УДК 517.535.4

Т. А. КОЛОМИЙЦЕВА

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ПРАВИЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ МАСС

0. Пусть $f(z)$ — целая функция порядка ρ и вполне регулярного роста при уточненном порядке $\rho(r)$ [1, с. 47]. Тогда существует некоторое C^0-множество, вне которого $\ln|f(z)|$ имеет определенную асимптотику, выраженную через индикатор роста функции $f(z)$.

В работе [2, с. 37] это исключительное множество было исчерпывающим образом охарактеризовано в терминах распределения нулей $f(z)$.

В настоящей работе эти результаты обобщаются на субгармонические функции в m-мерном ($m \geqslant 2$) пространстве R^m. Отметим, что нетривиальность такого обобщения связана прежде всего с тем, что индикатор функции, субгармонической в $\boldsymbol{R}^m$, при $m \geqslant 3$ уже не является ни ограниченным, ни непрерывным, и это влечет изменение основных формулировок по сравнению с работой [2] и приводит к необходимости совершенствования применяемого в ней метода.

Напомним основные определения и результаты.

Будем обозначать $\vec{p}, \vec{q}, \ldots \overrightarrow{PQ}$ векторы из $\boldsymbol{R}^m$. Если O — начало координат, то

$$r_Q = \| \overrightarrow{OQ} \|, \ r_{PQ} = \| \overrightarrow{PQ} \|.$$

Если $u: \boldsymbol{R}^m \to R$, то будем писать $u(Q)$, $u(\vec{p})$, $u(R\vec{x})$, где $\| x \| = 1$, а $R \geqslant 0$.

Пусть $u(r\vec{x})$ — субгармоническая функция в $\boldsymbol{R}^m$ и $M(r, u)$ — ее максимум на сфере $S_r = \{r\vec{x} : \| \vec{x} \| = 1\}$.

Напомним, что функция $u(r\vec{x})$ имеет нормальный тип при уточненном порядке $\rho(r)$ (обозначение $u \in SH(\rho(r))$), $(\rho(r) \to \rho$ при $r \to \infty)$, если величина

$$\sigma_u := \limsup_{r \to \infty} M(r, u) r^{-\rho(r)} \tag{0.1}$$

удовлетворяет условию $0 < \sigma_u < \infty$.

Величина

$$h(\vec{x}, u) := \overline{\lim_{\vec{x}' \to \vec{x}}} \{\limsup_{r \to \infty} u(r\vec{x}') r^{-\rho(r)}\} \tag{0.2}$$

называется индикатором функции $u \in SH(\rho(r))$.

Если внешний $\overline{\lim}$ в (0.2) опущен, то получаем нерегуляризованный индикатор, который не превосходит индикатора и может быть строго меньше лишь на множестве $\gamma \in S_1$ таком, что конус

$$K_\gamma = \{r\vec{x} : \vec{x} \in \gamma, \ 0 < r < \infty\}$$

имеет нулевую емкость в $\boldsymbol{R}^m$ [3, с. 56].

Множество $C \subset \boldsymbol{R}^m$ называется C_0-множеством, если его можно покрыть объединением шаров вида $B(Q_j, \delta_j) = \{P : r_{PQ_j} \leqslant \delta_j\}$, для которых выполнено условие

$$\limsup_{R \to \infty} \frac{1}{R^{m-1}} \sum_{r_{Q_j} < R} \delta_j^{m-1} = 0. \tag{0.3}$$

Функцию $u \in SH(\rho(r))$ будем называть функцией вполне регулярного роста ($u \in SH_{reg}$), если найдется C_0-множество C такое, что для функции $h_u(r\vec{x}) := u(r\vec{x})\, r^{-\rho(r)}$ соотношение

$$h_u(r\vec{x}) - h(\vec{x}, u) = o(1) \tag{0.4}$$

выполняется равномерно при $r\vec{x} \to \infty$ вне C_0.*

Пусть $\mu(E)$ — распределение масс (мера), ассоциированное по Риссу с u.

Известно [3, с. 40], что условие $u \in SH_{reg}$ влечет слабую при $t \to \infty$ сходимость семейства мер μ_t вида $\mu_t(E) = \mu(tE)\, t^{-\rho(t)}$ к мере $\nu(E)$, которая ассоциирована с субгармонической функцией

$$v(r\vec{x}) = h(\vec{x}, u)\, r^{\rho}, \tag{0.5}$$

причем

$$\nu = \Delta_{\vec{x}} \times \{\rho r^{\rho-1}\, dr\}, \tag{0.6}$$

т. е. ν является произведением меры $\Delta_{\vec{x}}$, зависящей от $h(\vec{x}, u)$ и определенной на S_1, на меру, заданную на положительном луче.

Пусть μ — распределение масс в $\boldsymbol{R}^m$. Обозначим

$$\mu_{r\vec{x}}(t) = \mu(\{P : \|\overrightarrow{OP} - r\vec{x}\| < t\}). \tag{0.7}$$

Пусть $u \in SH_{reg}$, μ_u — ассоциированное распределение масс, $h(\vec{x}, u)$ — индикатор, $\nu(E)$ — распределение масс, ассоциированное с $v = r^{\rho} h(\vec{x}, u)$.

Определение. *Ω-множеством функции u называется множество точек $r\vec{x}$, удовлетворяющих условиям: для произвольно малого $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta > 0$ и $R = R(\varepsilon, \delta)$ такие, что если $r > R$, то выполняется неравенство*

$$\left| \int_0^{\delta r} \frac{\mu_{r\vec{x}}(t)}{t^{m-1}}\, dt - r^{\rho(r)} \int_0^{\delta} \frac{\nu_{\vec{x}}(\tau)}{\tau^{m-1}}\, d\tau \right| < \varepsilon r^{\rho(r)}. \tag{0.8}$$

Теорема 1. *Пусть $u \in SH_{reg}$. Для того чтобы условие*

$$h_u(r\vec{x}) - h(\vec{x}, u) = o(1) \tag{0.9}$$

выполнялось равномерно при $r\vec{x} \to \infty$ вне множества C, необходимо и достаточно, чтобы C было дополнением к Ω-множеству функции u.

---

* *В. С. Азарин.* О субгармонических во всем пространстве функциях вполне регулярного роста//Зап. мехматем. ф-та Харьк. ун-та и ХМО, XXVIII.— 1961.— Сер. 4.— С. 128—148.

Отметим, что в определении Ω-множества в [2] фигурировало лишь первое слагаемое.

Следующее утверждение объясняет это явление.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $m=2$. Тогда $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$ такое, что

$$\int_0^\delta \frac{\nu_{\vec{x}}(\tau)}{\tau^{m-1}}\, d\tau<\varepsilon. \tag{0.10}$$

При $m \geqslant 3$ для любого $\rho(r)$ найдется $u \in SH(\rho(r))$ такая, что (0.10) не выполняется для счетного всюду плотного множества значений $\vec{x} \in S_1$.

Отметим, что в [4] изучались специальные классы субгармонических функций в $\boldsymbol{R}^m$, для которых выполнено условие, подобное (0.10).

1. Здесь приведем доказательство теоремы 1 и предложения 2, воспользовавшись следующими леммами.

Лемма 3. *Пусть* $u \in SH(\rho(r))$, C — C_0 — *множество и* $S(Q, \delta)=$ $=\{P:\|\overrightarrow{PQ}\|=\delta r\}$ — *сфера с центром в точке* Q, $\vec{r}$ — *радиус-вектор точки* Q. *Тогда*

$$\frac{1}{\operatorname{mes} S(Q, \delta)} \int\limits_{S(Q, \delta) \cap C}|u(p)|\, d\sigma_p=o\left(r^{\rho(r)}\right) \tag{1.1}$$

при $r \rightarrow \infty$.

Лемма 4. *Пусть* $u \in SH_{reg}$ *и* $h(\vec{x}, u)$ — *ее индикатор. Тогда при* $\delta<\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{\operatorname{mes} S(Q, \delta)}\left[\int\limits_{S(Q, \delta)} u(p)\, d\sigma_p-r^{\rho(r)+m-1} \int\limits_{S(\vec{x}_Q, \delta)} h(\vec{x}_p) r_p^\rho\, d\sigma_p\right]=$$
$$=o\left(r^{\rho(r)}\right) \tag{1.2}$$

при $r \rightarrow \infty$, *где* $\vec{x}_Q=\frac{\overrightarrow{OQ}}{r}$.

Эти леммы будут доказаны в §§ 2, 3.

Доказательство теоремы 1. *Достаточность.*

Пусть $\varepsilon>0$ и найдены δ, $R(\delta, \varepsilon)$. Пусть $r\vec{x} \in \Omega$ и $r>R(\delta, \varepsilon)$ такое, что выполняется условие (0.8).

Воспользовавшись формулой Иенсена

$$\frac{1}{\operatorname{mes} S(Q, \delta)} \int\limits_{S(Q, \delta)} u(p)\, d\sigma_p-u(Q)=\int_0^{\delta r} \frac{\mu_{r\vec{x}}(t)}{t^{m-1}}\, dt, \tag{1.3}$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор точки Q; $\vec{x} = \frac{\vec{r}}{r}$, представим разность (0.9) в виде

$$u(r\vec{x})\,r^{-\rho(r)} - h(\vec{x}, u) = \left[\frac{1}{\operatorname{mes} S(Q, \delta)} \int\limits_{S(Q,\delta)} u(p)\,d\sigma_p - \right.$$

$$\left. - \int\limits_0^{\delta r} \frac{\mu_{r\vec{x}}(t)}{t^{m-1}}\,dt\right] r^{-\rho(r)} - \left[\frac{1}{\operatorname{mes} S(\vec{x}_Q, \delta)} \int\limits_{S(\vec{x}_Q,\delta)} h(\vec{x}_p) \times \right.$$

$$\left. \times\, r_p^{\rho}\, d\sigma_p - \int\limits_0^{\delta} \frac{\nu_{\vec{x}}(\tau)}{\tau^{m-1}}\,d\tau\right].$$

Перепишем это представление в форме

$$u(r\vec{x})\,r^{-\rho(r)} - h(\vec{x}, u) = \left[\frac{1}{\operatorname{mes} S(Q, \delta)} \int\limits_{S(Q,\delta)} u(p)\,d\sigma_p - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\operatorname{mes} S(\vec{x}_Q, \delta)} \int\limits_{S(\vec{x}_Q,\delta)} h(\vec{x}_p)\, r_p^{\rho} r^{\rho(r)}\, d\sigma_p\right] r^{-\rho(r)} -$$

$$- \left[\int\limits_0^{\delta r} \frac{\mu_{r\vec{x}}(t)}{t^{m-1}}\,dt - r^{\rho(r)} \int\limits_0^{\delta} \frac{\nu_{\vec{x}}(\tau)}{\tau^{m-1}}\,d\tau\right] r^{-\rho(r)}. \tag{1.4}$$

Выбираем $R_1(\delta, \varepsilon) > R(\delta, \varepsilon)$ так, чтобы первое слагаемое в (1.4) было меньше ε.

По лемме 4 это возможно.

Так как, кроме того, по условию $\forall\varepsilon$, $\exists\delta$ и $R = R(\delta, \varepsilon)$ такие, что при $r > R$ выполняется (0.8), тогда при $r > R_1$ будет выполняться (0.9), что требовалось доказать.

Необходимость. Пусть для точек $Q(\vec{r}_Q = \vec{r})$, принадлежащих некоторому Ω-множеству, при $\forall\varepsilon > 0$ и $r > R = R(\varepsilon)$ выполняется соотношение $|u(r\vec{x})\,r^{-\rho(r)} - h(\vec{x}, u)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Найдем по лемме 4 такое $R_1 = R_1(\varepsilon, \delta) > R(\varepsilon)$, чтобы первое слагаемое в (1.4) было меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, тогда из (1.4) получаем

$$\left|\int\limits_0^{\delta r} \frac{\mu_{r\vec{x}}(t)}{t^{m-1}}\,dt - r^{\rho(r)} \int\limits_0^{\delta} \frac{\nu_{\vec{x}}(\tau)}{\tau^{m-1}}\,d\tau\right| r^{-\rho(r)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + |u(r\vec{x})\,r^{-\rho(r)} - h(\vec{x}, u)| \leqslant \varepsilon.$$

То есть Q удовлетворяет условию (0.8). Значит, $Q \in \Omega$-множеству, что требовалось доказать.

Доказательство предложения 2. Запишем формулу Иенсена (1.3) при $m=2$ для субгармонической функции: $v(z)=h(e^{i\varphi}, u)r^{\rho}$, где $z=re^{i\varphi}$.

Пусть точка $z_0=e^{i\varphi_0}\in S_1$ и является центром окружности $S(z_0, \delta)$ радиуса δ, тогда согласно формуле Иенсена получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(e^{i\varphi}, u)\, r^{\rho}\, d\varphi - h(e^{i\varphi_0}, u) = \int_0^{\delta} \frac{\nu_{\varphi}(\tau)}{\tau}\, d\tau, \qquad (1.5)$$

где $\nu_{\varphi}(\tau)$ — мера, ассоциированная с субгармонической функцией $v(z)$.

В силу непрерывности индикатора $h(e^{i\varphi}, u)$ при $m=2$ можно при достаточно малом $\varepsilon>0$ указать такое $\delta>0$, что будет справедливо соотношение

$$h(e^{i\varphi}, u)\, r^{\rho} < h(e^{i\varphi_0}, u)+\varepsilon, \qquad (1.6)$$

когда $|z-z_0|<\delta$.

Подставляя оценку (1.6) в (1.5), находим

$$\int_0^{\delta} \frac{\nu_{\varphi}(\tau)}{\tau}\, d\tau < \varepsilon.$$

Пусть $m \geqslant 3$. Рассмотрим меру ν, определенную равенством (0,6), в котором $\Delta_{\vec{x}}$ — дискретное распределение масс на S_1, сосредоточенное на счетном, всюду плотном множестве $\Phi \subset S_1$.

Для каждой точки $\vec{x} \in \Phi$ имеем

$$\nu_{\vec{x}}(\tau) \geqslant \nu(\{\vec{x}\}) > 0.$$

Поэтому интеграл в (0.10) расходится при любом δ и, значит, неравенство (0.10) выполняться не может.

2. Доказательство леммы 3 основано на следующих леммах.

Лемма 3.0. *Пусть $H(p)$ — гармоническая функция в шаре $K(O, 2R)$ радиуса $2R$, $\max\limits_{p\in K(O,\,2R)} H(p) \leqslant M$, $H(O)=0$. Тогда $\max\limits_{p\in K(0,\,R)} |H(p)| \leqslant AM$, где A — абсолютная постоянная.*

Утверждение следует из формулы Пуассона.

Лемма 3.1. *Пусть $H(p)$ — наилучшая гармоническая мажоранта субгармонической функции $u(p)$ в шаре $K(O, 2r)$, тогда имеет место соотношение $\frac{1}{\operatorname{mes} S(Q,\delta)} \int\limits_{S(Q,\,\delta)\cap C} |H(p)|\, d\sigma_p = o(r^{\rho(r)})$, где $S(Q, \delta)$ — сфера с центром в точке Q, радиуса δr; $\vec{r}$ — радиус-вектор точки Q, $\left(0<\delta<\frac{1}{2}\right)$, C — C_0 — множество.*

Лемма непосредственно следует из леммы 3.0 и определения C_0-множества.

Лемма 3.2. *Пусть α — произвольная гиперплоскость, проходящая через точку P, лежащую внутри сферы S радиуса R.*

Обозначим через L_α проекцию точки $L \in S$ на гиперплоскость α.

Верно следующее неравенство:

$$\int\limits_{S \cap M} \frac{d\sigma_L}{r_{PL}^{m-2}} \leqslant A_1(m) \max_\alpha \int\limits_{M_\alpha} \frac{d\sigma_{L_\alpha}}{r_{PL_\alpha}^{m-2}},$$

при $m \geqslant 3$, где M_α — проекция множества $M \in S$ на гиперплоскость α; $A_1(m)$ — постоянная, зависящая лишь от размерности пространства.

При доказательстве воспользуемся возможностью разбиения M на части: M_i ($M = \bigcup\limits_{i=1}^{k} M_i$, $M_i \cap M_j = \varnothing$ при $i \neq j$) так, чтобы выполнялось неравенство

$$d\sigma_{L_i} < A_1(m)\, d\sigma_{L_{\alpha_i}}, \tag{2.1}$$

где $L_{\alpha_i} \in M_{\alpha_i}$; M_{α_i} — проекция M_i на гиперплоскость α_i, проходящую через точку P.

При $m \geqslant 3$ из неравенств $r_{PL} \geqslant r_{PL_\alpha}$ и (2.1) следует

$$\int\limits_{S \cap M} \frac{d\sigma_L}{r_{PL}^{m-2}} \leqslant A_1(m) \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{M_{\alpha_i}} \frac{d\sigma_{L_{\alpha_i}}}{r_{PL_{\alpha_i}}^{m-2}} \leqslant A_1(m) \max_\alpha \int\limits_{M_\alpha} \frac{d\sigma_{L_\alpha}}{r_{PL_\alpha}^{m-2}}.$$

Лемма 3.3. *В обозначениях леммы 3.2 имеет место соотношение*

$$\int\limits_{M_\alpha} \frac{d\sigma_{L_\alpha}}{r_{PL_\alpha}^{m-2}} \leqslant \int\limits_{K_{R(M_\alpha)}} \frac{d\sigma_{L_\alpha}}{r_{PL_\alpha}^{m-2}} = [S(M_\alpha)]^{\frac{1}{m-1}} \text{ при } m \geqslant 3,$$

где $K_{R(M_\alpha)}$ — круг в гиперплоскости α, площадь которого равна площади M_α.

Доказательство леммы 3.3 основано на следующем утверждении (см., например, [5; 6, с. 56]).

Пусть Q — множество, лежащее внутри шара K_R, $\operatorname{mes} Q = s$, $E_{R(S)}$ — шар с центром в начале координат, такой, что $\operatorname{mes} E_{R(S)} = s$, $\lambda(t)$, $t \in (O, R)$ — невозрастающая функция на (O, R) (допускается $\lambda(O) = \infty$).

Тогда $\int\limits_Q \lambda(|x|)\, dV_x = \int\limits_{E_{R(S)}} \lambda(|x|)\, dV_x$, где dV_x — элемент объема.

В нашем случае при $m \geqslant 3$ $\lambda(t) = \frac{1}{t^{m-2}}$; $Q = M_\alpha$, $E_{R(S)} = K_{R(M_\alpha)}$.

Следовательно, $\int\limits_{M_\alpha} \frac{d\sigma_{L^\alpha}}{r_{PL_\alpha}^{m-2}} \leqslant \int\limits_{K_{R(M_\alpha)}} \frac{d\sigma_{L_\alpha}}{r_{PL_\alpha}^{m-2}} = B\ (m) \int\limits_0^{R(M\alpha)} \frac{r^{m-2}}{r^{m-2}} dr =$

$= B(m) R(M_\alpha) = [S(M_\alpha)]^{\frac{1}{m-1}}$ при $m \geqslant 3$, где $B(m)$ — площадь сферы размерности $m-2$.

Лемма 3.4. *Пусть $G(p, L)$ — функция Грина шара K_{2r} с центром в начале координат, радиуса $2r$ и $p \in K_{\frac{3}{2}r}$, $S(Q, \delta)$ — сфера с центром в точке Q радиуса δr, $\vec{r}$ — радиус-вектор точки Q, $\left(0 < \delta < \frac{1}{2}\right)$.*

Тогда $\int\limits_{S(Q,\ \delta) \cap C} G(p,\ L)\, d\sigma_L = o(r)$, *где* $C - C_0$ — *множество.*

Известно, что [5] $G_{2r}(x, y) \leqslant C(m) |x-y|^{2-m}$, следовательно,

$$\int\limits_{S(Q,\ \delta) \cap C} G(p,\ L)\, d\sigma_L \leqslant C(m) \int\limits_{S(Q,\ \delta) \cap C} \frac{d\sigma_L}{r_{PL}^{m-2}}.$$

Используя леммы 3.2 и 3.3, получаем $\int\limits_{S(Q,\ \delta) \cap C} G(p,\ L)\, d\sigma_L \leqslant$

$\leqslant C(m) A_1 \max\limits_\alpha [S(M_\alpha)]^{\frac{1}{m-1}} = o[(r^{m-1})^{\frac{1}{m-1}}] = o(r).$

Доказательство леммы 3. Докажем справедливость соотношения (1.1): $\frac{1}{\operatorname{mes} S(Q,\ \delta)} \int\limits_{S(Q,\ \delta) \cap C} |u(p)|\, d\sigma_p = o(r^{\rho(r)})$.

Запишем для функции $u(r\vec{x})$ представление Рисса в шаре $K(2r)$ с центром в начале координат, радиуса $2r$, где $\vec{r}$ — радиус-вектор точки Q: $u(p) = H(p) - \int\limits_{K(2r)} G(p,\ L)\, d\mu_L \Rightarrow |u(p)| \leqslant |H(p)| + \int\limits_{K(2r)} G(p,\ L)\, d\mu_L$ **(2.2)**, где $H(p)$ — наилучшая гармоническая мажоранта функции $u(r\vec{x})$.

Интегрируя (2.2) по множеству $S(Q,\ \delta) \cap C$, получаем

$$\int\limits_{S(Q,\ \delta) \cap C} |u(p)|\, d\sigma_p \leqslant \int\limits_{S(Q,\ \delta) \cap C} |H(p)|\, d\sigma_p + \int\limits_{S(Q,\ \delta) \cap C} \left(\int\limits_{K(2r)} G(p,\ L) \times d\mu_L \right) d\sigma_p.$$

Так как функция Грина измерима по Борелю, то, согласно теореме Фубини [8, с. 116], можно изменить порядок интегрирования во втором слагаемом:

$$\int\limits_{S(Q,\ \delta)\cap C} |u(p)|\, d\sigma_p \leqslant \int\limits_{S(Q,\ \delta)\cap C} |H(p)|\, d\sigma_p + \int\limits_{K(2r)} \Big(\int\limits_{S(Q,\ \delta)\cap C} G(p,\ L) \times$$

$$\times\, d\sigma_p \Big)\, d\mu_L.$$

Используя леммы 3.1 и 3.4, получаем $\int\limits_{S(Q,\ \delta)\cap C} |u(p)|\, d\sigma_p \leqslant$ $\leqslant o(r^{\rho(r)}) \operatorname{mes} S(Q,\ \delta) + o(r)\,\mu_u(2r)$, где $\mu_u(2r)$ — масса Рисса функции $u(r\vec{x})$, распределенная в шаре $K(2r)$.

Так как $u(r\vec{x})$ — субгармоническая функция нормального типа при уточненном порядке $\rho(r)$, то для $\mu_u(2r)$ имеет место оценка $\mu_u(2r) \leqslant C(2r)^{\rho(2r)+m-2}$, где $C = \mathrm{const}$.

Подставляя эту оценку в предыдущее соотношение, получаем

$$\int\limits_{S(Q,\ \delta)\cap C} |u(p)|\, d\sigma_p \leqslant o(r^{\rho(r)}) \operatorname{mes} S(Q,\ \delta) + o(r)\, C\,(2r)^{\rho(2r)+m-2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\operatorname{mes} S(Q,\ \delta)} \int\limits_{S(Q,\ \delta)\cap C} |u(p)|\, d\sigma_p = o(r^{\rho(r)}).$$

3. Доказательство леммы 4 основано на следующих леммах.

Лемма 4.1. *Для* r_p, *удовлетворяющих условию* $(1-\delta)\, r < r_p < (1+\delta)\, r$, *верно соотношение* $r_p^{\rho(r_p)} = r_p^{\rho}(1 + o(1))\, L(r)$ *при* $r \to \infty$, *где* $L(r)$ — *медленно меняющаяся функция.*

Лемма 4.2. *Если* $u(r\vec{x})$ — *субгармоническая функция вполне регулярного роста, а* $h(\vec{x},\ u)$ — *ее индикатор, то справедливо соотношение*

$$\frac{1}{\operatorname{mes} S(Q,\ \delta)} \int\limits_{S(Q,\ \delta)\cap C} h(\vec{x}_p)\, r_p^{\rho} d\sigma_p = o(r^{\rho}). \tag{3.1}$$

Так как $v(r\vec{x}) = h(\vec{x},\ u)\, r^{\rho}$ — субгармоническая функция уточненного порядка $\rho(r) = \rho$, то, применяя к ней лемму 3, убеждаемся в справедливости соотношения (3.1).

Доказательство леммы 4. Докажем справедливость соотношения (1.2).

Представим первое слагаемое левой части (1.2) в виде

$$\frac{1}{\operatorname{mes} S(Q,\ \delta)} \int\limits_{S(Q,\ \delta)} u(p)\, d\sigma_p = \frac{1}{\operatorname{mes} S(Q,\ \delta)} \int\limits_{S(Q,\ \delta)\cap C} u(p)\, d\sigma_p +$$

$$+ \frac{1}{\operatorname{mes} S(Q,\ \delta)} \int\limits_{S(Q,\ \delta)\setminus C} u(p)\, d\sigma_p \overset{\mathrm{def}}{=} I_1(Q) + I_2(Q). \tag{3.2}$$

По лемме 3

$$I_1(Q) = o(r^{\rho(r)}). \tag{3.3}$$

Так как $u(p)$ — субгармоническая функция вполне регулярного роста, то для нее справедливо соотношение

$$u(p) = [h(\overrightarrow{x_p}) + o(1)]\, r_p^{\rho(r_p)}, \tag{3.4}$$

где $p \notin C_0$-множеству.

Используя (3.4), представим интеграл $I_2(Q)$ в виде

$$I_2(Q) = \frac{1}{\operatorname{mes} S(Q,\ \delta)} \int\limits_{S(Q,\ \delta) \setminus C} [h(\overrightarrow{x_p}) + o(1)]\, r_p^{\rho(r_p)}\, d\sigma_p. \tag{3.5}$$

По лемме 4.1,

$$r_p^{\rho(r_p)} = r_p^{\rho}[1 + o(1)]\, L(r) \text{ при } r \to \infty.$$

Подставляя в правую часть (3.5), получаем

$$I_2(Q) = \frac{1}{\operatorname{mes} S(Q,\ \delta)} \int\limits_{S(Q,\ \delta) \setminus C} h(\overrightarrow{x_p})\, r_p^{\rho} L(r)\, [1 + o(1)]\, d\sigma_p + o(r^{\rho(r)}). \tag{3.6}$$

Запишем соотношение

$$\int\limits_{S(Q,\ \delta) \setminus C} h(\overrightarrow{x_p})\, r_p^{\rho} d\sigma_p = \int\limits_{S(Q,\ \delta)} h(\overrightarrow{x_p})\, r_p^{\rho} d\sigma_p - \int\limits_{S(Q,\ \delta) \cap C} h(\overrightarrow{x_p})\, r_p^{\rho} d\sigma_p. \tag{3.7}$$

Используя оценку (3.1) леммы 4.2 из (3.7), получаем

$$\int\limits_{S(Q,\ \delta) \setminus C} h(\overrightarrow{x_p})\, r_p^{\rho} d\sigma_p = \int\limits_{S(Q,\ \delta)} h(\overrightarrow{x_p})\, r_p^{\rho} d\sigma_p - o(r^{\rho}). \tag{3.8}$$

Далее делаем в интеграле

$$\int\limits_{S(Q,\ \delta)} h(\overrightarrow{x_p})\, r_p^{\rho} d\sigma_p \tag{3.9}$$

замену переменной $\tau \overrightarrow{x_p} = \frac{\overrightarrow{x_p} r_p}{r}$. При этом $S(Q,\ \delta)$ переходит в сферу $S(\overrightarrow{x_Q},\ \delta)$ с центром в $\overrightarrow{x_Q} \in S_1$ радиуса δ, а интеграл (3.9) — в интеграл вида

$$\int\limits_{S(\overrightarrow{x_Q},\ \delta)} h(\overrightarrow{x_p})\, \tau^{\rho} r^{m-1} r^{\rho} d\sigma_p. \tag{3.10}$$

Подставляя (3.10) в (3.8) и последнее затем — в (3.6), получаем

$$I_2(Q) = \frac{1}{\operatorname{mes} S(Q,\ \delta)} \int\limits_{S(\overrightarrow{x_Q},\ \delta)} h(\overrightarrow{x_p})\, \tau^{\rho} r^{m-1} r^{\rho} L(r)\, [1 + o(1)]\, d\sigma_p + o(r^{\rho(r)}).$$

Возвращаясь к старым обозначениям (но интегрирование идет уже по $S(\vec{x}_Q, \delta)$) и выполняя некоторые преобразования, получаем

$$I_2(Q) = \frac{r^{m-1}}{\operatorname{mes} S(Q, \delta)} r^{\rho(r)} \int\limits_{S(\vec{x}_Q, \delta)} h(\vec{x}_p) r_p^{\rho} d\sigma_p + o(r^{\rho(r)}). \quad (3.11)$$

Подставляя в (3.2) значения $I_1(Q)$ и $I_2(Q)$ из (3.3) и (3.11), получаем (1.2). Лемма доказана.

Список литературы: 1. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.— М.: Гостехтеоретиздат, 1956. — 632 с. 2. *Коломийцева Т. А.* Об асимптотическом поведении целой функции с правильным распределением корней // Теория функций, функцион. анализ и их прил. — 1972. — № 15. — С. 35—43. 3. *Аварин В. С.* Теория роста субгармонических функций. — Х.: Вища шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1982. — 73 с. 4. *Гольдберг А. А., Заболоцкий Н. В.* Индекс концентрации субгармонической функции нулевого порядка // Мат. записки. — 1983. — **34**, вып. 2. — С. 227—236. 5. *Агранович П. З.* О функциях вполне регулярного роста многих переменных // Теория функций, функцион. анализ и их прил. — 1978. — № 30. — 6 с. 6. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. — М.: Наука, 1970. — 591 с. 7. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. — М.: Наука, 1966. — 515 с. 8. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции — М.: Мир, 1980. — 304 с.

Поступила в редколлегию 03.05.85