УДК 517.948

В. Ю. КОЛМАНОВИЧ, М. М. МАЛАМУД

ОПЕРАТОРНЫЙ АНАЛОГ ЛЕММЫ ШВАРЦА — ЛЕВНЕРА

1. *Определения и формулировки результатов.* Напомним, следуя [1], что оператор A в комплексном гильбертовом пространстве H называют m-секториальным с вершиной в нуле и полууглом θ, $\left(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, если его резольвентное множество $\rho(A)$ — не пусто, а числовой образ $\sum(A)$ — подмножество сектора $|\arg z| \leqslant \leqslant \theta$. Последнее условие, очевидно, эквивалентно неравенству

$$\operatorname{Re}(Af, f) \geqslant \operatorname{ctg}\theta\,|\operatorname{Jm}(Af, f)|, \quad f \in D(A). \tag{1}$$

При $\theta = 0$ оператор A — положительный, самосопряженный, при $\theta = \frac{\pi}{2}$ — m — аккретивный. Наряду с оператором A обычно рассматривают сжатие T его дробно-линейное преобразование:

$$T = (I - A)(I + A)^{-1}. \tag{2}$$

Неравенство (1) при этом трансформируется в неравенство (2):

$$2\operatorname{Jm}(Tf, f)\operatorname{ctg}\theta \leqslant ((I - T^*T)f, f) = (D_T^2 f, f), \tag{3}$$

которое, как легко видеть, эквивалентно следующему:

$$\|T\sin\theta \pm i\cos\theta\| \leqslant 1. \tag{4}$$

Обозначим соответственно через $S(\theta)$ и $C(\theta)$ совокупности всех m — секториальных операторов с условием (1) и всех сжатий T, удовлетворяющих неравенствам (3).

Очевидно, $C\left(\frac{\pi}{2}\right)$ — множество всех, а $C(0)$ — множество самосопряженных сжатий. Ясно также, что T представляется в виде (2) $\leftrightarrow \operatorname{Ker}(T + I) = 0$.

Классы $S(\theta)$ и $C(\theta)$ представляют интерес уже потому, что оператор $A \in S(\theta)$ генерирует голоморфную в секторе $|\arg z| \leqslant \leqslant \frac{\pi}{2} - \theta$ полугруппу сжатий $\exp(-zA)$, $T = (I - A)(I + A)^{-1}$ — ее когенератор (см. [2,3]).

Спектр $\tau(T)$ оператора $T \in C(\theta)$ содержится в лунке $|z\sin\theta \pm \pm i\cos\theta| \leqslant 1$ и пересекается с окружностью $|z| = 1$ разве лишь в точках ± 1. Поэтому условие $\ker(T \pm I) = 0$ эквивалентно полной неунитарности оператора T, т. е. (см. [2]) отсутствию у него приводящих подпространств, в которых бы индуцировался унитарный оператор. Таким образом, если $\ker(T \pm I) = 0$, то $T \in C_{00}$, его минимальная унитарная дилатация — двусторонний сдвиг и $\dim\ker(I - T^*T) = \dim\ker(I - TT^*)$ (см. [2, с. 102]).

Напомним еще, что если T — вполне неунитарен, $\| T \| \leqslant 1$, то $\forall f(z) \in H^\infty$ в круге, корректно определен оператор $f(T)$ (см. [2, с. 131]). Аналогично, если оператор A с условием (I) — чистый (т. е. iA — вполне несамосопряжен $\leftrightarrow \ker A = 0$, (см. [2, с. 92]), то $\forall f(z)$ голоморфных в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ и таких, что $\operatorname{Re} f(z) > 0$, определен оператор $f(A)$ [2, с. 193].

Нас интересует вопрос, когда функция $f(A)$ ($f(T)$) от m-секториального оператора A (сжатия $T \in C(\theta)$) будет оператором того же класса. Небезынтересно отметить, что даже при $\theta \leqslant \frac{\pi}{2n}$ импликация $A \in S(\theta) \Rightarrow A^n \in S(n\theta)$ неверна — контрпример уже в двумерном пространстве $H = C^2$ доставляет Жорданова клетка $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ при $\alpha = 2 \sin \theta$.

Следующая теорема, которую следует рассматривать как аналог известного неравенства фон Неймана (см. [2, 4, 5] и библиографию в [5]) — основной результат заметки.

Теорема 1. *Пусть* $T \in C(\theta)$, $\ker(T \pm I) = 0$. *Если* $f(z) \in H^\infty$, $\| f \|_{H^\infty} \leqslant 1$ и $f^t(z) \operatorname{def} = \overline{f(\bar{z})} = f(z)$, *то* $f(T) \in C(\theta)$.

Из нее с помощью равенства (2) получается

Теорема 1′. *Пусть* $A \in S(\theta)$, $\ker A = 0$. *Если* $f(z)$ *голоморфна при* $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Re} f(z) > 0$ и $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$, *то* $f(A) \in S(\theta)$.

В скалярном случае ($\dim H = 1$) теоремы 1 и 1′ означают следующее: функция, голоморфная в круге (правой полуплоскости), отображает лунку $| z \sin \theta \pm i \cos \theta | \leqslant 1$ (сектор $x \geqslant | y | \operatorname{ctg} \theta$) в себя для всех $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, если последнее имеет место при $\theta = 0$ и $\theta = \frac{\pi}{2}$. Этот факт имеется, например, в [6].

2. Доказательства теорем. Докажем вначале два вспомогательных утверждения.

Лемма 1. *Пусть* $b_a(z) \operatorname{def} = (z - a)(1 - \bar{a} z)^{-1}$, $a = \bar{a}$ и $|a| < 1$. *Тогда* $\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *справедлива эквивалентность:*

$$T \in C(\theta) \leftrightarrow b_a(T) = (T - aI)(I - aT)^{-1} \equiv T_a \in C(\theta).$$

Доказательство. $D_{T_a}^2 = I - T_a^* T_a = k^* (I - T^* T) k = k^* D_T^2 k$, где $k = (1 - |a|^2)^{1/2} (I - aT)^{-1}$. Из неравенства (3), эквивалентного условию $T \in C(\theta)$, получаем

$$\operatorname{ctg} \theta \, | \operatorname{Jm}(Tkf, kf) | \leqslant \| D_T k f \|^2 = \| D_{T_a} f \|^2. \tag{5}$$

Далее, $(Tkf, kf) = a^{-1}(1 - a^2)(aT(I - aT)^{-1} f, (I - aT)^{-1} f) =$
$$= -a^{-1}(1 - a^2)(f, (I - aT)^{-1} f) + a^{-1}(1 - a^2) \| (I - aT)^{-1} f \|^2. \tag{6}$$

Из (6) $| \operatorname{Jm}(Tkf, kf) | = | a^{-1} | (1 - a^2) | \operatorname{Jm}((I - aT)^{-1} f, f) | = | \operatorname{Jm}(T_a f, f) |$, т. е. неравенство (5) эквивалентно неравенству (3) для оператора T_a. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $-\frac{1}{3}<\xi<1$, $f(z)=\frac{z^2+2\xi z+\xi}{\xi z^2+2\xi z+1}$. *Тогда* $\forall\theta\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ *справедлива импликация* $T\in C(\theta)\Rightarrow f(T)\in C(\theta)$.

Доказательство. Прямое доказательство этого факта даже в скалярном случае довольно громоздкое. Воспользуемся поэтому представлением $f(z)$ через элементарные множители Бляшке $b_\alpha(z)$ и $b_\beta(z)$ с вещественными нулями: $f(z)=b_\beta(zb_\alpha(z))$, $b_\alpha(z)=(z-\alpha)(1-\alpha z)^{-1}$, $\alpha=\bar{\alpha}=-2\xi(1+\xi)^{-1}$, $|\alpha|<1$, $b_\beta(z)=(z-\beta)(1-\beta z)^{-1}$, $\beta=\bar{\beta}=-\xi$, $|\beta|<1$.

В таком случае $f(T)=b_\beta(Tb_\alpha(T))$ и лемма 2 следует из предыдущей, если учесть импликацию $T\in C(\theta)=Tb_\alpha(T)\in C(\theta)$, которая проверяется элементарно. Лемма доказана.

Следствие. *Если* $a\in C$, $|a|<1$, $b(z)=b_a(z)\,b_{\bar{a}}(z)$ *и* $T\in C(\theta)$, *то* $b(T)\in C(\theta)$.

Доказательство теоремы 1. Пусть $f(z)\in H^\infty$. Тогда $F(\xi)=\left[1-f\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)\right]\left[1+f\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)\right]^{-1}$, где $\xi=(1-z)(1+z)^{-1}=x+iy$ удовлетворяет условиям теоремы 1′. Поэтому [7]

$$F(\xi)=a\xi+ib+\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\xi-it}-\frac{1}{1+t^2}\right)d\sigma(t),\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(t)}{1+t^2}\,dt<\infty,\tag{7}$$

причем в (7) $a>0$, $b\in R$, а $\sigma(t)$ — неубывающая функция на мнимой оси. Условие $\operatorname{Jm}F(x)=0$ эквивалентно следующему:

$$b+\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{t}{x^2+t^2}-\frac{t}{1+t^2}\right)d\sigma(t)=0.\tag{8}$$

Полагая в (8) $x=1$, получаем $b=0$. Далее,

$$\int_{-\infty}^{0}\left(\frac{t}{x^2+t^2}-\frac{t}{1+t^2}\right)d\sigma(t)=-\int_{0}^{\infty}\left(\frac{t}{x^2+t^2}-\frac{t}{1+t^2}\right)d\sigma(-t)\tag{9}$$

и потому условие (8) с учетом (9) приобретает вид

$$\int_{0}^{\infty}\left(\frac{t}{x^2+t^2}-\frac{t}{1+t^2}\right)d(\sigma(t)-\sigma(-t))=0.\tag{10}$$

Ясно, однако, что равенство (10) эквивалентно условию: $\sigma(t)=\sigma(-t)$. Поэтому из (7) и (9)

$$F(\xi)=a\xi+\int_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{\xi-it}+\frac{1}{\xi+it}\right)d\sigma(t).\tag{11}$$

Теорему достаточно доказать для строгих сжатий $T \in C(\theta)$ (т. е. $\|T\| < 1$), ибо последние плотны в $C(\theta)$ по равномерной норме. Если же $\|T\| < 1$, то $T = (I - A)(I + A)^{-1}$, где $A \in S(\theta)$, причем A и A^{-1} ограничены и не имеют спектра на мнимой оси. Поэтому, как следует из (11),

$$F(A) = \alpha A + \int_0^\infty [(A - it)^{-1} + (A + it)^{-1}] \, d\sigma(t), \tag{12}$$

с учетом (12), достаточно установить импликацию: $A \in S(\theta)$, $t > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow B = (A - it)^{-1} + (A + it)^{-1} \in S(\theta)$. Но

$$(I - B)(I + B)^{-1} = (T^2 + 2\alpha T + \alpha)(T^2\alpha + 2\alpha T + 1)^{-1}, \tag{13}$$

где $\alpha = (t^2 - 1)(t^2 + 3)^{-1}$. Так как $-\frac{1}{3} < \alpha < 1$, то применение леммы 2 дает: $(I - B)(I + B)^{-1} \in C(\theta)$, т. е. $B \in S(\theta)$. Теорема доказана.

Следствие. *Если $F(z)$ голоморфна в полуплоскости* $\mathrm{Re}\, z > 0$ $|\arg F(z)| < \frac{\pi\varphi}{2}$ $(0 < \varphi \leqslant 1)$ и $F(\bar{z}) = \overline{F(z)}$, *то верна импликация:* $A \in S(\theta) \Rightarrow F(A) \in S(\theta\varphi)$.

Доказательство. Функция $g(z) = [F(z)]^{\frac{1}{\varphi}}$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и поэтому $g(A) \in S(\theta)$. Осталось заметить, что $F(A) = [g(A)]^{\varphi}$ и воспользоваться известной [1—3, 8] импликацией: $B \in S(\theta)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \Rightarrow B^{\alpha} \in S(\theta\alpha)$, которую, впрочем, легко вывести из формул Шварца для правой полуплоскости.

Замечание. Теорема 1 для функций $\varphi(z) = z^n$ и $\varphi(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ другим методом доказана Ю. М. Арлинским.

Список литературы: 1. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов.— М.: Мир. — 1972. — 740 с. 2. *Секефальви-Надь Б., Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Изд-во иностр. лит. — 1970. — 431 с. 3. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука. — 1967. — 464 с. 4. *Neuman J. von.* Eine spectral Theorie für allgemeine Operatoran eines unitaren Raumes // Math. Nachr. — 1951, 4. — S. 258—281. 5. *Пеллер В. В.* Аналог неравенства Дж. Неймана // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова — 1981. — **45**. — С. 103—150. 6. *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции. — М.: Гостехтеоретиздат. — 1941.—338 с. 7. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. — М.: Наука. — 1973. — 551 с. 8. *Мацаев В. И., Палант Ю. А.* О степенях ограниченного диссипативного оператора // Укр. мат журн. — 1962. — **14**, № 3. — С. 329—337.

Поступила в редколлегию 28.04.85