УДК 517.53

С. В. ЛЬВОВА

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ КРАТНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

1. В работе [1] мы рассматривали задачу простой интерполяции в полуплоскости в данной работе, примыкающей к [1], исследовали задачу кратной интерполяции в полуплоскости.

Обозначим через $\|z\|$ диаметр окружности, которая касается вещественной оси в начале координат и которой принадлежит точка z. Таким образом, $z = |z| e^{i\varphi} = \|z\| e^{i\varphi} \sin\varphi$, $0 < \varphi < \pi$. Далее обозначим $M(r) = \max\limits_{0<\varphi<\pi} |f(re^{i\varphi}\sin\varphi)|$. Всюду под порядком и типом функции $f(z)$ будем понимать порядок и тип функции $\ln M(r)$.

Обозначим через $[\rho, \infty)^+$ класс голоморфных в полуплоскости C^+ функций не выше, чем нормального типа при порядке ρ. Множество $D = \{\lambda_k, q_k\}$ точек $\{\lambda_k\} = \Lambda$, $\lambda_k \in C^+$ с кратностями $q_k \in N$ будем называть дивизором.

Дивизор $\{\lambda_k, q_k\}$ называется интерполяционным в классе $[\rho, \infty)^+$, если для любой последовательности комплексных чисел $\{a_{k,j}\}$, $j = 1 \ldots q_k$, $k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющей условию

$$\varlimsup_{k\to\infty} \|\lambda_k\|^{-\rho} \cdot \ln \max_{1\leq j\leq q_k} \frac{|a_{k,j}|}{(j-1)!} < \infty, \tag{1}$$

найдется функция $F(z)$ класса $[\rho, \infty)^+$ такая, что $F^{(j-1)}(\lambda_k) = a_{k,j}$, $j = 1, \ldots q_k$, $k = 1, 2, \ldots$

Обозначим через $n(r, D)$ число точек D с учетом кратности в круге $\|z\| = r$. Предположим, что точка нуль не принадлежит замыканию множества $\{\lambda_k\}$ и

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{n(r, D)}{r^\rho} < \infty. \tag{2}$$

Тогда функция $\pi(z)=\prod\limits_{\lambda_k\in D}\{E_p(z, \lambda_k)\}^{q_k}$, где $E_p(z, \lambda_k)=\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right)\times$ $\times\left(1-\frac{z}{\bar{\lambda}_k}\right)^{-1}\cdot\exp\left(\sum\limits_{i=1}^{p}\frac{1}{i}\left(\frac{z\left(\frac{1}{\lambda_k}-\frac{1}{\bar{\lambda}_k}\right)}{1-\frac{z}{\lambda_k}}\right)^i\right)$ корректно определена в C^+ (см. [2]) и для нее справедлива оценка $\ln|\pi(z)|\leqslant A_1\|z\|^\rho$. * В работе получен следующий результат.

Теорема. *Для того чтобы дивизор D, удовлетворяющий условию (1), был интерполяционным в классе* $[\rho, \infty)^+$ $(\rho>1)$, *необходимо и достаточно выполнения условия (2) и условия*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\|\lambda_k\|^{-\rho}\cdot\ln\frac{q_k!}{|\pi^{(q_k)}(\lambda_k)|}<\infty. \tag{3}$$

Доказательство этой теоремы существенно опирается на следующее утверждение из [3].

Теорема А. *Пусть* G — *открытое множество в* $\boldsymbol{C}$, $\varphi(z)$ — *субгармоническая функция в* G, $\gamma(z)$ — *измеримая функция, удовлетворяющая условию* $\int\limits_G|\gamma|^2\cdot\exp(-\varphi)\,d\lambda<\infty$. *Тогда существует функция* $\beta(z)$, *удовлетворяющая условию*

$$\int\limits_G|\beta|^2\exp(-\varphi)(1+|z|^2)^{-2}\,d\lambda<2^{-1}\cdot M,$$

и такая, что $\frac{\partial\beta}{\partial\bar{z}}=\gamma$ (в смысле распределений). Если $\gamma(z)\in C^\infty(G)$, то и $\beta(z)\in C^\infty(G)$.

2. *Доказательство достаточности.* Приведем сначала несколько вспомогательных утверждений:

1) Функция $\|z\|^\rho$ при $\rho>0$ является субгармонической в C^+ (см. [1]).

2) $\forall z:|z-s|\leqslant{}^1/_2\operatorname{Im}s,\ s\in C^+$ справедливо неравенство (см. [1]):

$$2^{-1}\cdot\|s\|<\|z\|<2\cdot\|s\|. \tag{2.1}$$

Лемма 2.1 [1, 3]. *Пусть* $g(z)$ — *функция, аналитическая в круге* $|z|<r$ *и пусть* $g(z)$ *имеет в точке* $z=0$ *нуль кратности* p, *а в точке* $z=a$ *нуль кратности* q, $0<|a|<r$. *Тогда*

$$|a|^q\geqslant\frac{|g^{(p)}(0)|}{p!}\cdot r^{p+q}\cdot\{\max_{|z|<r}|g(z)|\}^{-1}. \tag{2.2}$$

* Здесь и далее A_i — константы.

Теперь введем обозначения: $d_k = \min\{^1/_2 \operatorname{Im}\lambda_k,\ \operatorname{dist}(\lambda_k, \{\lambda_j\}/\lambda_k)\}$; $\gamma_k = q_k!\,\{\pi^{(q_k)}(\lambda_k)\}^{-1}$; $m_k(r) = \sup\{[|\gamma_i|^{-1}(\operatorname{Im}\lambda_i/2)^{q_i}] : |\lambda_i - \lambda_k| < r\}$; $M_k = \max\limits_{|z-\lambda_k|<d_k} |\pi(z)|$;

$$B_k(z) = \sum_{j=1}^{q_k} \frac{a_{k,j}}{(j-1)!}(z-\lambda_k)^{j-1}; \tag{2.3}$$

$$a_k = \max \frac{|a_{k,j}|}{(j-1)!};$$

$$l_k(r) = \sup\{|B_k(z)| : |z-\lambda_k| \leqslant r\}.$$

Лемма 2.2. *Для z таких, что $|z-\lambda_k| \in \left[\frac{d_k}{4}, \frac{d_k}{2}\right]$ справедлива оценка*

$$|\pi(z)| \geqslant (1/4)^{q_k} \cdot d_k^{3q_k} \cdot |\gamma_k|^{-3} \cdot M_k^{-2}. \tag{2.4}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi_1(z) = d_k^{-q_k} \times \times z^{-q_k}\pi(\lambda_k + d_k z)\cdot\gamma_k$. Используя неравенство Каратеодори и оценивая максимум функции $|\varphi_1(z)|$ в круге $|z| \leqslant 1$, получаем неравенство (2.4).

Заметим, что в силу того, что точка нуль не принадлежит замыканию множества Λ, существует $\delta > 0$ такое, что $|\lambda_k| \geqslant \delta$, $k = 1, 2, \ldots$ и функция $\pi(z)$ голоморфна в круге $|z| < \delta$. Обозначим $G = \boldsymbol{C}^+ \cup \{z : |z| < \delta\}$.

Лемма 2.3. *Пусть $d_k = \operatorname{dist}(\lambda_k, \{\lambda_j\}/\lambda_k)$, тогда $\forall k$ справедливо неравенство*

$$d_k^{q_k} \geqslant \exp(-A_2\|\lambda_k\|^\rho)\cdot\left(\frac{\delta^2}{4\|\lambda_k\|}\right)^{q_k} \tag{2.5}$$

Доказательство. Полагая $a = \lambda_k - \lambda_i$, применим лемму 2.1 к функции $g(z) = \pi(\lambda_i + z)$ в круге $r = 1/2\operatorname{Im}\lambda_i$. Учитывая рост функции $\pi(z)$ и неравенство (2.1), получим, что

$$d_k^{q_k} \geqslant \frac{|\pi^{(q_i)}(\lambda_i)|}{q_i!}\cdot(1/2\operatorname{Im}\lambda_i)^{q_i+q_k}\cdot\exp(-2^\rho\cdot A_1\|\lambda_i\|^\rho).$$

Отсюда ввиду (2) и (3) и того, что, по предположению леммы, $\operatorname{Im}\lambda_i \geqslant 1/2\operatorname{Im}\lambda_k = \frac{1}{2}\frac{|\lambda_k|^2}{\|\lambda_k\|} \geqslant \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{\|\lambda_k\|}$, а для величины $\|\lambda_i\|$ справедливо неравенство (2.1), следует неравенство (2.5).

Определим функции $\chi_k(z) \in C^\infty(\boldsymbol{C}^+)$ так, чтобы $\chi_k(z) \in [0, 1]$, $\forall z \in \boldsymbol{C}^+$:

$$\chi_k(z) = 1 \text{ при } |z-\lambda_k| \leqslant \frac{d_k}{4};\ \chi_k(z) = 0 \text{ при } |z-\lambda_k| \geqslant \frac{d_k}{2};$$

$$\frac{\partial\chi_k}{\partial\bar z} \leqslant A_3\cdot d_k^{-1}. \tag{2.6}$$

Положим

$$F(z)=\sum_k \chi_k(z)\cdot B_k(z)-\beta(z)\cdot\pi(z), \tag{2.7}$$

где $\pi(z)$ — каноническое произведение, построенное по дивизору D, а функция $\beta(z)$ будет далее выбрана так, чтобы функция $F(z)$ была голоморфна в области G и имела нужный рост.

Рассмотрим уравнение $\bar\partial\beta=\pi^{-1}\cdot\sum_k\bar\partial\chi_k\cdot B_k=\alpha(z)$. В сумме $\sum_k\bar\partial\chi_k\cdot B_k$ при $|z-\lambda_k|\in\left[\frac{d_k}{4},\ \frac{d_k}{2}\right]$ лишь одно слагаемое отлично от нуля, поэтому при таких z имеем $|\alpha(z)|\leqslant|\pi(z)|^{-1}\,\partial\chi_k|\,\partial\chi_k|\cdot|B_k|$.

Отсюда, используя оценки (2.4), (2.6), (2.3), оценку роста функции $\pi(z)$, неравенства (1), (2), (3) и (2.1), получаем

$$|\alpha(z)|\leqslant c_1\cdot\exp(A_4\cdot\|z\|^\rho). \tag{2.8}$$

Далее, так же, как и выше, можно показать, что из неравенств (2.1) и (2.3) следует, что $\forall z:|z-\lambda_k|\leqslant d_k$ выполняется неравенство

$$\Big|\sum_k\chi_k(z)\cdot B_k(z)\Big|\leqslant\exp(A_5\|z\|^\rho). \tag{2.9}$$

Выберем теперь функцию $\varphi(z)$, так, чтобы выполнялось условие $\int\limits_G|\alpha|^2\cdot\exp(-\varphi)\,d\lambda<\infty$. Поскольку $\alpha(z)=0$ при $|z|<\delta$, то

$$\int\limits_G|\alpha|^2\exp(-\varphi(z))\,d\lambda=\int\limits_{C^+\setminus\{|z|<\delta\}}|\alpha|^2\cdot\exp(-\varphi(z))\,d\lambda.$$

Для $|z|>\delta$ положим $\varphi(z)=D_1\|z\|^\rho$, где $D_1>4(A_4+A_5)$, а в круге $|z|\leqslant\delta$ определим $\varphi(z)$ произвольно, лишь бы функция $\varphi(z)$ была субгармонична и непрерывна в G. Нетрудно видеть, что при таком выборе функции $\varphi(z)$ условия теоремы A выполнены и, следовательно, существует функция $\beta(z)\in C^\infty(G)$ такая, что $\bar\partial\beta=\alpha$ и $\int\limits_G|\beta|^2\cdot\exp(-\varphi(z))(1+|z|^2)^{-2}\,d\lambda<\infty$.

Тем самым мы показали, что функция $F(z)$ голоморфна в области G. Покажем, что функция $F(z)$ имеет нужный рост. В силу голоморфности $F(z)$ имеем

$$|F(z)|^2\leqslant\frac{4}{\pi(\operatorname{Im}z)^2}\int\limits_{|\zeta-z|<\operatorname{Im}z/2}|F(\zeta)|^2\,d\lambda\leqslant\frac{4}{\pi(\operatorname{Im}z)^2}\times$$

$$\times\exp\{\max_{|\zeta-z|<\operatorname{Im}z/2}|\psi(z)|\}\cdot\int\limits_{|\zeta-z|<\operatorname{Im}z/2}|F(\zeta)|^2\cdot\exp(-\varphi(\zeta))\,d\zeta.$$

Отсюда, положив $\psi(\zeta) = 2\ln(1 + |\zeta|^2 + 2D_1 \|\zeta\|^\rho$ и проведя стандартные оценки, получаем

$$|F(z)|^2 \leqslant C^2 (\operatorname{Im} z)^{-2} \cdot \exp(A_6 \cdot 2^\rho \cdot \|z\|^\rho).$$

Далее, учитывая, что $\operatorname{Im} z > \frac{\delta^2}{4\|z\|}$ при $z \in \boldsymbol{C}^+$, $|z| > \frac{\delta}{2}$, а при $z \in \boldsymbol{C}^+$, $z| \leqslant \frac{\delta}{2}$, $F(z)$ голоморфна в области G, получаем: функция $F(z)$ принадлежит классу $[\rho, \infty)^+$.

3. Доказательство необходимости. Доказательство проводим методом от «противного».

Пусть D — интерполяционный дивизор, но условие (3) не выполнено, т. е. существует подпоследовательность $\{\gamma_l\} = \{\lambda_{k_l}\} \subset \Lambda$ такая, что

$$\varlimsup_{l \to \infty} \|\gamma_l\|^{-\rho} \cdot \ln \frac{q_l'!}{|\pi^{q_l'}(\gamma_j)|} = \infty, \tag{3.1}$$

где q_l' — кратность γ_l.

Пусть функция $F(z)$ такова, что $ak_l q_l' = q_l'!$ и $a_{k,j} = 0$ при $\lambda_k \bar{e} \{\gamma_l\}$ или $\lambda_k \in \{\gamma_l\}$, но $j < q_k$. Считаем, не нарушая общности,

$$\|\gamma_1\| = 1, \ \|\gamma_{l+1}\| < 4\|\gamma_l\|. \tag{3.2}$$

Положим

$$\Omega(z) = \pi_0(z) \cdot \pi^{-1}(z) \cdot F(z), \tag{3.3}$$

где $\pi(z)$ — каноническое произведение, построенное по корням $\{\lambda_k, q_k\}$, а $\pi_0(z) = \prod\limits_{\gamma_l} \left[1 - \frac{z}{\gamma_l}\right] \cdot \left[1 - \frac{z}{\gamma_j}\right]^{-1}$. В силу леммы 4 [1] имеем

$$\ln|\Omega(z)| \leqslant A_7 \|z\|^\rho. \tag{3.4}$$

Далее, из (3.3) получаем, учитывая, что $F^{(q_l'-1)}(\gamma_l) = q_l'!$

$$\Omega(\gamma_l) = \pi_0'(\gamma_l) \cdot [\pi^{(q_l')}(\lambda_l)]^{-1} \cdot q_l'! \tag{3.5}$$

Так же, как и в ([1] с. 16]), получаем

$$|\pi_0'(\gamma_l)| \geqslant \text{const} \cdot (\operatorname{Im} \gamma_l)^{-1}.$$

И далее, из (3.4) и (3.5) имеем

$$A_7 \cdot \|\gamma_l\|^\rho \geqslant \ln|\Omega(\gamma_l)| \geqslant \text{const} \ln\left[|\pi^{(q_l')}(\gamma_l)|^{-1} \cdot \frac{q_l'!}{\operatorname{Im} \gamma_l}\right].$$

Отсюда, учитывая, что $\operatorname{Im}\gamma_l \leqslant \|\gamma_l\|$, получаем

$$\mathrm{const} \geqslant \|\gamma_l\|^{-\rho} \cdot \ln \frac{q_l'!}{|\pi^{(q_l')}(\gamma_l)|} + \|\gamma_l\|^{-\rho} \cdot (\ln \|\gamma_l\|)^{-1},$$

что противоречит предположению (3.1). Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Львова С. В.* Об одной задаче интерполяции в полуплоскости. М., 1982.— С. 20. Депон. в ВИНИТИ, 1982, № 4496—82, с. 20. 2. *Львова С. В.* Об одном аналоге канонического произведения Вейерштрасса в полуплоскости.— М., 1982.— С. 13. Деп. в ВИНИТИ 1982, № 1417. 3. *Berenstein C. A., Taylor B. A.* A New look at Interpolation Theory for entire Functions of One Variable.— 1979.— 33.— P. 109—143. 4. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.— М.: Гостехтеоретиздат, 1956.—632 с.

Поступила в редколлегию 11.12.84