \in H$, $f_n \in N_{-i}$, $f_{-n} \in N_i$ $(n \geqslant 1)$, где N_λ — дефектное подпространство эрмитовой части A_0 оператора A. При этом $f \in \tilde{H} \leftrightarrow \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \|f_k\|^2 < \infty$ и $(f, g) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} (f_k, g_k)$. Отождествляя вектор $(\ldots, 0, 0, \boxed{f_0}, 0, 0, \ldots)$ с f_0, получим вложение H в $\tilde{H}$. При этом оператор $Pf = f_0$ $(f = (\ldots, f_{-2}, f_{-1}, \boxed{f_0}, f_1, f_2, \cdots))$ является оператором ортогонального проектирования из $\tilde{H}$ на H.

В пространстве $\tilde{H}$ рассмотрим операторы:

$$S_n^+ f = \sum_{k=n}^{\infty} f_k - \frac{1}{2} f_n, \quad S^+ f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k, \quad S_n^- f = \sum_{k=n}^{\infty} f_{-k} - \frac{1}{2} f_{-n}, \quad S^- f = \sum_{k=1}^{\infty} f_{-k}.$$

Используя эти операторы, определим в $\tilde{H}$ оператор B:

I. $f = \left(\ldots, f_{-1}, \boxed{f_0}, f_1, \ldots\right) \in D(B)$ тогда и только тогда, когда

$$f \in D(S^+) \cap D(S^-); \quad \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} f_0 + \tilde{Q} S^- f \in D(A) \quad \textbf{(10)};$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|g_k\|^2 < \infty, \text{ где } g_0 = -if_0 + \sqrt{2}\,(A + iI)\,\varphi, \tag{11}$$

$$g_{-n} = 2iS_n^- f, \quad g_n = -2iS_n^+ f \quad (n \geqslant 1); \tag{12}$$

$$S^+ f = T^* S^- f + iD\varphi \quad (T = I - 2iR_{-i}). \tag{13}$$

II. Оператор B определяется равенством $Bf = \left(\ldots, g_{-2}, g_{-1}, \boxed{g_0}, g_1, g_2, \ldots\right)$ $(f \in D(B))$.

Теорема. *Оператор B, определяемый условиями* I *и* II, *является самосопряженной дилатацией оператора A.*

Доказательство. Докажем вначале эрмитовость оператора B. Пусть $\{f, h\} \subset D(B)$. Тогда $(Bf, h) - (f, Bh) = (g_0, h_0) - (f_0, g_0') + a + b$ **(14)**, где $a = \sum\limits_{n=1}^{\infty} [(g_{-n}, h_{-n}) - (f_{-n}, g_{-n})]$, $b = \sum\limits_{n=1}^{\infty} [(g_n, h_n) - (f_n, g_n)]$, причем компоненты g_k определяются

* Рамка обозначает, что помещенный в ней элемент расположен на нулевом месте.

соотношениями (11), (12), а векторы g'_k — аналогичными соотношениями: $g'_0=-ih_0+\sqrt{2}(A+iI)\varphi'$ $\left(\varphi'=\frac{1}{\sqrt{2}}h_0+\tilde{Q}S^-h\right)$; $g'_{-n}=2iS_n^-h$; $g'_n=-2iS_n^+h$ $(n\geqslant 1)$. Но тогда $a=2i\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}(f_{-k}, h_{-n})+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}(f_{-n}, h_{-k})\right)=2i\sum_{n,\,k=1}^{\infty}(f_{-k}, h_{-n})$, или, учитывая выражение для оператора S^-, $a=2i(S^-f, S^-h)$. Точно так же устанавливаем, что $b=-2i(S^+f, S^+h)$. Учитывая теперь соотношение (13), а также равенства

$$I-TT^*=2\tilde{Q}^2;\quad TQ=\tilde{Q}T;\quad TD=\tilde{Q}(A-iI);$$

$$\tilde{Q}S^-f=\varphi-\frac{1}{\sqrt{2}}f_0;\quad \tilde{Q}S^-h=\varphi'-\frac{1}{\sqrt{2}}h_0;$$

$$(D\varphi,\ D\varphi')=i(\varphi,\ A\varphi')-i(A\varphi,\ \varphi'),$$

получим после соответствующих преобразований $a+b=2i(f_0, h_0)-\sqrt{2}i(\varphi, h_0)-\sqrt{2}i(f_0, \varphi')+\sqrt{2}(f_0, A\varphi')-\sqrt{2}(A\varphi, h_0)$ **(15)**. С другой стороны, учитывая выражения для g_0 и g'_0, получаем: $(g_0, h_0)-(f_0, g'_0)=-2i(f_0, h_0)+\sqrt{2}(A\varphi, h_0)-\sqrt{2}(f_0, A\varphi')+\sqrt{2}i(\varphi, h_0)+\sqrt{2}i(f_0, \varphi')$ **(16)**. Но тогда на основании (14), (15) и (16) $(Bf, h)=(f, Bh)$; $(\forall\{f, h\}\subset D(B))$, и таким образом, оператор B эрмитов.

Покажем, что дефектные числа оператора B равны нулю, т. е. что B — самосопряженный оператор. Для этого достаточно показать, что уравнение $(B-\lambda I)f=h$ $(\lambda\in\{-i, i\})$ **(17)** разрешимо относительно f при любом $h\in\tilde{H}$.

Это уравнение равносильно следующему $g_k-\lambda f_k=h_k$, где g_k определяется равенствами (11), (12).

Таким образом, для нахождения f_k получаем следующую систему: $\sqrt{2}(A+iI)\varphi=(\lambda+i)f_0+h_0$ **(18)**; $2i\sum_{k=n}^{\infty}f_{-k}=(\lambda+i)f_{-n}+h_{-n}$ $(n\geqslant 1)$ **(19)**; $-2i\sum_{k=n}^{\infty}f_k=(\lambda-i)f_n+h_n$ $(h\geqslant 1)$ **(20)**. При этом последние равенства равносильны соответственно следующим: $(i+\lambda)f_{-(n+1)}+(i-\lambda)f_{-n}=h_{-n}-h_{-(n+1)}$ **(21)**; $(i-\lambda)f_{n+1}+(i+\lambda)f_n=h_{n+1}-h_n$ **(22)**. Пусть $\lambda=-i$. Тогда, на основании (21), (22) $f_{-n}=i/2(h_{-(n+1)}-h_{-n})$, $f_{n+1}=i/2(h_n-h_{n+1})$ $(n\geqslant 1)$ **(23)**. Таким образом, для нахождения вектора f необходимо найти f_0 и f_1. Из (19), (20) при $n=1$ $(\lambda=-i)$ находим $S^-f=-i/2h_{-1}$; $S^+f=f_1+i/2h_1$ **(24)**. Применяя к обеим частям равенства (18) оператор Q, получим $D\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}Qh_0$ **(25)**. Но тогда, в силу (13), (24) и (25) $f_1=-i/2T^*h_{-1}+i/\sqrt{2}Qh_0-i/2h_1$. Из равенств (10), (18) и (24) находим f_0: $f_0 = R_{-i}h_0 + i/\sqrt{2}\tilde{Q}h_{-1}$. Таким образом, при любом $h \in \tilde{H}$ решение уравнения (17) существует (при $\lambda = -i$) и определяется однозначно. При этом, учитывая выражение для f, устанавливаем, что $f \in \tilde{H}$.

Рассмотрим случай $\lambda = i$. При таком условии из (21), (22) находим $f_{-(n+1)} = i/2\,(h_{-(n+1)} - h_{-n})$; $f_n = i/2\,(h_n - h_{n+1})$ $(n \geqslant 1)$. Остается найти компоненты f_{-1} и f_0. Как и раньше, из (19), (20) при $n = 1$ $(\lambda = i)$ получаем $S^-f = f_{-1} - i/2h_{-1}$; $S^+f = i/2h_1$ **(26)**. Пусть $\psi = (A + iI)\varphi$. Тогда $T\psi = (A - iI)\varphi$ и, в силу (10), (18), $T\psi = (A + iI)_-\varphi - 2i\varphi = 1/\sqrt{2}\,h_0 - 2i\tilde{Q}S^-f$ **(27)**. На основании (13), (26) и (27) получаем систему для определения ψ и S^-f: $T^*S^-f + iQ\psi = i/2h_1$ **(28)**, $2\tilde{Q}S^-f - iT\psi = -i/\sqrt{2}h_0$ **(29)**. Умножая (28) слева на T, (29) на $\tilde{Q}$ и учитывая равенства: $2\tilde{Q}^2 = I - TT^*$; $\tilde{Q}T = TQ$, получаем, что $S^-f = i/2Th_1 - i/\sqrt{2}\,\tilde{Q}h_0$ **(30)**, после чего, на основании (26), (30) $f_{-1} = \frac{i}{2}h_{-1} - \frac{i}{\sqrt{2}}\tilde{Q}h_0 + \frac{i}{2}Th_1$.

Аналогично, применяя к обеим частям равенств (28), (29) соответственно операторы $2Q$ и T^* и учитывая то, что $2Q^2 = I - T^*T$, находим ψ: $\psi = Qh_1 + 1/\sqrt{2}\,T^*h_0$ **(31)**. А так как $\psi = (A + iI)\varphi$, то на основании (18), (31), $f_0 = R^*_{-i}h_0 - i/\sqrt{2}\,Qh_1$. Таким образом, в случае $\lambda = i$ вектор f определяется равенством (17) при любом $h \in \tilde{H}$ однозначно и, как нетрудно проверить, $f \in \tilde{H}$. Следовательно, $i \in \rho(B)$, что и доказывает самосопряженность оператора B.

Остается показать, что оператор B есть дилатация оператора A. Пусть $V(-i, \varepsilon)$ есть ε — окрестность точки $-i$, $V(-i, \varepsilon) \subset \rho(A) \cap \rho(B)$; $h_0 = \left(\ldots, 0, \boxed{h_0}, 0, \ldots\right) \in H$ и $f = (B - \lambda I)^{-1}h_0$.

Тогда имеют место соотношения (18), (21) и (22), причем в (21), (22) правые части равны нулю. Следовательно,

$$f_{-(n+1)} = \left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^n f_{-1}; \quad f_{n+1} = \left(\frac{\lambda + i}{\lambda - i}\right)^n f_1. \qquad (32)$$

А так как при $\operatorname{Im}\lambda < 0$ $\left|\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right| > 1$, то $f_{-n} = 0$ $(\forall n \in N)$. Это означает, что $S^-f = 0$, $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}f_0$ и, таким образом, на основании (18), $f_0 = (A - \lambda I)^{-1}h_0$. Но тогда $(B - \lambda I)^{-1}h_0 = \left(\ldots, 0, \boxed{(A - \lambda I)^{-1}h_0}, f_1, \frac{\lambda + i}{\lambda - i}f_1, \ldots\right)$ и, следовательно, $P(B - \lambda I)^{-1}h_0 = (A - \lambda I)^{-1}h_0$ $(\forall h_0 \in H)$, т. е. B есть самосопряженная дилатация оператора A.

Из общих соображений вытекает, что в некоторой окрестности точки i должно выполняться равенство $P(B - \lambda I)^{-1}h_0 = (A^* - \lambda I)^{-1}h_0$ $(\lambda \in V(i, \varepsilon))$ **(33)**.

Другими словами, самосопряженная дилатация B диссипативного оператора A является также дилатацией диссипативного оператора $-A^*$. Проверим это непосредственно. Если $\operatorname{Im}\lambda > 0$, то $\left|\frac{\lambda+i}{\lambda-i}\right| > 1$ и, следовательно, на основании (32), $f_n = 0$ $(\forall n \in \boldsymbol{N})$. Это означает, что $S^+f = 0$ и, в силу (13), $T^*S^-f + iQ\psi = 0$ $(\psi = (A+iI)\varphi)$ **(34)**. Кроме того, на основании (18),

$$T\psi = (A+iI)\varphi - 2i\varphi = \frac{\lambda - i}{\sqrt{2}} f_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} h_0 - 2i\tilde{Q}S^-f,$$

откуда

$$2\tilde{Q}S^-f - iT\psi = \Phi \quad \left(\Phi = \frac{i(i-\lambda)}{\sqrt{2}} f_0 - \frac{i}{\sqrt{2}} h_0\right). \tag{35}$$

Рассуждая так же, как и при решении системы (28)—(29), находим S^-f и ψ из системы (34)—(35):

$$S^-f = \frac{i(i-\lambda)}{\sqrt{2}} \tilde{Q} f_0 - \frac{i}{\sqrt{2}} \tilde{Q} h_0; \quad \psi = \frac{\lambda - i}{\sqrt{2}} T^* f_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} T^* h_0. \tag{36}$$

А так как $\psi = (A+iI)\varphi$, то, на основании (18), (36), $(\lambda - i)T^*f_0 + T^*h_0 = (\lambda + i) f_0 + h_0$. Из последнего равенства находим $f_0 = (A^* - \lambda I)^{-1} h_0$ и, таким образом, имеет место равенство (33).

В заключение отметим следующие легко проверяемые свойства построенной дилатации B.

1. Не будучи в общем случае расширением оператора A, дилатация B является расширением эрмитовой части A_0 оператора A. При этом $D(A) \cap D(B) = G_A$. В частности, если оператор A эрмитов, то B есть самосопряженное расширение оператора A (с выходом из пространства). Следовательно, в таком случае мы получаем еще один способ построения самосопряженных расширений максимальных эрмитовых операторов.

2. $\sigma_p(B) \subset \sigma_p(A)$ и если $\bar{G}_A = H$, то $\sigma_p(A) \subset \sigma_p(PB)$.

3. Кроме рассмотренной самосопряженной дилатации могут быть построены и другие. В частности, проводя аналогичные рассуждения, можно показать, что если $-i\gamma/2 \in \rho(A)$ $(\gamma > 0)$, то самосопряженной дилатацией оператора A является оператор Γ, определяемый в пространстве H так же, как и оператор B, при условии, что в (10), (11) и (12) двойка заменена на γ.

4. J-унитарные и J-самосопряженные дилатации. Здесь мы укажем способ построения J-унитарной дилатации произвольного ограниченного оператора, существенно отличающейся от дилатации, построенной в [3], а также способ построения J-самосопряженной дилатации произвольного замкнутого плотно заданного оператора A с $\rho(A) \neq \varnothing$

Пусть T — линейный ограниченный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, $D = |I - T^*T|^{\frac{1}{2}}$; $D_* = |I - TT^*|^{\frac{1}{2}}$; $V = \operatorname{sign}(I - T^*T)$; $V_* = \operatorname{sign}(I - TT^*)$; $H_+ = \overline{DH}$, $H_- = \overline{D_*H}$.

Как и в п. 3, образуем гильбертово пространство $\tilde{H}$ из векторов $f = \left(\ldots, f_{-2}, f_{-1}, \boxed{f_0}, f_1, f_2, \ldots\right)$ (37), где $f_0 \in H$, $f_n \in H_+$, $f_{-n} \in H_-$ $(n \geqslant 1)$ и рассмотрим в $\tilde{H}$ оператор J: $Jf = \left(\ldots, V_* f_{-2}, V_* f_{-1}, \boxed{f_0}, Vf_1, Vf_2, \ldots\right)$. Легко видеть, что $J^* = J$ и $J^2 = I$. С помощью оператора J зададим в $\tilde{H}$ новое скалярное произведение: $[f, g] = (Jf, g)$ и будем в обычном смысле говорить о J-метрике, J-унитарности и J-самосопряженности.

Рассмотрим в $\tilde{H}$ линейные операторы u и u':

$$uf = \left(\ldots, f_{-3}, f_{-2}, \boxed{V_* D_* f_{-1} + T f_0}, -T^* f_{-1} + D f_0, f_1, f_2, \ldots\right);$$

$$u' f = \left(\ldots, f_{-2}, f_{-1}, D_* f_0 - T f_1, \boxed{T^* f_0 + V D f_1}, f_2, f_3, \ldots\right).$$

Используем соотношения: $DV = VD$; $D_* V_* = V_* D_*$; $TD = D_* T$; $TV = V_* T$ и рассуждая так же, как в [1] или в [2], устанавливаем, что $uu' = u'u = I$ и, таким образом, $u' = u^{-1}$. Кроме того, для любых f и g из $\tilde{H}$ $[uf, ug] = [f, g]$. Следовательно, оператор u является J-унитарным. При этом, как легко проверить, $T^n = Pu^n|_H$ $(\forall n \in N)$, где P — оператор ортогонального проектирования из $\tilde{H}$ в H. Следовательно, u есть J-унитарная дилатация оператора T. Аналогично устанавливаем, что оператор u' является J-унитарной дилатацией оператора T^*. Минимальность дилатации u (или u') определяется и доказывается так же, как и в [1, 2].

В том случае, когда T — сжатие, операторы V и V_* являются единичными в H_+ и H_- соответственно, и, таким образом, предыдущие утверждения совпадают с аналогичными утверждениями в [1, 2] (при этом оператор J является единичным и, следовательно, введенная J-метрика совпадает с исходной).

Пусть теперь A — линейный замкнутый плотно заданный оператор, действующий в H и $\rho(A) \neq \varnothing$. Как и прежде, предполагаем, что $-i \in \rho(A)$. Пусть операторы R и $\tilde{R}$ определяются так же, как и в п. 2. Рассмотрим операторы: $Q = \sqrt{|R|}$; $\tilde{Q} = \sqrt{|\tilde{R}|}$; $V = \operatorname{sign} R$; $\tilde{V} = \operatorname{sign} \tilde{R}$; $D = VQ(A + iI)$ (38). Пространство $\tilde{H}$ определяем так же, как и в п. 3. Затем в пространстве $\tilde{H}$ определяем оператор B аналогично тому, как это делается в п 3, имея в виду, что операторы Q, $\tilde{Q}$ и D определяются соотношениями (38). Если при этом J-метрика определяется скалярным произведением $[f, g] = (Jf, g)$, где $Jf = \left(\ldots, \tilde{V} f_{-2}, \tilde{V} f_{-1}, \boxed{f_0}, Vf_1, Vf_2, \ldots\right)$, то рассуждая так же, как и в п. 3, устанавливаем, что оператор B является J-самосопряженным. Кроме того, для любого λ из некоторой окрестности точки $-i$ $(A - \lambda I)^{-1} = P(B - \lambda I)^{-1}|_H$ и, таким образом, оператор B является J-самосопряженной дилатацией оператора A. В случае, когда оператор A диссипативный, операторы V и $\tilde{V}$ являются единичными на соответствующих подпространствах, и мы приходим к результатам из п. 3.

Список литературы: 1. *Секефальви-Надь Б., Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1970. —431 с. 2. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу.— М.: Мир, 1979.— 587 с. 3. *Davis Ch.* $\mathcal{J}$-unitary dilatation of a general operators. — Acta Sci. math., 1970, 31, № 1—2, p. 75—86. 4. *Павлов Б. С.* Самосопряженная дилатация диссипативного оператора Шредингера и разложение по его собственным функциям. — Мат. сб., 1977, 102 (144), № 4, с. 511—536. 5. *Кудряшов Ю. Л.* Симметрические и самосопряженные дилатации диссипативных операторов. (См. статью в наст. сб.).

Поступила в редколлегию 07.04.80.