УДК 519.46

В. Я. ГОЛОДЕЦ, С. Д. СИНЕЛЬЩИКОВ

АВТОМОРФИЗМЫ ЭРГОДИЧЕСКИХ ГРУППОИДОВ И ПОЛУПРЯМЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

1. Измеримые группоиды и их автоморфизмы играют существенную роль в эргодической теории при изучении действий непрерывных групп на пространстве Лебега и, в частности, при описании инвариантов внешней сопряженности локальнс компактных групп преобразований. В настоящей работе установлено соответствие между автоморфизмами группоидов с непрерывными орбитами, а также автоморфизмами их дискретных редукций и ассоциированных алгебр фон Неймана. Указан способ построения полупрямого произведения измеримого группоида с дискретными орбитами на непрерывную группу его нестрогих автоморфизмов. Эти результаты могут быть использованы при изучении внешней сопряженности непрерывных аменабельных групп.

Пусть $\pi : H \times X \to G$ — коцикл действия группы H на пространстве Лебега (X, ν) со значениями в локально компактной сепарабельной (л. к. с.) группе G. Если μ_G — левоинвариантная мера Хаара группы G, то на $(G \times X, \mu_G \times \nu)$ можно задать действие группы H:

$$h(g, x) = (\pi(h, x) g, hx),$$

где $h \in H$, $(g, x) \in G \times X$. Это действие называется косым произведением и обозначается $G \times_\pi X$. Если $G \times_\pi X$ гладко (т. е. разбиение на его траектории измеримо), то коцикл π называется транзитным [1].

Определение и подробное изложение теории измеримых группоидов содержится в [1—3].

Пусть (Ω, C) — принципиальный эргодический аппроксимативно конечный группоид типа II с непрерывными орбитами. Рассмотрим также группоид $(\Gamma \times X, [\mu_\Gamma \times \mu])$, построенный по свободному эргодическому сохраняющему меру μ действию счетной аменабельной группы Γ на пространстве Лебега (X, μ), $\mu(X) = \infty$. Кроме того, пусть $(\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{T}, [\mu_T \times \mu_T])$ — транзитивный группоид, порожденный трансляцией окружности $\boldsymbol{T}$. Тогда группоид (Ω, C) изоморфен прямому произведению $((\Gamma \times X) \times (\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{T}), [\mu_\Gamma \times \mu \times \mu_T \times \mu_T])$ [1, теорема 6.4], которое будем отождествлять с (Ω, C).

Теорема 1. *Пусть A — автоморфизм группоида (Ω, C). Тогда найдутся автоморфизм θ группоида $(\Gamma \times X, [\mu_\Gamma \times \mu])$ и внутренний автоморфизм τ группоида (Ω, C) такие, что $A = (\theta \times \mathrm{id}) \cdot \tau$.*

Напомним, что отношение эквивалентности R на пространстве Лебега (X, μ) называется гладким, если разбиение пространства X на классы эквивалентности измеримо. Нам понадобится следующее очевидное

Предложение 2. *Пусть (X, μ) — пространство Лебега, $R \subset X \times X$ — счетное борелевское гладкое отношение эквивалентности, R_0 — борелевское отношение эквивалентности, содержащееся в R. Тогда R_0 гладко.*

Доказательство теоремы 1. В силу принципиальности группоида (Ω, C) автоморфизм A полностью определяется своим ограничением на пространство единиц $X \times \boldsymbol{T}$, которое удовлетворяет условию $A(\gamma x, rt) = \pi((\gamma, r), (x, t)) A(x, t)$ для всех $(\gamma, r) \in \Gamma \times \boldsymbol{T}$ при п. в. $(x, t) \in X \times \boldsymbol{T}$, где $\pi: (\Gamma \times \boldsymbol{T}) \times (X \times \boldsymbol{T}) \to \Gamma \times \boldsymbol{T}$ — коцикл. Этот коцикл как гомоморфизм группоида $(\Gamma \times X) \times (\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{T})$ имеет вид $\pi = \pi_0 \circ A$, где $\pi_0((\gamma, r), (x, t)) = (\gamma, r)$.

Пусть $A(x, t) = (A_1(x, t), A_2(x, t))$, α и δ — композиции π с проекциями на Γ и $\boldsymbol{T}$ соответственно. Тогда $A_1(\gamma x, rt) = \alpha((\gamma, r), (x, t)) A_1(x, t)$, $A_2(\gamma x, rt) = \delta((\gamma, r), (x, t)) A_2(x, t)$.

Выберем $t_0 \in \boldsymbol{T}$ так, чтобы множество $X \times \{t_0\}$ содержалось $\bmod 0$ в несущественной редукции (н. р.) группоида (Ω, C), на которой A является строгим изоморфизмом, и зададим отображение $\varphi: X \to X$, $\varphi(x) = A_1(x, t_0)$, тогда $\varphi(\gamma x) = \beta(\gamma, x) \varphi(x)$ **(1)**, где $\beta(\gamma, x) = \alpha((\gamma, 1), (x, t_0))$. Построим также функцию $f: X \times \boldsymbol{T} \to \Gamma$, $f(x, t) = \alpha((e, t_0^{-1}t), (x, t_0))$, тогда $f(\gamma x, rt)^{-1} \times \alpha((\gamma, r), (x, t)) f(x, t) = \beta(\gamma, x)$. Таким образом, коцикл α когомологичен коциклу $\beta \circ p$, где $p: (\Gamma \times \boldsymbol{T}) \times (X \times \boldsymbol{T}) \to \Gamma \times X$ — проекция.

Легко видеть, что коцикл π_0 является транзитным, поэтому и коцикл $\pi = \pi_0 \circ A$ обладает этим свойством. В силу тривиальности коцикла $\delta((\gamma, r), (x, t)) = A_2(\gamma x, rt) A_2(x, t)^{-1}$ транзитным будет также коцикл α, а значит, и когомологичный ему коцикл $\beta \circ p$. Тогда, очевидно, и коцикл β будет транзитным.

Рассмотрим косое произведение $\Gamma \times_\beta X$. Оно порождает гладкое счетное отношение эквивалентности R^Γ на $\Gamma \times X$. Зададим также отношение эквивалентности R_0 на X: $R_0 = \{(\gamma x, x) \in X \times X : \gamma \in \Gamma, \beta(\gamma, x) = e\}$. Оно поднимается до отношения эквивалентности R_0^Γ на $\Gamma \times X$: $R_0^\Gamma = \{((\gamma, x_1), (\gamma, x_2)) : (x_1, x_2) \in R_0\}$. Но $R_0^\Gamma \subset R_0$, поэтому в силу предложения 2 R_0^Γ гладко. Тогда и R_0, очевидно, является гладким.

Пусть $S \subset X$ — борелевское сечение для отношения эквивалентности R_0, тогда $\mu(S) > 0$. Покажем, что ограничение отображения φ на S инъективно mod 0. Действительно, если $x_1, x_2 \in S$ не эквивалентны относительно действия Γ, то в силу выбора t_0 $\varphi(x_1)$ и $\varphi(x_2)$ тоже не эквивалентны и, следовательно, различны. Если же $x_2 = \gamma x_1$, $\gamma \neq e$, то в силу (1), определения R_0 и свободности действия Γ $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$.

Поскольку $A_1(x, t) = \alpha((e, t_0^{-1}t), (x, t_0)) \varphi(x)$, отображения A и $(x, t) \mapsto (\varphi(x), t)$ принимают значения, эквивалентные относительно действия группы $\Gamma \times \boldsymbol{T}$ для п. в. $(x, t) \in X \times \boldsymbol{T}$. Так как при этом A является автоморфизмом, отображение φ должно переводить полные множества в полные, а неполные — в неполные. Но в X полными являются множества положительной меры и только они. Это означает, что φ отображает множество S несингулярно. Можно проверить, что производная Радона — Никодима $d\mu \circ \varphi / d\mu$ инвариантна относительно действия Γ и, значит, постоянна п. в., так что отображение φ умножает меру μ на число $c > 0$.

Заменяя, если необходимо, множество S подмножеством конечной меры и нормируя соответствующим образом меру μ, можно добиться, чтобы $\mu(S) = 1$, $\mu(\varphi(S)) = c$. Представим пространство X дважды в виде объединения счетных семейств непересекающихся множеств $X = \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i = \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i'$, где $S_0 = S$, $S_0' = \varphi(S)$, причем $\mu(S_i) = 1$, $\mu(S_i') = c$. Построим автоморфизмы $\gamma_i, \gamma_i' \in [\Gamma]$, $i \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$, такие, что $\gamma_i(S_0) = S_i$, $\gamma_i'(S_0') = S_i'$. Наконец, зададим автоморфизм $\theta: X \to X$, $\theta x = \gamma_i' \circ \varphi \circ \gamma_i^{-1}(x)$ при $x \in S_i$. Ясно, что θ лежит в нормализаторе $N[\Gamma]$ полной группы $[\Gamma]$. Из построения следует, что для п. в. $x \in X$ $\theta(x)$ и $\varphi(x)$ Γ-эквивалентны. Следовательно, $\theta \times \mathrm{id}$ поточечно эквивалентно относительно действия группы $\Gamma \times \boldsymbol{T}$ отображению $\varphi \times \mathrm{id}$, а значит, и автоморфизму A. Поэтому $A \cdot (\theta \times \mathrm{id})^{-1}$ — внутренний автоморфизм группоида (Ω, C), что и требовалось доказать.

Замечание 3. Аналогичными методами теорема 1 может быть доказана для случая, когда действие группы Γ на (X, μ) имеет тип III.

2. В работе П. Хана [4] каждому измеримому группоиду (Ω, C) ставится в соответствие банахова $\ast$-алгебра $\mathrm{II}(\Omega)$ и ее регулярное представление в $L^2(\Omega)$ операторами свертки L_f, $f \in \mathrm{II}(\Omega)$. Это позволяет, в частности, ставить в соответствие автоморфизму группоида автоморфизм алгебры фон Неймана $L(\mathrm{II}(\Omega))''$ и, таким образом, ввести понятие модуля для автоморфизма группоида. Опишем вкратце соответствующую конструкцию для эргодических аппроксимативно конечных группоидов типа II.

Сначала рассмотрим случай группоида с дискретными орбитами $(\Gamma \times X, [\mu_\Gamma \times \mu])$, описанного в предыдущем разделе. Алгебра фон Неймана (фактор типа II_∞) $M = L(\mathrm{II}(\Gamma \times X))''$ представляет собой фактор Кригера, построенный по действию группы Γ на (X, μ). M содержит максимальную абелеву подалгебру A_d, изоморфную $L^\infty(X)$ и регулярную в том смысле, что ее нормализатор $N(A_d) = \{U \in M;\ U$ унитарный, $UA_dU^*_* = A_d\}$ порождает M.

Всякий автоморфизм группоида $\Gamma \times X$ определяется автоморфизмом $\theta \in N[\Gamma]$ и действует на элемент соответствующей н. р. руппоида $\Gamma \times X$ следующим образом: $\theta(\gamma, x) = (\gamma^\theta(x), \theta x)$, где $\gamma^\theta(x) \in \Gamma$ таков, что $\gamma^\theta(x)\theta x = \theta\gamma x$. Автоморфизм θ можно поднять до автоморфизма $\bar\theta$ алгебры $\mathrm{II}(\Gamma \times X)$: $(\bar\theta f)(\gamma, x) = f(\gamma^{\theta^{-1}}(x), \theta^{-1}x)$, а затем продолжить его до автоморфизма фактора M.

Теорема 1 позволяет перенести известные из [5] соотношения между автоморфизмами счетных отношений эквивалентности и автоморфизмами ассоциированных алгебр фон Неймана на случай группоидов с непрерывными орбитами. Рассмотрим группоид $\Omega, C) = ((\Gamma \times X) \times (\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{T}), [\mu_\Gamma \times \mu \times \mu_T \times \mu_T])$, описанный в в предыдущем разделе. Его алгебра фон Неймана $L(\mathrm{II}(\Omega))''$ распадается в тензорное произведение $L(\mathrm{II}(\Gamma \times X))'' \otimes L(\mathrm{II}(\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{T}))'' \cong M \otimes \|_{L^2 T} \otimes B(L^2(\boldsymbol{T}))$ с максимальной абелевой регулярной подалгеброй $A_d \otimes A_c$, где $A_c \cong L^\infty(\boldsymbol{T})$ [1, предложения 8.1, 8.2].

Теорема 4. *Существует взаимно однозначное соответствие между внутренними автоморфизмами группоида* (Ω, C) *и классами операторов из* $N(A_d \otimes A_c) \subset M \otimes B(L^2(\boldsymbol{T}))$, *отличающихся друг от друга на унитарный оператор из* $A_d \otimes A_c$.

Доказательство. Пусть θ — внутренний автоморфизм группоида (Ω, C). Ограничение θ на пространство единиц $X \times \boldsymbol{T}$ определяется некоторыми борелевскими отображениями $\varphi: X \times \boldsymbol{T} \to \Gamma$ и $\psi: X \times \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{T}$: $\theta(x, t) = (\varphi(x, t)x, \psi(x, t))$.

Пусть $X \times \boldsymbol{T} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} Q_\gamma$ — разбиение пространства единиц на множества постоянства функции φ, $Q_\gamma = \varphi^{-1}(\gamma)$. Этому разбиению соответствуют преобразования $\gamma^{-1}\theta : Q_\gamma \to \gamma^{-1}\theta Q_\gamma$, $\gamma \in \Gamma$, подчиненные действию группы $\boldsymbol{T}$ на $X \times \boldsymbol{T}$. Указанным преобразованиям отвечают, в свою очередь, частичные изометрии $a_\gamma \in A_d \otimes B(L^2(\boldsymbol{T}))$.

Рассмотрим семейство унитарных операторов $\lambda_\gamma \in M \otimes B(L^2(\boldsymbol{T}))$, $\gamma \in \Gamma$: $(\lambda_\gamma \xi)((\gamma', x), (s, t)) = \xi((\gamma^{-1}\gamma', x), (s, t))$, где $(\gamma', x) \in \Gamma \times X$, $(s, t) \in \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{T}$, $\xi \in L^2(\Omega)$. Сильно сходящийся ряд $U_\theta = \sum_{\gamma \in \Gamma} \lambda_\gamma a_\gamma$ тогда задает некоторый унитарный оператор $U_\theta \in N(A_d \otimes A_c)$. Соответствующий внутренний автоморфизм $\mathrm{Ad}\, U_\theta$ алгебры $M \otimes B(L^2(\boldsymbol{T}))$ будем обозначать через $\bar{\theta}$.

Пусть теперь U — унитарный оператор из $N(A_d \otimes A_c)$, τ — след на факторе $M \otimes B(L^2(\boldsymbol{T}))$ и E — условное ожидание на подалгебру $A_d \otimes B(L^2(\boldsymbol{T}))$. Оператор U допускает разложение $U = \sum_{\gamma \in \Gamma} \lambda_\gamma a_\gamma$, $a_\gamma = E(\lambda_{\gamma^{-1}} U) \in A_d \otimes B(L^2(\boldsymbol{T}))$, сходящееся на операторах из $L^2(M \otimes B(L^2(\boldsymbol{T})), \tau)$. Из того, что $U \in N(A_d \otimes A_c)$, а также из свойств ортогональности системы $\{\lambda_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ относительно следа τ следует, что a_γ являются частичными изометриями, причем системы начальных и конечных проекторов операторов $\lambda_\gamma a_\gamma$ дизъюнктны и лежат в $A_d \otimes A_c$. Домножая, если необходимо, операторы a_γ на унитарные элементы подалгебры $A_d \otimes A_c$, можно добиться, чтобы a_γ были подчинены действию группы $\boldsymbol{T}$ на $X \times \boldsymbol{T}$. Мы получаем ряд описанной выше структуры для оператора Ua, где a — некоторый унитарный оператор из $A_d \otimes A_c$. Пусть θ — автоморфизм пространства $X \times \boldsymbol{T}$, являющийся точечной реализацией действия автоморфизма $\mathrm{Ad}\, U$ на $A_d \otimes A_c$ [6], тогда $\mathrm{Ad}\, Ua = \bar{\theta}$.

Теорема 5. *Существует взаимно однозначное соответствие между внешними автоморфизмами группоида* (Ω, C) *и классами внешних автоморфизмов* Φ *фактора* $M \otimes B(L^2(\boldsymbol{T}))$ *таких, что* $\Phi(A_d \otimes A_c) = A_d \otimes A_c$, *и действующих одинаково на* $A_d \otimes A_c$.

Доказательство. Пусть A — внешний автоморфизм группоида Ω. В силу теоремы 1 он допускает представление $A = (\theta \times \mathrm{id}) \cdot \omega$, где θ — автоморфизм группоида $\Gamma \times X$; ω — внутренний автоморфизм группоида Ω. Поставим в соответствие автоморфизму A автоморфизм $\bar{A} = (\bar{\theta} \times \mathrm{id}) \cdot \bar{\omega}$ фактора $M \otimes B(L^2(\boldsymbol{T}))$, где $\bar{\theta}$ и $\bar{\omega}$ — автоморфизмы, описанные выше.

Обратно, пусть Φ — внешний автоморфизм фактора $M \otimes B(L^2(\boldsymbol{T}))$, удовлетворяющий условию $\Phi(A_d \otimes A_c) = A_d \otimes A_c$. Можно проверить, что тогда $\Phi(N(A_d \otimes A_c)) = N(A_d \otimes A_c)$. В силу теоремы 4 это означает, что точечная реализация A автоморфизма Φ на пространстве $X \times \boldsymbol{T}$ отображает множество внутренних автоморфизмов на себя и, следовательно, задает автоморфизм группоида Ω. Легко видеть, что автоморфизмы Φ и $\bar{A}$ одинаково действуют на подалгебре $A_d \otimes A_c$.

Определение. *Модулем автоморфизма* A *группоида* (Ω, C) *называется число* $\operatorname{mod} A = \tau \circ \bar{A}/\tau$, *где* $\bar{A}$ — *автоморфизм фактора* $M \otimes B(L^2(\boldsymbol{T}))$, *соответствующий автоморфизму группоида* A; τ — *след на указанном факторе. Пусть теперь* (Ξ, Q) — *произвольный эргодический аппроксимативно конечный группоид типа* II *с непрерывными орбитами и* $\varphi : \Xi \to \Omega$ — *изоморфизм. Для автоморфизма* B *группоида* (Ξ, Q) *положим* $\operatorname{mod} B = \operatorname{mod}(\varphi B \varphi^{-1})$.

Очевидно, модуль является гомоморфизмом $\operatorname{Aut}(\Xi, Q) \to \boldsymbol{R}_+^*$ и не зависит от выбора изоморфизма φ.

Замечание 6. Модуль автоморфизма A группоида (Ω, C) совпадает с модулем соответствующего ему в силу теоремы 1 автоморфизма $\theta \in N[\Gamma]$, $\operatorname{mod}\theta = \mu \circ \theta/\mu$.

Рассмотрим группоид $((D \times S) \times (\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{T}),\ [\mu_D \times \nu \times \mu_{\boldsymbol{T}} \times \mu_{\boldsymbol{T}}])$, соответствующий свободному эргодическому действию счетной аменабельной группы D на пространстве Лебега S с конечной инвариантной мерой ν и трансляции окружности. Пусть A — автоморфизм этого группоида. Домножив последний на трансляцию группы $\boldsymbol{Z}$, получим изоморфный группоид $((D \times S) \times (\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}) \times (\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{T}),\ [\mu_D \times \nu \times \mu_{\boldsymbol{Z}} \times \mu_{\boldsymbol{Z}} \times \mu_{\boldsymbol{T}} \times \mu_{\boldsymbol{T}}])$, причем группоид $((D \times S) \times (\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}),\ [\mu_D \times \nu \times \mu_{\boldsymbol{Z}} \times \mu_{\boldsymbol{Z}}])$ изоморфен группоиду $(\Gamma \times X,\ [\mu_\Gamma \times \mu])$. Автоморфизм A естественным образом продолжается до автоморфизма группоида $(D \times S) \times (\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}) \times (\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{T})$ и в силу теоремы 1 допускает представление $A = (\theta \times \mathrm{id}) \cdot \omega$, где ω — внутренний автоморфизм; $\theta \in N[D \times \boldsymbol{Z}]$. Если $\operatorname{mod} A = 1$, то θ сохраняет меру $\nu \times \mu_{\boldsymbol{Z}}$, и для него, в свою очередь, легко построить $\theta_1 \in N[D]$ и $\omega_1 \in [D \times \boldsymbol{Z}]$ такие, что $\theta = (\theta_1 \times \mathrm{id})\omega_1$. Замечая при этом, что транзитивный группоид $(\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}) \times (\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{T})$ изоморфен группоиду $\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{T}$, мы получаем

Следствие 7. *Пусть* A — *автоморфизм группоида* $((D \times S) \times (\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{T}),\ [\mu_D \times \nu \times \mu_{\boldsymbol{T}} \times \mu_{\boldsymbol{T}}])$, $\nu(S) = 1$ *и* $\operatorname{mod} A = 1$. *Тогда найдутся автоморфизм* $\theta_1 \in N[D]$ *и внутренний автоморфизм* ω *группоида* $(D \times S) \times (\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{T})$ *такие, что* $A = (\theta_1 \times \mathrm{id}) \cdot \omega$.

3. Пусть (Ω, C) — измеримый группоид и $\alpha : G \to \operatorname{Aut}(\Omega, C)$ — действие л. к. с. группы G *строгими* автоморфизмами группоида (Ω, C) такое, что отображение $(g, x) \mapsto \alpha(g)x$ — борелевское. Зададим проекции $r, d : G \times \Omega \to \{e\} \times \Omega^{(0)}$: $r(g, x) = (e, \alpha(g) r(x))$; $d(g, x) = (e, d(x))$. Эти отображения, а также произведение $(g, x)(h, y) = (gh, (\alpha(h^{-1})x)y)$, определенное при $(\alpha(h^{-1})x, y) \in \Omega^{(2)}$, задают на множестве $G \times \Omega$ структуру группоида. При этом $(g, x)^{-1} = (g^{-1}, \alpha(g)x^{-1})$. Указанные отображения являются борелевскими относительно борелевской структуры произведения, и $(G \times \Omega,\ [\mu_G] \times C)$ является измеримым группо-

идом. Этот группоид называется полупрямым произведением и обозначается $Gs_\alpha\Omega$.

Аналогичное определение было сформулировано в [3] для непрерывных групп автоморфизмов топологических группоидов. Однако в теории измеримых группоидов наиболее типична ситуация, когда автоморфизмы из группы G являются нестрогими, т. е. представляют собой изоморфизмы некоторых н. р. группоида Ω. Мы укажем способ построения полупрямого произведения принципиального группоида со счетными орбитами на л. к. с. группу его нестрогих автоморфизмов.

Пусть Γ — счетная свободнодействующая группа автоморфизмов пространства Лебега (S, μ), $\mu(S)=1$, сохраняющая класс меры μ. Обозначим через R_Γ соответствующее отношение эквивалентности на S. Рассмотрим также действие л. к. с. группы G на (S, μ) автоморфизмами $\alpha(g)\in N[\Gamma]$ такое, что отображение $(g, x)\mapsto\alpha(g)x$ борелевское.

Теорема 8. *Существует борелевское отношение эквивалентности $R\subset S\times S$, инвариантное относительно G (точно, а не* mod 0), *и борелевское множество $B\subset S$, $\mu(B)=1$, такое, что на B отношения эквивалентности R и R_Γ совпадают.*

Доказательство. С каждым автоморфизмом $\theta\in N[\Gamma]$ свяжем два семейства борелевских отображений: $\varphi_\gamma(s)=\theta\gamma s$, $\psi_\gamma(s)=\gamma\theta s$, $s\in S$, $\gamma\in\Gamma$. Рассмотрение областей совпадения этих отображений дает возможность выделить борелевское множество $U_\theta(\Gamma)\subset S$, имеющее меру $\mu(U_\theta(\Gamma))=1$. Оно обладает следующим свойством: для любых двух точек $x, y\in U_\theta(\Gamma)$ соотношение $(x, y)\in R_\Gamma$ эквивалентно $(\theta x, \theta y)\in R_\Gamma$.

В пространстве $G\times S$ рассмотрим борелевское множество $A=\{(g, x)\in G\times S: x\in U_{\alpha(g)}(\Gamma)\}$. Тогда $(\mu_G\times\mu)(G\times S\setminus A)=0$, поскольку при каждом $g\in G$ $\mu(U_{\alpha(g)}(\Gamma))=1$. Отсюда по теореме Фубини получаем, что при п. в. $x\in S$ $\mu_G(G\setminus M_x)=0$, где $M_x = \{g\in G: x\in U_{\alpha(g)}(\Gamma)\}$. Пусть $B\subset S$ — борелевское множество меры 1, состоящее из точек с этим свойством.

Каждой паре точек $(x, y)\in S\times S$ поставим в соответствие борелевское множество $L(x, y)=\{g\in G: \gamma\alpha(g)x=\alpha(g)y$ при некотором $\gamma\in\Gamma\}$. Тогда множество $R=\{(x, y)\in S\times S: \mu_G(G\setminus L(x, y)) = 0\}$ является борелевским. Это следует из борелевости множества $C=\{(g, x, y)\in G\times S\times S: g\in L(x, y)\}$ и функции $f: S\times S\to\boldsymbol{R}$, $f(x, y)=\mu_G(G\setminus L(x, y))$.

Из свойств $L(x, y)$ следует, что R является отношением эквивалентности, строго инвариантным относительно группы G.

Пусть $x, y\in B$. Если $(x, y)\in R_\Gamma$, то $L(x, y)\supset M_x\cap M_y$, и поэтому $\mu_G(G\setminus L(x, y))=0$. Если же $(x, y)\notin R_\Gamma$, то, напротив, получаем $G\setminus L(x, y)\supset M_x\cap M_y$. Это означает, что $R_\Gamma|_B=R|_B$.

Введем на R меру $\nu=\int\nu^x\,d\mu(x)$, где $\nu^x(E)=\operatorname{card}(E\cap\{x\}\times B)$ для всякого борелевского множества $E\subset R$. Тогда (R, ν) становится измеримым группоидом, изоморфным (хотя и нестрого) группоиду $\Omega = \Gamma \times S$.

Соотношение $GR = R$ позволяет поднять действие группы G автоморфизмами $\alpha(g)$ на (S, μ) до действия строгими автоморфизмами $\bar{\alpha}(g)$ группоида (R, ν): $\bar{\alpha}(g)(x, y) = (\alpha(g)x, \alpha(g)y)$ для $(x, y) \in R$. Это дает возможность построить полупрямое произведение $Gs_{\bar{\alpha}}R$, которое мы и принимаем за определение полупрямого произведения $Gs_{\bar{\alpha}}\Omega$.

Список литературы: 1. *Feldman J. et al.* Orbit structure and countable sections for actions of continuous groups/J. Feldman, P. Hahn, C. C. Moore//Adv. in Math.— 1978.— V. 28.— P. 186—230. 2. *Ramsay A.* Virtual groups and group actions//Adv. in Math.— 1971.— V. 6. No 3.— P. 253—322. 3. *Renault J.* A groupoind approach to C*-algebras//Lect. Notes in Math.— 1980.— V. 793.— 160 p. 4. *Hahn P.* The regular representations of measure groupoids//Trans. Amer. Math. Soc.— 1978.— V. 242.— P. 35—73. 5. *Feldman J., Moore C. C.* Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neuman algebras, I, II//Trans. Amer. Math. Soc.— 1977. — V. 234, No 2. — P. 289—359. 6. *Mackey G. W.* Point realizations of transformation groups. — Illinois J. Math. — 1962. — V. 6, No 1—2. — P. 327—355.

Поступила в редколлегию 04.01.86