УДК 517.948 + 512.13

Л. П. КУЧКО

НЕТРИВИАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОРОДНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работе изучается вопрос о локальной нетривиальной C^∞ — разрешимости линейного однородного уравнения:

$$\varphi(Fx) - Q(x)\varphi(x) = 0, \tag{1}$$

где $Q: \boldsymbol{R}^1 \to \boldsymbol{C}^{m^2}$ — заданное C^∞-отображение, а $F: (\boldsymbol{R}^1, 0) \to (\boldsymbol{R}^1, 0)$ — конечно-определенный (относительно сопряженности) C^∞ — диффеоморфизм. Эта работа примыкает к работе [1], в которой изучался вопрос о локальной C^∞-разрешимости соответствующего неоднородного уравнения.

Конечная определенность диффеоморфизма F означает, что F удовлетворяет одному из условий: 1) F гиперболичен ($|F'(0)| \neq 1$); 2) F — негиперболичен ($|F'(0)| = 1$) и $F^2(x) = x + f(x)$, $\hat{f} \neq 0$. (Здесь $\hat{f}$ — формальный ряд Тейлора в нуле).

Теорема 1. *Пусть F — локальный конечно-определенный C^∞-диффеоморфизм. Любое нетривиальное формальное решение уравнения (1) восстанавливается до его локального C^∞-решения.*

Заметим, что уравнение (1) не имеет нетривиальных формальных решений при отсутствии резонансных соотношений, т. е. при выполнении условий: $\lambda^s = q_i$, $s = 0, 1, 2, \ldots$; $i = 1, 2, \ldots, m$. (Здесь $\lambda = F'(0)$; $q_1, \ldots, q_m$ — собственные значения матрицы $Q(0)$).

Из теоремы 1 следует, что если уравнение (1) не имеет нетривиальных формальных решений, то задача сводится к существованию плоского в нуле локального нетривиального решения уравнения (1).

При выяснении условий существования плоского в нуле локального нетривиального C^∞-решения уравнения (1), а также при доказательстве разрешимости соответствующего неоднородного уравнения используются леммы о нормализации матрицы $Q(x)$.

Лемма 1. *Пусть F — локальный конечно-определенный C^∞-диффеоморфизм. Существует C^∞-преобразование $\varphi(x) = T(x)\tilde{\varphi}(x)$, приводящее уравнение (1) к уравнению того же вида с блочно-треугольной матрицей $\tilde{Q}(x) = (T(Fx))^{-1} Q(x) T(x)$ с диагональными блоками $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$, где матрица $Q_1(0)$ невырождена, а матрица $Q_2(0)$ нильпотентна.*

Лемма 1 сводит изучение вопроса о нетривиальной разрешимости уравнения (1) к рассмотрению двух уравнений вида (1) с невырожденной в нуле и нильпотентной в нуле матрицей $Q(x)$.

Теорема 2. *Пусть F — локальный гиперболический C^∞-диффеоморфизм. Если матрица $Q(0)$ невырождена, то уравнение (1) не имеет плоских в нуле локальных нетривиальных C^∞-решений. Если же матрица $Q(0)$ нильпотентна,* а $\det Q(x)$ — *неплоская в нуле функция, то для существования плоского в нуле локального нетривиального C^∞-решения уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы $|F'(0)|<1$.*

В негиперболической ситуации при невырожденной в нуле матрице $Q(x)$ требуется дополнительная нормализация $Q(x)$. Заметим вначале, что если $F'(0)=-1$, то уравнение (1) имеет локальное нетривиальное плоское в нуле C^∞-решение тогда и только тогда, когда уравнение $\varphi(F^2x)-Q(Fx)Q(x)\varphi(x)=0$ имеет локальное нетривиальное C^∞-решение, плоское в нуле. Поэтому в негиперболической ситуации будем рассматривать только случай $F'(0)=1$. Заметим также, что поскольку мы ищем плоское в нуле решение уравнения (1), достаточно отдельно рассматривать это уравнение в правой и левой полуокрестностях начала координат.

Лемма 2. *Пусть $F(x)=x+\alpha x^{k+1}+\cdots$, $\alpha\neq 0$,* $\det Q(0)\neq 0$, $x\geqslant 0$. *Существует допустимое преобразование $\varphi(x)=T(x)\tilde{\varphi}(x)$, приводящее уравнение (1) к уравнению того же вида с треугольной матрицей $\tilde{Q}(x)=(T(Fx))^{-1}Q(x)T(x)$.*

Под допустимым преобразованием понимается такое преобразование $T(x)$, которое становится гладким после замены $x\to x^p$ и умножения на x^r с некоторыми $p,\ r\in R$ (то же предполагается относительно обратной матрицы $T^{-1}(x)$). Такое преобразование является изоморфизмом пространства плоских в нуле C^∞-отображений.

Лемма 2 сводит изучение вопроса о нетривиальной разрешимости уравнения (1) в негиперболическом случае при $\det Q(0)\neq 0$ к рассмотрению одномерной ситуации ($m=1$).

Теорема 3. *Пусть $F(x)=x+\alpha x^{k+1}+\cdots$, $\alpha\neq 0$.* I. *Если $m=1$* и *$|Q(x)|=q+\beta x^l+\cdots$, $q\neq 0$, $\beta\neq 0$, $l\leqslant\infty$, то для существования плоского в нуле локального нетривиального C^∞-решения уравнения (1) необходимо и достаточно выполнения одного из следующих условий:* 1) *$q\neq 1$, k нечетно*; 2) *$q\neq 1$, k четно,* $\alpha\ln q>0$; 3) $q=1$, $l<k$, $\alpha\beta>0$; 4) $q=1$, $l<k$, $\alpha\beta<0$, $l-k\equiv 1 \pmod 2$. II. *Если матрица $Q(0)$ нильпотентна и* $\det Q(x)$ — *неплоская в нуле функция, то для существования плоского в нуле локального нетривиального C^∞-решения уравнения (1) необходимо и достаточно выполнения одного из следующих условий:* 1) *k — нечетно;* 2) *k — четно, $\alpha<0$.*

Доказательство теоремы 1. Пусть $\hat{\varphi}$ — нетривиальное формальное решение уравнения (1), а φ_0 — локальное C^∞-отображение с рядом Тейлора $\hat{\varphi}$. Будем искать решение φ уравнения (1) в виде $\varphi_0+\psi$, где $\hat{\psi}=0$. Для ψ получим уравнение

$$\psi(Fx)-Q(x)\psi(x)=\gamma(x), \tag{2}$$

где $\gamma(x) = -\varphi_0(Fx) + Q(x)\varphi_0(x)$ — плоское в нуле C^∞-отображение. Разрешимость уравнения (2) доказана в [1] при невырожденной в нуле матрице $Q(x)$ (при этом в негиперболическом случае предполагалось, что матрица $Q(x)$ треугольна). Методами, аналогичными изложенным в [1], доказывается разрешимость уравнения (2) в случае, если матрица $Q(0)$ нильпотентна. Учитывая этот факт, а также леммы 1, 2, получаем разрешимость уравнения (2) при любой матрице $Q(x)$. Тогда отображение $\varphi = \varphi_0 + \psi$ является локальным C^∞-решением уравнения (1), ряд Тейлора в нуле которого равен $\hat{\varphi}(\hat{\varphi} \neq 0)$.

Доказательство теоремы 2. Предположим вначале, что матрица $Q(0)$ невырождена. Покажем, что уравнение (1) не имеет плоского в нуле локального нетривиального C^∞-решения. Пусть $|F'(0)| > 1$, а $\varphi(x)$ — плоское в нуле C^∞-решение уравнения (1). Выберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$|F^{-1}x| \leqslant \tilde{\lambda}|x|, \quad \tilde{\lambda} < 1, \quad |x| \leqslant \delta. \tag{3}$$

Положим $m = \max\limits_{|x|<\delta} \|Q(x)\|$. Уравнение (1) запишем в виде

$$\varphi(x) = Q(F^{-1}x)\,\varphi(F^{-1}x). \tag{4}$$

Выберем ν_0 так, чтобы $m\tilde{\lambda}^{\nu_0} = \tilde{\tilde{\lambda}} < 1$. Поскольку $\varphi(x)$ — плоское в нуле, $\|\varphi(x)\| \leqslant C_{\nu_0}|x|^{\nu_0}$ при некотором $C_{\nu_0} > 0$. Итерируя уравнение (4) и учитывая (3), получаем

$$\|\varphi(x)\| \leqslant \prod_{i=1}^{n} \|Q(F^{-i}x)\| \cdot \|\varphi(F^{-n}x)\| \leqslant m^n C_{\nu_0} \tilde{\lambda}^{n\nu_0} |x|^{\nu_0}, \quad |x| \leqslant \delta.$$

В силу выбора ν_0 правая часть полученного неравенства стремится к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, любое плоское в нуле C^∞-решение уравнения (1) тривиально.

Если $|F'(0)| < 1$, то задача сводится к предыдущей преобразованием уравнения (1) к виду $\varphi(x) = Q^{-1}(x)\,\varphi(Fx)$.

Пусть теперь матрица $Q(0)$ нильпотентна. При $|F'(0)| > 1$ доказательство отсутствия плоского в нуле нетривиального C^∞-решения уравнения (1) проводится аналогично предыдущему.

Предположим теперь, что $0 < F'(0) < 1$, а матрица $Q(0) = 0$. Поскольку $\det Q(x)$ — неплоская в нуле функция, существует точка $x_0 > 0$, такая, что матрицы $Q(x_i)$, где $x_i = F^i x_0$, невырождены для всех целых неотрицательных i. Зафиксируем произвольный вектор $y_0 \neq 0$ и положим $y_n = \prod\limits_{i=0}^{n-1} Q(x_i)\,y_0$. Построим плоское в нуле C^∞-отображение $\varphi_0(x)$, удовлетворяющее условиям $\varphi_0(x_n) = y_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. С этой целью положим

$$\zeta_n(x) = \begin{cases} \exp\left\{-\dfrac{(x - x_n)^2}{(x_{n-1} - x)(x - x_{n+1})}\right\}, & x \in (x_{n+1}, x_{n-1}), \\ 0, & x \bar{\in} (x_{n+1}, x_{n-1}). \end{cases} \tag{5}$$

Тогда отображение $\varphi_0(x) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n \zeta_n(x)$ обладает нужными свойствами. В самом деле, $|Fx| \leqslant \tilde{\lambda}|x|$ при некотором $\tilde{\lambda} < 1$ и достаточно малых x. Поэтому $x_i \leqslant \tilde{\lambda}^i x_0$. Поскольку $Q(0) = 0$, $\|Q(x)\| \leqslant A|x|$ при некотором $A > 0$. Отсюда $\|y_n\| \leqslant B^n \tilde{\lambda}^{n^2}$ при некотором $B > 0$. Далее, $(x_{n-1} - x_{n+1}) \geqslant D\tilde{\tilde{\lambda}}^n$ и $|\zeta_n^{(s)}(x)| \leqslant C_s(x_{n-1} - x_{n+1})^{-\nu_s}$, $s = 1, 2, \ldots$, при некоторых $\tilde{\tilde{\lambda}}$, D, C_s, $\nu_s > 0$. Из этих оценок вытекает, что ряд, полученный из ряда $\varphi_0(x)$ его почленным дифференцированием, мажорируется сходящимся числовым рядом. Следовательно, $\varphi_0(x)$ — отображение класса C^∞. При этом, $\varphi_0(x_n) = y_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Кроме того, $\varphi_0^{(s)}(x_n) \to 0$ при $n \to \infty$ $s = 0, 1, 2, \ldots$ Значит, $\varphi_0(x)$ — плоское в нуле отображение.

Будем искать решение уравнения (1) в виде $\varphi_0 + \psi$, где ψ — плоское в нуле C^∞-отображение, равное нулю в точках $x_n = F^n x_0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Для $\psi(x)$ получим неоднородное уравнение:

$$\psi(Fx) = Q(x)\psi(x) + \tau(x), \tag{6}$$

где $\tau(x) = -\varphi_0(Fx) + Q(x)\varphi_0(x)$ — плоское в нуле C^∞-отображение, равное нулю в точках x_n, $n = 0, 1, 2 \ldots$. Методами, аналогичными изложенным в [1], доказывается существование плоского в нуле локального C^∞-решения ψ уравнения (6), равного нулю в точках $\{x_n\}$. Значит, отображение $\varphi = \varphi_0 + \psi$ — нетривиальное $(\varphi(x_n) = y_n \neq 0)$ локальное C^∞-решение уравнения (1), плоское в нуле.

Случай, когда $-1 < F'(0) < 0$, как и в негиперболической ситуации, сводится к предыдущему однократным итерированием уравнения (1).

Пусть теперь $Q(0) \neq 0$ — нильпотентная жорданова матрица. В уравнении (1) произведем допустимое преобразование $\varphi(x) = T(x)\tilde{\varphi}(x)$, где $T(x) = \operatorname{diag}\{|x|^{p_1}, |x|^{p_2}, \ldots, |x|^{p_m}\}$, $0 < |p_i - p_j| < 1$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$. Подбором показателей p_i можно добиться того, чтобы $\tilde{Q}(0) = 0$. Тем самым ситуация сводится к ранее рассмотренной.

Доказательство теоремы 3. Пусть $F(x) = x + \alpha x^{k+1} + \cdots$. Будем считать, для определенности, что $x \geqslant 0$, $\alpha < 0$. Заметим сначала, что в силу [2, с. 52], выполняются неравенства

$$C_1 n^{-\frac{1}{k}} \leqslant |F^n x| \leqslant C_2 n^{-\frac{1}{k}} \tag{7}$$

при некоторых C_1, $C_2 > 0$.

Предположим, что $m = 1$, k — нечетно, $0 < q < 1$. Зафиксируем какую-нибудь точку $x_0 > 0$. Положим $y_0 = 1$, $y_n = \sum_{i=0}^{n-1} Q(x_i)$, где $x_i = F^i x_0$. Как и при доказательстве теоремы 2, введем в рассмотрение функции (5) и положим $\varphi_0(x) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n \zeta_n(x)$. В силу (7), а также неравенств $|y_n| \leqslant \tilde{q}^n$, $\tilde{q} < 1$, $(x_{n-1} - x_{n+1}) \geqslant C_3 n^{-\frac{k+1}{k}}$, $C_3 > 0$, функция $\varphi_0(x)$ принадлежит классу C^∞, является плоской в нуле и удовлетворяет условиям $\varphi_0(x_n) = y_n$. Дальнейшие рассуждения в этом случае проводятся аналогично доказательству теоремы 2.

Случай $q > 1$ сводится к предыдущему умножением обеих частей уравнения (1) на $Q^{-1}(x)$, заменой $x \to F^{-1}x$ и рассмотрением левой полуокрестности нуля.

Доказательство раздела 1 теоремы 3 в случаях 2—4 проводится аналогично. При этом, если $q = 1$, используется оценка: $|y_n| \leqslant \exp\left(Cn^{1-\frac{l}{k}}\right)$.

Если матрица $Q(0)$ нильпотентна, доказательство теоремы 3 также проводится по схеме доказательства теоремы 2. В этом случае используется оценка: $\| y_n \| \leqslant C^n n^{-\frac{n}{k}}$.

Замечание. Из изложенного видно, что ограничение на функцию $\det Q(x)$ в формулировках теорем 2, 3 при доказательстве необходимости не используется.

Список литературы: 1. *Кучко Л. П.* Линейные функциональные уравнения от одной переменной.— Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1986.— Вып. 46.— С. 24—25. 2. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа.— М.: Наука.— 1978.— 391 с.

Поступила в редколлегию 03.05.85