УДК 517.53

А. А. ГОЛЬДБЕРГ, А. Э. ЕРЕМЕНКО, М. Л. СОДИН

ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ В СМЫСЛЕ Р. НЕВАНЛИННЫ И В СМЫСЛЕ В. П. ПЕТРЕНКО. 2

Настоящая статья является продолжением работы [1]. В ней будут доказаны теоремы 2—4, сформулированные в первой части, при этом используем определения и обозначения, введенные в [1]. Нумерация разделов и формул продолжается.

3. Через c_j обозначаем положительные постоянные.

Лемма 3.1. *Пусть D — жорданова область, граница которой содержит интервал l, а v — положительная гармоническая в D функция, имеющая нулевые предельные значения на l. Тогда существует непрерывная и положительная на l нормальная производная $\partial v/\partial n$.*

Лемма 3.2. *Пусть D—область, содержащая сектор $\{z: |\arg z| < \pi/(2\alpha),\ |z| \leqslant R\}$, $\frac{1}{2} < \alpha < \infty$, $R > 0$, причем отрезки $l_\pm = \{z = t\exp(\pm i\pi/(2\alpha)),\ 0 \leqslant t \leqslant R_0\}$, $R_0 < R$ лежат на границе ∂D. Пусть v — положительная гармоническая в D функция, обращающаяся в нуль на $l_\pm$. Тогда существуют числа $c_2 > c_1 > 0$* такие, *что при $0 \leqslant r \leqslant R_0/2$ выполняется*

$$c_1 r^\alpha \cos\alpha\theta \leqslant v(re^{i\theta}) \leqslant c_2 r^\alpha \cos\alpha\theta,\quad |\theta| \leqslant \frac{\pi}{2\alpha}, \tag{3.1}$$

причем левая часть этого неравенства выполняется и при $r \leqslant R$.

Лемма 3.3. *Пусть D — область, содержащая сектор* $\left\{z: |\arg z| < \frac{\pi}{2\alpha}, |z| \geqslant R\right\}$, $\frac{1}{2} < \alpha < \infty$, $R > 0$, *причем лучи* $l_{\pm} = \{z = t \exp(\pm i\pi/(2\alpha)), |z| \geqslant R_1\}$, $R_1 > R$ *лежат на границе* ∂D. *Пусть* v — *положительная гармоническая функция в* D, *обращающаяся в нуль на* $l_{\pm}$ *и неограниченная в этом секторе. Тогда при* $r \geqslant 2R_1$, $|\theta| \leqslant \pi/(2\alpha)$ *справедливо неравенство (3.1), причем левая часть этого неравенства выполняется и при* $r \geqslant R$.

Утверждения такого типа хорошо известны, поэтому доказательства лемм мы опускаем. Следующий факт также известен (см., например, [2], § 2.3, упр. 2).

Лемма 3.4. *Пусть* D_1, D_2 — *непересекающиеся области* $\partial D_1 \cap \partial D_2 = l$, *где* l — *отрезок. Пусть функция* v *гармонична в* D_1, D_2 *непрерывна в* $D_1 \cup D_2 \cup l$ *и равна* 0 *на* l. *Через* $\partial/\partial n_1$, $\partial/\partial n_2$ *обозначим производные по внутренней нормали к границе областей* D_1, D_2 *соответственно. Если* $\left(\frac{\partial}{\partial n_1} + \frac{\partial}{\partial n_2}\right) v(z) \geqslant 0$, $z \in l$, *то* v *субгармонична в* $D_1 \cup D_2 \cup l$.

Следующая лемма играет основную роль при доказательстве теоремы 3.

Лемма 3.5. *Для любого* $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, \frac{6}{11}\right)$ *существует функция* $u \in S$ *со следующими свойствами:*

$$u(z) \equiv 0, \quad |z| \leqslant 1; \tag{3.2}$$

$$|u(z)| \leqslant |z|^{\alpha}, \quad z \in \boldsymbol{C}; \tag{3.3}$$

$$\|u^{+}(re^{i\theta})\| \geqslant c_3 r^{\alpha}, \quad r \geqslant 4; \tag{3.4}$$

$$\|u^{-}(re^{i\theta})\| \geqslant \delta \|u^{+}(re^{i\theta})\|, \quad r > 0, \ \delta > 0. \tag{3.5}$$

Доказательство. Пусть $\beta = \alpha/(2\alpha - 1)$, тогда $\pi/(2\beta) = \pi - \pi/(2\alpha)$, $\beta > 6$. Положим $D = \{z: |z| > 2\} \cup \left\{z: |\arg(z-1)| < \frac{3\pi}{2\beta}\right\}$, $D_1 = \left\{z: |\arg(z-1)| < \frac{\pi}{2\beta}\right\}$, $D_0 = D \setminus D_1$. Пусть $v_0 = q \operatorname{Re} \Psi$, где Ψ — функция, конформно и однолистно отображающая D_0 на $\{w: \operatorname{Re} w > 0\}$, $\Psi(\infty) = \infty$, $q > 0$ (рисунок). Очевидно, что v_0 — положительная гармоническая в D_0 функция, имеющая на ∂D_0 нулевые предельные значения. В силу лемм 3.2 и 3.3 множитель q можно выбрать так, что

$$v_0(z) \leqslant |z|^{\alpha}, \quad z \in D_0; \tag{3.6}$$

$$v_0(z) \leqslant (|z| - 1)^{\beta}, \quad z \in D_0, \ |z| \leqslant 6. \tag{3.7}$$

Далее, в силу леммы 3.2

$$v_0(re^{i\theta} + 1) \geqslant -c_4 r^{\beta} \cos \beta\theta, \quad r \leqslant 6, \ \left|\theta \pm \frac{\pi}{\beta}\right| \leqslant \frac{\pi}{2\beta}. \tag{3.8}$$

а в силу леммы 3.3 при $r \geqslant 4$, $|\theta| \in \left[\pi - \frac{\pi}{2\alpha},\ \pi\right]$ выполняется

$$c_5 r^\alpha \cos\alpha(\pi - |\theta|) \leqslant v_0(re^{i\theta}+1) \leqslant c_6 r^\alpha \cos\alpha(\pi - |\theta|). \quad (3.9)$$

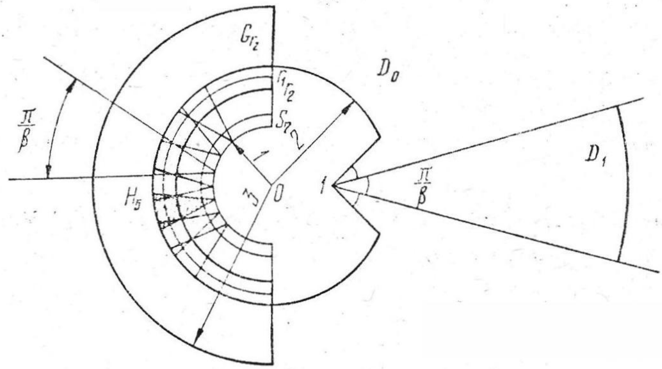
Положим $v(re^{i\theta}+1) = r^\alpha \cos\alpha(\pi - |\theta|)$, $re^{i\theta}+1 \in D_1$, $|\theta| < \pi$ **(3.10)**, а затем в секторе $D_1 \cup \{z: |z-1| < 5\}$ заменим эту функцию на ее наименьшую гармоническую мажоранту v^* и положим

$$v^*(z) = v(z),\ z \in D_1 \cap \{z: |z-1| \geqslant 5\}. \quad (3.11)$$

Тогда при $r \leqslant 5$, $|\theta| \leqslant \frac{\pi}{2\beta}$ выполняется

$$-c_7 r^\beta \cos\beta\theta \leqslant v^*(re^{i\theta}+1) \leqslant -c_8 r^\beta \cos\beta\theta. \quad (3.12)$$

Действительно, рассмотрим в секторе $0 < r < 5$, $|\theta| < \pi/(2\beta)$



гармоническую функцию $V(re^{\theta}) = v^*(re^{i\theta}+1) + kr^\beta \cos\beta\theta$, $k > 0$. На граничных отрезках эта функция сбращается в нуль. В силу (3.10), выбрав достаточно большое k, функцию V можно сделать неотрицательной и на дуге $\left\{r = 5,\ |\theta| \leqslant \frac{\pi}{2\beta}\right\}$. По принципу минимума $V(z) \geqslant 0$, что дает левую часть неравенства (3.12). Правая часть этого неравенства получается аналогично.

Определим функцию u следующим образом:

$$u(z) = v_0(z),\ z \in \bar{D}_0; \quad (3.13)$$

$$u(z) = cv^*(z),\ z \in D_1,\ c > 0; \quad (3.14)$$

$$u(z) \equiv 0,\ z \in \boldsymbol{C} \setminus (\bar{D}_0 \cup D_1). \quad (3.15)$$

Покажем, что постоянную c из (3.14) можно выбрать так, чтобы $u \in S$. Очевидно, что u непрерывна в $\boldsymbol{C}$ и субгармонична вне лучей $l_\pm = \{z: \arg(z-1) = \pm\pi/(2\beta)\}$. В силу (3.9)—(3.11), (3.13), (3.14) и лемм 3.1 и 3.4 функция u субгармонична в $\{z: |z-1| > 5\}$, если только $c < c_5$. А в силу (3.8), (3.12)—(3.14) и лемм 3.1 и 3.4 функция u субгармонична в окрестности $l_\pm \cap \{z: |z-1| < 5\}$, если только $c < c_4/c_7$. В трех точках $z=1$, $z=1+5\exp\left(\pm i\frac{\pi}{2\beta}\right)$ субгармоничность не нарушается, так как $u(z)$ непрерывна и субгармонична в проколотых окрестностях этих точек (см., например, [3], теорема 5.18).

Уменьшив в случае надобности постоянную c, будем считать, что

$$u(z) \geqslant -|z|^{\alpha}, \quad z \in \overline{D}_1. \tag{3.16}$$

Далее нам понадобятся следующие оценки:

$$u(re^{i\theta}+1) \leqslant -\varkappa_1 B(r+1,\ u),\ r>0,\ |\theta| \leqslant \frac{\pi}{4\beta},\ \varkappa_1>0; \tag{3.17}$$

$$|u(z)| \leqslant c_9(|z|-1)^{\beta}, \quad 1 \leqslant |z| \leqslant 6. \tag{3.18}$$

Оценка (3.17) следует из (3.7), (3.9)—(3.15), а оценка (3.18) — из (3.7), (3.12)—(3.15).

Покажем, что функция u удовлетворяет (3.2)—(3.5).

Равенство (3.2) следует из (3.15), оценка (3.3) — из (3.6), (3.13) и (3.16), оценка (3.4) — из (3.9) и (3.13). При $1 \leqslant r \leqslant 4$ в силу (3.14), (3.12) и (3.18):

$$\|u^-(re^{i\theta})\| = c\|v^*(re^{i\theta})\| \geqslant c_{10}(r-1)^{\beta} \geqslant c_{11}\|u^+(re^{i\theta})\|,$$

а при $r \geqslant 4$ в силу (3.14), (3.10), (3.11) и (3.3)

$$\|u^-(re^{i\theta})\| = c\|v^*(re^{i\theta})\| \geqslant c_{12}r^{\alpha} \geqslant c_{12}\|u^-(re^{i\theta})\|,$$

таким образом, неравенство (3.5) доказано. Лемма доказана.

Для доказательства теоремы 2 нам потребуется несколько изменить функцию u, заменив неравенство (3.5) на «противоположное» неравенство (3.23).

Лемма 3.6. *Для любого* $\alpha \in \left(\frac{1}{2},\ \frac{6}{11}\right)$ *существует постоянная* $\varkappa > 0$, *и последовательности* (u_n) $u_n \in S$, *и* (s_n), $1 < s_n < 2$, $n \in \mathbf{N}$, *такие, что функции* u_n *удовлетворяют следующим условиям:*

$$u_n(z) \equiv 0, \quad |z| \leqslant 1; \tag{3.19}$$

$$|u_n(z)| \leqslant c_{13}|z|^{\alpha}, \quad z \in \mathbf{C}; \tag{3.20}$$

$$|u_n(z)| \leqslant c_{14}(|z|-1)^{\beta}, \quad 1 \leqslant |z| \leqslant 6, \quad \beta = \alpha/(2\alpha-1); \tag{3.21}$$

$$B(r,\ u_n) \geqslant \|u_n^+(re^{i\theta})\| \geqslant c_{15}r^{\alpha}, \quad r \geqslant 4; \tag{3.22}$$

$$\|u_n^-(s_ne^{i\theta})\| \leqslant \frac{1}{n}\|u_n^+(s_ne^{i\theta})\|; \tag{3.23}$$

$$u_n(re^{i\theta}+1) \leqslant -\varkappa B(r+1,\ u_n), \tag{3.24}$$

$$r>0, \quad |\theta| \leqslant \pi/(4\beta), \quad \varkappa>0.$$

Доказательство. Будем использовать области и функции, построенные при доказательстве леммы 3.5.

Для каждого t, $1 < t < 2$, пусть $G_t = \{z : \operatorname{Re} z < 0,\ t < |z| < 3\}$. Заменим в полукольце G_t функцию u на ее наименьшую гармоническую мажоранту. Полученную функцию обозначим через ω_t. Легко видеть, что

$$\omega_t \rightrightarrows \omega_1, \quad t \to 1, \tag{3.25}$$

равномерно в C.

Введем секторы $H_k = \left\{z : z \exp\left(-i\pi\left(\frac{3}{4} + \frac{k}{2\pi}\right)\right) \in D_1,\ \ |z| < 3\right\}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, и функции

$$v_k(z) = \begin{cases} -u\left(z \exp\left(-i\pi\left(\frac{3}{4} + \frac{k}{2\pi}\right)\right)\right), & z \in H_k, \\ 0,\ z \notin H_k, & |z| < 3. \end{cases} \tag{3.26}$$

Это положительные гармонические в H_k функции, субгармонические при $|z| < 3$. В силу (3.12) и (3.14)

$$0 \leqslant v_k(z) \leqslant c_{16}(|z| - 1)^{\beta}, \quad z \in G_1. \tag{3.27}$$

С другой стороны,

$$\omega_1(z) \geqslant c_{17}(|z| - 1),\ z \in G_1 \cap \{z : |\pi - \arg z| \leqslant 0{,}4\pi\},$$

чтобы убедиться в этом, достаточно к ω_1 применить модификацию леммы 3.1, в которой D на своей границе содержит дугу окружности вместо интервала l. Поэтому найдется такое число r_1, $1 < r_1 < 2$, что $\omega_1(z) > 2v_k(z)$, $|z| = r_1$, $z \in G_1$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Теперь из (3.25) заключаем, что найдется настолько близкое к 1 число $r_2 < r_1$, что

$$\min\{\omega_{r_2}(r_1 e^{i\theta}) : 0{,}6\pi \leqslant \theta \leqslant 1{,}4\pi\} > B(r_1, v_0) = \ldots = B(r_1, v_n). \tag{3.28}$$

Отметим, что числа r_1, r_2 не зависят от n.

Определим теперь функцию u_n:

$$u_n(z) = \begin{cases} \omega_{r_2}(z), & |z| > r_1; \\ \max\{\omega_{r_2}, v_0, \ldots, v_n\}, & |z| \leqslant r_1. \end{cases} \tag{3.29}$$

Эта функция субгармонична при $|z| > r_1$, так как $\omega_{r_2} \in S$, а при $|z| < r_1$ — как верхняя огибающая конечного семейства субгармонических функций. Наконец, u_n субгармонична в окрестности окружности $\{z : |z| = r_1\}$ потому, что в силу (3.28) и (3.29) в некоторой окрестности этой окружности она совпадает с ω_{r_2}. Итак, $u_n \in S$. Отметим сразу же, что при $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ или $|z| \geqslant 3$ справедливо

$$u_n(z) \equiv u(z). \tag{3.30}$$

Покажем, что для функции u_n выполняются соотношения (3.19)—(3.24). По построению выполняется (3.19). В силу (3.30) и (3.3) неравенство (3.20) выполняется при $|z| \geqslant 3$, а в силу (3.19) — и при $|z| < 3$ (возможно, с другим значением постоянной c_{13}). Неравенство (3.21) при $1 \leqslant |z| \leqslant r_2$ и при $3 \leqslant |z| \leqslant 6$

следует из (3.18), (3.27), (3.29) и (3.30), следовательно, оно верно и при $1 \leqslant |z| \leqslant 6$. Оценка (3.22) с $c_{15} = c_3$ немедленно следует из (3.4) и (3.30).

Число $s_n < r_2$ выберем настолько близким к единице, чтобы множества $H_k \cap \{z : |z| = s_n\}$ попарно не пересекались. Тогда в силу (3.30), (3.29) и (3.26) выполняется $u_n(z) \geqslant 0$ при $\operatorname{Re} z < 0$ и

$$\| u_n^- (s_n e^{i\theta}) \| = \| u^- (s_n e^{i\theta}) \| \leqslant \frac{1}{n} ((n+1) \| u^- (s_n e^{i\theta}) \| +$$
$$+ \| u^+ (s_n e^{i\theta}) \|) = \frac{1}{n} \| u_n^+ (s_n e^{i\theta}) \|,$$

что дает (3.23).

Наконец, в силу (3.30), (3.17), (3.8), (3.26), (3.21) и (3.29) при $|\theta| \leqslant \pi/(4\beta)$ $u_n(1 + re^{i\theta}) = u(1 + re^{i\theta}) \leqslant -\varkappa_1 B(1+r, u) \leqslant -\varkappa_1 c_{18} \times \times B(1 + r, u_n)$, что дает (3.24) с $\varkappa = \varkappa_1 c_{18}$. Лемма 3.6 доказана.

Доказательство теоремы 2. Сначала построим функцию $U \in S$ порядка ρ, $\frac{1}{2} < \rho \leqslant 1$, такую, что

$$\varliminf_{r \to \infty} \| U^- (re^{i\theta}) \| / \| U^+ (re^{i\theta}) \| = 0, \qquad (3.31)$$

но в то же время

$$\varliminf_{r \to \infty} \min \{ U^- (z) : |z| = r,\ z \in K \} / B(r, U) > 0, \qquad (3.32)$$

где $K = \{z : \operatorname{Re} z > 0,\ |\operatorname{Im} z| < \ln |z|,\ |z| > 1\}$.

Если $\rho < 6/11$, то положим $\alpha = \rho$, если же $\rho \geqslant 6/11$, то в качестве α возьмем произвольное число $1/2 < \alpha < 6/11$. Тогда согласно лемме 3.6 найдутся функции u_n и числа s_n, для которых выполняется (3.19)—(3.24). Положим $p_n = \| u_n^+ (s_n e^{i\theta}) \|$.

Построим индуктивно последовательности положительных неограниченно возрастающих чисел (A_k), (T_k). Положим $A_1 = T_1 = 1$. Если числа $A_1, \ldots, A_{n-1}, T_1, \ldots, T_{n-1}$ уже выбраны, то выберем T_n, $n \geqslant 2$ с соблюдением следующих условий:

$$\ln T_n \geqslant n \sum_{k=1}^{n-1} A_k; \qquad (3.33)$$

$$\ln T_n \geqslant A_{n-1}/p_n; \qquad (3.34)$$

положим теперь

$$A_n = T_n^{\rho} \ln T_n, \quad n \geqslant 2. \qquad (3.35)$$

Положим $U_k(z) = A_k u_k (z/T_k)$, $U(z) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(z)$. В силу (3.19) этот ряд сходится равномерно на каждом компакте, следовательно, $U \in S$.

Пусть далее $T_n \leqslant |z| = r < T_{n+1}$. Тогда

$$U(z) = U_{n-1}(z) + U_n(z) + o(1) \| U_{n-1}^+ (re^{i\theta}) \|, \quad n \to \infty, \quad (3.36)$$

равномерно по z. Действительно, в силу (3.19), (3.20), (3.33), (3.35) и (3.22) имеем

$$|U(z)-U_{n-1}(z)-U_n(z)|\leqslant \sum_{k=1}^{n-2} A_k|u_k(z/T_k)|\leqslant c_{13}r^\alpha \sum_{k=1}^{n-2} A_k\leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_{13}}{n}r^\alpha \ln T_{n-1}\leqslant \frac{c_{13}}{n}A_{n-1}\frac{r^\alpha}{T_{n-1}^\rho}\leqslant \frac{c_{13}}{n}A_{n-1}\frac{r^\alpha}{T_{n-1}^\alpha}\leqslant c_{19}n^{-1}\|U_{n-1}^+(re^{i\theta})\|.$$

Если же $T_ns_n\leqslant r=|z|<T_{n+1}$, то

$$U(z)=U_n(z)+o(1)\|U_n^+(re^{i\theta})\|,\quad n\to\infty, \tag{3.37}$$

также равномерно по z. Действительно, пусть сперва $T_ns_n\leqslant r\leqslant 5T_n$. Тогда в силу (3.20), (3.34) и (3.35) имеем

$$|U_{n-1}(z)|\leqslant c_{13}A_{n-1}\frac{r^\alpha}{T_{n-1}^\alpha}\leqslant c_{20}A_{n-1}\frac{T_n^\alpha}{T_{n-1}^\alpha}\leqslant c_{20}p_n\frac{T_n^\alpha}{T_{n-1}^\alpha}\ln T_n\leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_{20}}{T_{n-1}^\alpha}A_np_n=\frac{c_{20}}{T_{n-1}^\alpha}\|U_n^+(T_ns_ne^{i\theta})\|,$$

что вместе с (3.36) дает (3.37). Если же $5T_n\leqslant r\leqslant T_{n+1}$, то, используя (3.20), (3.33), (3.35), (3.22) получаем

$$|U_{n-1}(z)|\leqslant c_{13}A_{n-1}\frac{r^\alpha}{T_{n-1}^\alpha}\leqslant \frac{c_{13}}{n}r^\alpha \ln T_n=\frac{c_{13}}{n}\frac{A_nr^\alpha}{T_n^\rho}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_{13}}{n}A_n\frac{r^\alpha}{T_n^\alpha}\leqslant \frac{c_{21}}{n}\|U_n^+(re^{i\theta})\|,$$

что вместе с (3.36) опять дает (3.37).

Теперь найдем порядок функции U. В силу (3.36) и (3.35) имеем при $T_n\leqslant r<T_{n+1}$ $B(r,U)\leqslant (1+o(1))B(r,U_{n-1})+$ $+B(r,U_n)\leqslant (1+o(1))c_{13}\frac{A_{n-1}}{T_{n-1}^\alpha}r^\alpha+c_{13}\frac{A_n}{T_n^\alpha}r^\alpha\leqslant (1+o(1))c_{13}r^\alpha T_{n-1}^{\rho-\alpha}\times$ $\times \ln T_{n-1}+c_{13}r^\alpha T_n^{\rho-\alpha}\ln T_n\leqslant c_{22}r^\alpha T_n^{\rho-\alpha}\ln T_n\leqslant c_{22}r^\rho \ln r$. С другой стороны, в силу (3.37), (3.34), (3.35) при $n\to\infty$ $B(T_ns_n, U)\geqslant$ $\geqslant (1+o(1))\|U_n^+(T_ns_ne^{i\theta})\|=(1+o(1))A_np_n\geqslant (1+o(1))\frac{A_{n-1}}{\ln T_n}T_n^\rho \ln T_n\geqslant$ $\geqslant (1+o(1))T_n^\rho\geqslant (2^{-\rho}+o(1))(T_ns_n)^\rho$. Поэтому порядок функции U равен ρ.

Далее, используя (3.37) и (3.23), получаем при $n\to\infty$

$$\|U^-(T_ns_ne^{i\theta})\|\leqslant \|U_n^-(T_ns_ne^{i\theta})\|+o(1)\|U_n^+(T_ns_ne^{i\theta})\|\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{n}+o(1)\right)\|U_n^+(T_ns_ne^{i\theta})\|=o(1)\|U^+(T_ns_ne^{i\theta})\|, \tag{3.38}$$

что дает (3.31).

Теперь докажем оценку (3.32). Пусть сперва $T_n \leqslant r = |z| \leqslant \leqslant T_n + \ln^3 T_n$. Тогда в силу (3.21), (3.35)

$$|U_n(z)| \leqslant c_{14} A_n \left(\frac{|z|}{T_n} - 1\right)^{\beta} \leqslant c_{14} A_n \frac{\ln^{3\beta} T_n}{T_n^{\beta}} =$$
$$= c_{14} T_n^{\rho-\beta} \ln^{3\beta+1} T_n = o(1), \quad n \to \infty, \tag{3.39}$$

так как $\rho \leqslant 1 < 6 < \beta$. Поэтому в силу (3.36), (3.20), (3.22) и (3.24) имеем

$$U(z) = U_{n-1}(z) + o(1) B(r, U_{n-1}) \leqslant -(\varkappa + o(1)) B(r, U),$$

если $z \in K$, т. е. условие (3.32) выполняется. Пусть теперь $T_n + \ln^3 T_n \leqslant r = |z| < T_{n+1}$, $z \in K$. В этом случае ввиду (3.26), (3.20), (3.22), (3.24) выполняется при $n \to \infty$: $U(z) = U_{n-1}(z) + U_n(z) + o(1) \| U_{n-1}^{+}(re^{i\theta}) \| \leqslant (-\varkappa + o(1)) B(r, U_{n-1}) - \varkappa B(T_n + |z - T_n|, U_n) \leqslant (-\varkappa + o(1)) B(r, U_{n-1}) - \varkappa B(r, U_n) \leqslant (-\varkappa + o(1)) B(r, U)$. Таким образом, неравенство (3.32) доказано.

Воспользовавшись теоремой Ю, аппроксимируем функцию $U \in S$ логарифмом модуля целой функции f так, чтобы выполнялось (2.17). Легко видеть, что порядок целой функции f также равен ρ. Так как $U_n(-r) \geqslant 0$, $r \geqslant 0$, $n \in N$, то $B(r, U) \geqslant U(-r) \geqslant U_1(-r) = u_1(-r) \geqslant c_5 (r+1)^{\alpha}$ при $r \geqslant 4$ в силу (3.9), (3.13), (3.30).

В силу (3.36), (3.19), (3.20), (3.35) и (3.33) выполняется $B(T_n, U) = (1 + o(1)) B(T_n, U_{n-1}) \leqslant (c_{13} + o(1)) A_{n-1} \dfrac{T_n^{\alpha}}{T_{n-1}^{\alpha}} \leqslant (c_{13} + o(1)) T_n^{\alpha} \ln T_n$, $n \to \infty$, поэтому нижний порядок функции U равен α.

Заметим теперь, что

$$\| U(re^{i\theta}) - \ln |f(re^{i\theta})| \| = o(r^{\alpha}), \quad r \to \infty. \tag{3.40}$$

Действительно, пу ть $E(r)$ — пересечение исключительного множества из теоремы Ю с окружностью $\{z : |z| = z\}$. Тогда в силу (2.17) и уже использовавшейся в п. 2 теоремы Эдрея и Фукса о малых дугах [4, с. 58] в применении как к U, так и к f, имеем

$$\| U(re^{i\theta}) - \ln |f(re^{i\theta})| \| = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int\limits_{[0, 2\pi) \setminus E(r)} + \int\limits_{E(r)} \right\} | U(re^{i\theta}) -$$
$$- \ln |f(re^{i\theta})| | \, d\theta = O(\ln^2 r) + O(r^{\rho-1} \ln r) = o(r^{\alpha}), \quad r \to \infty.$$

Теперь из (3.38) и (3.40) получаем

$$m(T_n s_n, 0, f) \leqslant \| U^{-}(T_n s_n e^{i\theta}) - \ln^{-} |f(T_n s_n e^{i\theta})| \| + \| U^{-}(T_n s_n e^{i\theta}) \| =$$
$$= o(T_n^{\alpha}) + o(1) \| U^{+}(T_n s_n e^{i\theta}) \| \leqslant o(T_n^{\alpha}) + o(1) \| U^{+}(T_n s_n e^{i\theta}) -$$
$$- \ln^{+} |f(T_n s_n e^{i\theta})| \| + o(1) \| \ln^{+} |f(T_n s_n e^{i\theta})| \| = o(T_n^{\alpha}) +$$
$$+ o(1) T(T_n s_n, f) = o(1) T(T_n s_n, f), \quad n \to \infty,$$

что дает $\delta(0, f) = 0$.

Так как $E \in (\sigma)$, то при достаточно больших r множество E не может целиком покрывать дугу $\{z : |z| = r\} \cap K$. Поэтому из (3.32) следует, что $\beta(0, f) > 0$.

Искомая функция построена для любого ρ, $1/2 < \rho \leqslant 1$. Рассматривая функции $g(z) = f(z^n)$, $n \in N$, можно получить любой наперед заданный порядок $\rho > 1/2$. Теорема 2 доказана.

Замечание 3.1. При $\rho < 6/11$ нижний порядок построенной функции f совпадает с ρ. При $6/11 \leqslant \rho \leqslant 1$ этого можно добиться, усложнив построение вспомогательных функций u_n из леммы 3.6.

Замечание 3.2. Для построенной функции f выполняется

$$\varliminf_{r \to \infty} \ln^{-} |f(r)| / \ln M(r, f) > 0. \tag{3.41}$$

Действительно, пусть

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \{z : |z - z_k| < r_k\}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} r_k \leqslant M, \tag{3.42}$$

где E — исключительное множество из теоремы Ю (см. [1]). Заметим, что в круге $\{z : |z - r| \leqslant 2M + 1\}$ найдется окружность $\{z : |z - r| = t\}$, не пересекающаяся с E. Теперь в силу теоремы о среднем, теоремы Ю, (3.36) и (3.22) при $n \to \infty$ выполняется

$$\ln |f(r)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |f(r + te^{i\psi})| \, d\psi \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(r + te^{i\psi}) \, d\psi +$$

$$+ o(r^{\alpha}) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U_{n-1}(r + te^{i\psi}) \, d\psi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U_n(r + te^{i\psi}) \, d\psi +$$

$$+ o(1) B(r, U_{n-1}), \tag{3.43}$$

если $T_n \leqslant r \leqslant T_{n+1}$. Если теперь $T_n \leqslant r \leqslant T_n + \frac{1}{2} \ln^3 T_n$, то при $n \geqslant n_0$ выполняется $r + t \leqslant r + 2M + 1 \leqslant T_n + \ln^3 T_n$ и в силу (3.43), (3.39), (3.24), (3.20) и (3.22) имеем

$$\ln |f(r)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U_{n-1}(r + te^{i\psi}) \, d\psi + o(1) B(r, U_{n-1}) \leqslant$$

$$\leqslant -\varkappa B(T_{n-1} + |r - T_{n-1} + te^{i\psi}|, U_{n-1}) + o(1) B(r, U_{n-1}) \leqslant$$

$$\leqslant -\varkappa B(r - 2M - 1, U_{n-1}) + o(1) B(r, U_{n-1}) \leqslant$$

$$\leqslant (-c_{24} + o(1)) B(r, U_{n-1}) = (-c_{24} + o(1)) B(r, U). \tag{3.44}$$

Пусть теперь $T_n + \frac{1}{2} \ln^3 T_n \leqslant r \leqslant T_{n+1}$. Тогда при $|\psi| \leqslant \pi/2$ имеем $r \leqslant |r + te^{i\psi}| \leqslant T_n + |r - T_n + te^{i\psi}|$. В силу (3.43), (3.24), (3.36), неравенства $U_n(r + te^{i\psi}) \leqslant 0$ и уже приведенных оценок при $n \to \infty$ имеем

$$\ln|f(r)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} U_{n-1}(r+te^{i\psi})\,d\psi + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} U_n(r+te^{i\psi})\,d\psi +$$

$$+o(1)\,B(r,\,U_{n-1}) \leqslant (-c_{24}+o(1))\,B(r,\,U_{n-1}) -$$

$$-\frac{\varkappa}{2}\,B(T_n+|r-T_n+te^{i\psi}|,\,U_n) \leqslant (-c_{24}+o(1))\,B(r,\,U_{n-1}) -$$

$$-\frac{\varkappa}{2}\,B(r,\,U_n) \leqslant (-c_{25}+o(1))\,B(r,\,U). \qquad (3.45)$$

В силу леммы (2.2) и теоремы Ю из [1] выполняется

$$\ln M(r,\,f) \sim B(r,\,U),\ r\to\infty. \qquad (3.46)$$

Теперь (3.41) следует из (3.44)—(3.46).

Доказательство теоремы 3 полностью повторяет доказательство теоремы 2 с той только разницей, что функции u_n из леммы 3.6 нужно заменить на функцию u из леммы 3.5, неравенство (3.32) не нужно, а оценку (3.31) нужно заменить неравенством $\|U^-(re^{i\theta})\| \geqslant (\delta+o(1))\,\|U^+(re^{i\theta})\|,\ r\to\infty,\ \delta>0$, выполняющимся в силу (3.5). В силу этого неравенства для целой функции f, входящей в (3.40), выполняется $\delta(0,\,f)>0$. Далее, из (3.2), (3.3), (3.35) и (3.36) следует, что

$$B(T_n,\,U) = (1+o(1))\,B(T_n,\,U_{n-1}) \leqslant \frac{1+o(1)}{T_{n-1}^{\alpha}}\,T_n^{\alpha}\ln T_n,\quad n\to\infty.$$

Теперь в силу (3.37), (3.4) и (3.35) выполняется $\|U^+(4T_ne^{i\theta})\| = (1+o(1))\,\|U_n^+(4T_ne^{i\theta})\| \geqslant (c_{26}+o(1))\,A_n = (c_{26}+o(1))\,T_n^{\rho}\ln T_n \geqslant (c_{26}+o(1))\,T_{n-1}^{\alpha}\,B(T_n,\,U)$. Отсюда и из (3.40) заключаем, что функция f удовлетворяет всем требованиям теоремы 3.

4. Доказательство теоремы 4. Пусть $2<\mu<\infty$, $\eta = \frac{1}{2}\min\left(\frac{\pi}{\mu},\ \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{\mu}\right)$. Рассмотрим области

$$D_1 = \left\{z = 1+re^{i\theta} : r>0,\ |\theta| < \eta+\frac{\pi}{\mu}\right\},$$

$$D_2 = \left\{z = -1+re^{i\theta} : r>0,\ |\theta-\pi| < \frac{\pi}{2\mu}\right\}.$$

Положим

$$w_1(z) = \begin{cases} r^{\mu}\sin\mu(|\theta|-\eta), & z\in D_1;\\ 0,\ z\in \boldsymbol{C}\setminus D_1;\end{cases}$$

$$w_2(z) = \begin{cases} r^{\mu}\cos\mu(\theta-\pi), & z\in D_2,\\ 0,\ z\in \boldsymbol{C}\setminus D_2.\end{cases}$$

Рассмотрим функцию $w = w_1 + w_2$, заданную в $\boldsymbol{C}$. Ясно, что $w\in S$. Построенная функция обладает следующими свойствами:

$$w(z) = 0,\quad |z|\leqslant 1; \qquad (4.1)$$

$$|w(z)| \leqslant |z|^{\mu},\quad z\in\boldsymbol{C}; \qquad (4.2)$$

$$\|w^-(re^{i\theta})\| \geqslant \delta\,\|w^+(re^{i\theta})\|,\quad r\geqslant 1, \qquad (4.3)$$

где положительная постоянная δ зависит только от μ. Далее

$$w(-t+e^{i\theta}) \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad t>0; \tag{4.4}$$

$$\| w^+(-t+e^{i\theta}) \| \geqslant \alpha t^{\mu+1}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1; \tag{4.5}$$

$$\| w^+(re^{i\theta}) \| \geqslant \beta r^{\mu}, \quad r \geqslant 2; \tag{4.6}$$

$$\| w^+(re^{i\theta}) \| \geqslant \gamma (r-1)^{\mu+1}, \quad 1 \leqslant r \leqslant 2, \tag{4.7}$$

где положительные числа α, β, γ зависят только от μ. Пусть $R_k \geqslant 2$, $R_k \uparrow \infty$, $a_k > 0$, $u_k(z) = a_k w(z/R_k)$. В силу (4.1) ряд

$$u(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$$

сходится равномерно на компактах в $\boldsymbol{C}$ и $u(z) \in S$.

Положим $a_k = R_k^{2\mu+1} \ln^2 R_k$, а последовательность (R_k) выберем так, чтобы выполнялось при $k \geqslant 2$

$$\ln R_k > \max\{2^k, R_{k-1}^{2\mu+1} \ln^2 R_{k-1}\} = \max\{2^k, a_{k-1}\}. \tag{4.8}$$

Оценим порядок функции u. Если $|z| \geqslant R_k$, то в силу (4.2) и (4.8)

$$u_k(z) \leqslant R_k^{2\mu+1} \ln^2 R_k \frac{|z|^{\mu}}{R_k^{\mu}} \leqslant |z|^{2\mu+1} \ln^2 |z| \leqslant 2^{-k} |z|^{2\mu+1} (\ln^+ |z|)^3.$$

Если $|z| < R_k$, то ввиду (4.1) последнее неравенство, очевидно, выполняется. Таким образом, порядок функции u не превосходит $2\mu+1$. Так как все $u_k(-r) \geqslant 0$ при $r>0$, то

$$u(-2R_k) \geqslant u_k(-2R_k) = R_k^{2\mu+1} (\ln^2 R_k)\, w(-2) = R_k^{2\mu+1} (\ln^2 R_k).$$

Следовательно, порядок функции u равен $2\mu+1$.

Покажем, что функция u имеет положительный дефект. Пусть $r \geqslant R_1$. Число k выберем так, чтобы $R_k \leqslant r < R_{k+1}$.

Пусть сперва $2R_k \leqslant r < R_{k+1}$. В силу (4.6) имеем

$$\| u_k^+(re^{i\theta}) \| = R_k^{2\mu+1} \ln^2 R_k \left\| w^+\left(\frac{r}{R_k} e^{i\theta}\right) \right\| \geqslant \beta R_k^{\mu+1} (\ln^2 R_k)\, r^{\mu}. \tag{4.9}$$

С другой стороны, $u_m(re^{i\theta}) = 0$ при $m>k$ в силу (4.1) и, кроме того, в силу (4.2), (4.8) и (4.9) имеем

$$\left| \sum_{j=1}^{k-1} u_j(re^{i\theta}) \right| \leqslant (k-1) R_{k-1}^{\mu+1} \ln^2 R_{k-1} r^{\mu} =$$

$$= (k-1) R_{k-1}^{\mu+1} (\ln^2 R_{k-1})\, r^{\mu} = o(\| u_k^+(re^{i\theta}) \|), \quad k \to \infty, \tag{4.10}$$

равномерно по $r \in [2R_k, R_{k+1}]$. Следовательно, при таких r в силу (4.3) имеем

$$\| u^-(re^{i\theta}) \| \geqslant (\delta + o(1)) \| u^+(re^{i\theta}) \|, \quad r \to \infty. \tag{4.11}$$

Пусть теперь $R_k+1\leqslant r<2R_k$. В силу (4.7) имеем

$$\|u_k^+(re^{i\theta})\|=R_k^{2\mu+1}\ln^2 R_k\left\|w^+\left(\frac{r}{R_k}e^{i\theta}\right)\right\|\geqslant$$
$$\geqslant R_k^{2\mu+1}\ln^2 R_k\|w^+((1+R_k^{-1})e^{i\theta})\|\geqslant$$
$$\geqslant \gamma R_k^{2\mu+1}\ln^2 R_k R_k^{-\mu-1}=\gamma R_k^{\mu}\ln^2 R_k.$$

С другой стороны, при $r<2R_k$ в силу (4.2), (4.8) и предыдущей оценки выполняется

$$\left|\sum_{j=1}^{k-1}u_j(re^{i\theta})\right|\leqslant(k-1)R_{k-1}^{2\mu+1}(\ln^2 R_{k-1})\left(\frac{2R_k}{R_{k-1}}\right)^{\mu}=$$
$$=2^{\mu}(k-1)R_{k-1}^{\mu+1}(\ln^2 R_{k-1})R_k^{\mu}=o(1)\|u_k^+(re^{i\theta})\|,\quad k\to\infty,$$

равномерно по $r\in[R_k+1,\ 2R_k]$. Таким образом, в силу (4.3) и в этом случае выполняется оценка (4.11).

Рассмотрим оставшийся случай $R_k\leqslant r<R_k+1$. Из (4.10) с заменой $k-1$ на $k-2$ следует, что $\|\sum_{j=1}^{k-2}u_j(re^{i\theta})\|=o(\|u_{k-1}^+(re^{i\theta})\|)$, $k\to\infty$.

Предположим, что $\|u_k^+(re^{i\theta})\|\geqslant\|u_{k-1}^+(re^{i\theta})\|$. Тогда

$$\|u^+(re^{i\theta})\|\leqslant(1+o(1))\|u_{k-1}^+(re^{i\theta})\|+\|u_k^+(re^{i\theta})\|\leqslant$$
$$\leqslant(2+o(1))\|u_k^+(re^{i\theta})\|,\quad r\to\infty. \tag{4.12}$$

Заметим, что если $u_k(z)<0$, то и $u_j(z)<0$ при $1\leqslant j\leqslant k-1$. Отсюда и из (4.1), (4.3), (4.12) следует, что $\|u^-(re^{i\theta})\|\geqslant\|u_k^-(re^{i\theta})\|\geqslant$

$$\geqslant\delta\|u_k^+(re^{i\theta})\|\geqslant\left(\frac{\delta}{2}+o(1)\right)\|u^+(re^{i\theta})\|,\quad r\to\infty.$$

Если же $\|u_k^+(re^{i\theta})\|<\|u_{k-1}^+(re^{i\theta})\|$, то так, как (4.12), получаем $\|u^+(re^{i\theta})\|\leqslant(2+o(1))\|u_{k-1}^+(re^{i\theta})\|$, $r\to\infty$. Достаточно малое число $\varepsilon>0$ выберем так, чтобы $u_k(re^{i\theta})=0$, $r\in[R_k,\ R_k+1]$, $|\theta|\in\left[\varepsilon,\ \frac{\pi}{2}\right]$;

$$I(r)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\theta|\geqslant\varepsilon}u_{k-1}^-(re^{i\theta})\,d\theta\geqslant\frac{1}{2}\|u_{k-1}^-(re^{i\theta})\|,\quad r\in[R_k,\ R_k+1].$$

Тогда при $k\to\infty$ $\|u^-(re^{i\theta})\|\geqslant o(\|u_{k-1}^+(re^{i\theta})\|)+\|(u_{k-1}(re^{i\theta})+$ $+u_k(re^{i\theta}))^-\|\geqslant o(\|u_{k-1}^+(re^{i\theta})\|)+I(r)\geqslant o(\|u_{k-1}^+(re^{i\theta})\|)+\frac{1}{2}\times$ $\times\|u_{k-1}^-(re^{i\theta})\|\geqslant\left(\frac{\delta}{2}+o(1)\right)\|u_{k-1}^+(re^{i\theta})\|\geqslant\left(\frac{\delta}{4}+o(1)\right)\|u^+(re^{i\theta})\|.$

(4.13)

Таким образом, из (4.11)—(4.13) следует, что функция u имеет положительный дефект.

Покажем, что дефект функции $u(z-1)$ равен 0. Имеем

$$\left|\sum_{j=1}^{k-1} u_j (R_k e^{i\theta} - 1)\right| \leqslant (k-1) R_{k-1}^{2\mu+1} \ln^2 R_{k-1} 2^\mu \frac{R_k^\mu}{R_{k-1}^\mu} =$$
$$= 2^\mu (k-1) R_{k-1}^{\mu+1} \ln^2 R_{k-1} R_k^\mu. \qquad (4.14)$$

Далее, в силу (4.5) $\| u_k^+ (R_k e^{i\theta} - 1) \| = R_k^{2\mu+1} \ln^2 R_k \left\| w^+ \left(e^{i\theta} - \frac{1}{R_k}\right) \right\| \geqslant$ $\geqslant \alpha R_k^{2\mu+1} \ln^2 R_k R_k^{-\mu-1} = \alpha R_k^\mu \ln^2 R_k$. Поэтому из (4.14), (4.1) и (4.8) заключаем, что при $k \to \infty$ $|u(R_k e^{i\theta} - 1) - u_k (R_k e^{i\theta} - 1)| = o(\| u_k^+ (R_k e^{i\theta} - 1) \|)$. Но в силу (4.4) $u_k (R_k e^{i\theta} - 1) \geqslant 0$, таким образом, при $k \to \infty$ $\| u^- (R_k e^{i\theta} - 1) \| = o(\| u_k^+ (R_k e^{i\theta} - 1) \|) = o(\| u^+ (R_k e^{i\theta} - 1) \|)$, что и требовалось.

Изменяя некоторые из этапов доказательства теоремы Р. С. Юлмухаметова [5], можно получить следующую теорему*.

Теорема Ю′. *Для произвольной субгармонической функции $v(z)$ конечного порядка существует целая функция f, удовлетворяющая асимптотическому неравенству:*

$$\| v(re^{i\theta} - a) - \ln |f(re^{i\theta} - a)| \| = O(\ln^2 r), \quad r \to \infty$$

для каждого $a \in \mathbf{C}$.

Применив эту теорему к построенной субгармонической функции $u(z)$, получаем целую функцию f, для которой справедливо утверждение теоремы 4.

Замечание 4.1. При $r > 0$ выполняется $w(-r) \geqslant 0$. Поэтому при $r \geqslant 2R_1$ справедливо

$$u(-r) \geqslant u_1(-r) \geqslant \varkappa r^\mu, \quad \varkappa > 0.$$

Следовательно, нижний порядок функции u, а вместе с ней и f не меньше, чем $\mu = (\rho - 1)/2$.

Основные результаты настоящей работы, теоремы 1 и 2, анонсированы авторами в ДАН УССР, 1984, № 10, с. 3—5.

Список литературы: 1. *Гольдберг А. А. и др.* Исключительные значения в смысле Р. Неванлинны и в смысле В. П. Петренко, I / А. А. Гольдберг, А. Э. Еременко, М. Л. Содин // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1987. — Вып. 47. — С. 77—80. 2. *Евграфов М. А.* Асимптотические оценки и целые функции. — М.: Наука. — 1979. — 320 с. 3. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции. — М.: Мир. — 1980. — 304 с. 4. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. — М.: Наука. — 1970. — 591 с. 5. *Юлмухаметов Р. С.* Приближение субгармонических функций // Мат. сб. — 1984. — Т. 124, № 3. — С. 393—415.

Поступила в редколлегию 16.10.85

* В случае $a = 0$ эта теорема доказана в дипломной работе Л. М. Пшеницкой, С. С. Сичак, Г. В. Якимец, выполненной в 1985 г. в Львовском госуниверситете под руководством первого из соавторов.