УДК 519.2

Г. П. ЧИСТЯКОВ

О ФАКТОРИЗАЦИИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ КЛАССА L Ю. В. ЛИННИКА. 2

Настоящая работа — продолжение работы [1], и ее цель — доказать теорему 5, из которой, как было показано, следует достаточность условий теоремы 1. Остаются прежними все обозначения работы [1] и нумерация формул, а положительные величины, зависящие только от ф. р. $\Lambda(x)$, $F_j(x)$, $j=1, 2$, из (6), от параметра r из (2), независимо от их величины, обозначаются одной буквой B.

Пусть выполнено условие а) теоремы 5. Приступим к исследованию функций $F_{jT}(x)$, $j=1, 2$. Поскольку для функций о. в. $\Lambda_T(x)$, $F_{jT}(x)$, $j=1, 2$, $Q_T(x)$ выполняется условие (5) с $r_1=\frac{1}{2}r$ с помощью теорем 2.2.3, 2.2.4 [2, с. 38—41], приходим к заключению, что их х. ф. допускают аналитическое продолжение в полуплоскость $t \in C^1$, $\operatorname{Im} t < \frac{1}{2}r$, при этом аналитическое продолжение осуществляется с помощью интегралов, которыми они задаются для вещественных t.

§ 4. Получение основного теоретико-функционального соотношения для х. ф. $\varphi(t;\, F_{jT})$. В этом параграфе в параметрах M_T, N_T индекс T будем опускать. Обозначим через $V_T(x)$ функцию о. в.:

$$V_T(x) = (F_{1T} \ast F_{2T})(x) - (Q_T \ast \Lambda_T)(x).$$

Для комплексных t, $-T < \operatorname{Im} t < \frac{1}{2}r$, справедлива оценка

$$\left|\varphi(t;\ V_T)\right| \leqslant \left|\int\limits_0^{2M} e^{itx}dV_T(x)\right| + \left|\int\limits_{-\infty}^{0} \ldots\right| + \left|\int\limits_{2M}^{\infty} \ldots\right| = \\ = S_1(t) + S_2(t) + S_3(t). \tag{4.1}$$

Из неравенства (9) приходим к такому соотношению для t, $\operatorname{Im} t \geqslant -\frac{1}{4}T$,

$$S_1(t) \leqslant \operatorname{Var} V_T \cdot \{1 + \exp(-2M \operatorname{Im} t)\} \leqslant 2\exp\left(-\frac{1}{2}TM\right). \tag{4.2}$$

Для t, $\operatorname{Im} t \leqslant \frac{1}{4} r$, получаем

$$S_2(t) \leqslant \operatorname{Var} V_T \cdot e^{\frac{1}{2} TM} + \int\limits_{-\infty}^{-2TM/r} e^{-\frac{1}{4} rx} d(F_{1T} \ast$$

$$\ast F_{2T})(x) + \int\limits_{-\infty}^{-2TM/r} e^{-\frac{1}{4} rx} d(Q_T \ast \Lambda_T)(x). \tag{4.3}$$

Для любых неубывающих функций о. в. $V_j(x)$, $j = 1, 2$, для которых выполняется (5) с $r_1 = \frac{1}{2} r$, имеют место простые неравенства:

$$\int\limits_{-\infty}^{-TM/r} e^{-\frac{1}{4} rx} dV_j(x) \leqslant e^{\frac{1}{4} TM} V_j(-TM/r) +$$

$$+ \frac{1}{4} r \int\limits_{-\infty}^{-TM/r} e^{-\frac{1}{4} rx} V_j(x)\, dx \leqslant 2B(V_j) e^{-\frac{1}{4} TM},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{-2TM/r} e^{-\frac{1}{4} rx} d(V_1 \ast V_2)(x) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{2} \int\limits_{-\infty}^{-TM/r} e^{-\frac{1}{4} rx} dV_j(x) \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4} rx} dV_k(x). \tag{4.4}$$

Применим эти неравенства к интегралам в правой части неравенства (4.3), взяв в качестве $V_j(x)$ функции $F_{jT}(x)$, $j = 1, 2$; $Q_T(x)$, $\Lambda_T(x)$. Для оценки первого слагаемого в правой части (4.3) воспользуемся неравенством (9). Приходим к оценке

$$S_2(t) \leqslant B \exp\left(-\frac{1}{4} TM\right), \quad \operatorname{Im} t \leqslant \frac{1}{4} r. \tag{4.5}$$

Аналогично оценке (4.4) устанавливаем следующую оценку величины: $S_3(t)$ для t, $\operatorname{Im} t \geqslant -\frac{1}{4} T$,

$$S_3(t) \leqslant \int\limits_{2M}^{\infty} e^{-\operatorname{Im} t \cdot x} d(Q_T \ast \Lambda_T)(x) \leqslant$$

$$\leqslant \varphi\left(-\frac{1}{4} iT;\ Q_T\right) \int\limits_{M}^{\infty} e^{\frac{1}{4} Tx} d\Lambda_T(x) +$$

$$+ \varphi\left(-\frac{1}{4} iT;\ \Lambda_T\right) \int\limits_{M}^{\infty} e^{\frac{1}{4} Tx} dQ_T(x). \tag{4.6}$$

В силу леммы 8 $\left(F(x)=\Lambda_T(x),\ b=N,\ T_1=\frac{6}{7}T\right)$ имеем для $T \geqslant B$

$$\int_M^\infty e^{\frac{1}{4}Tx}\,d\Lambda_T(x) \leqslant e^{\frac{1}{4}TM}(1-\Lambda_T(M)) +$$

$$+\frac{1}{4}T\int_M^\infty e^{\frac{1}{4}Tx}(1-\Lambda_T(x))\,dx \leqslant e^{-\frac{1}{7}TM}. \tag{4.7}$$

Аналогично получаем с помощью соотношения (7)

$$\int_M^\infty e^{\frac{1}{4}Tx}\,dQ_T(x) \leqslant 2e^{-\frac{1}{2}TM}. \tag{4.8}$$

В силу того же соотношения и условия (8) для $Q_T(x)$ выполняется неравенство для $T \geqslant B$:

$$\varphi\left(-\frac{1}{4}iT;\ Q_T\right) \leqslant B. \tag{4.9}$$

Из леммы 7 $(\sigma(x)=G_T(x),\ a=-\infty,\ b=N)$ имеем оценку

$$\varphi\left(-\frac{1}{4}iT;\ \Lambda_T\right) \leqslant \exp\left(e^{\frac{1}{2}TN}\right),\ T \geqslant B. \tag{4.10}$$

Применяя полученные неравенства (4.7) — (4.10) к правой части неравенства (4.6), получаем оценку для $S_3(t)$ при t, $\operatorname{Im} t \geqslant -\frac{1}{4}T$,

$$S_3(t) \leqslant \exp\left(-\frac{1}{8}TM\right),\ T \geqslant B. \tag{4.11}$$

Оценки (4.2), (4.5), (4.11) в применении к (4.1) позволяют для t, $-\frac{1}{4}T \leqslant \operatorname{Im} t \leqslant \frac{1}{4}r$ написать соотношение

$$|\varphi(t;\ V_T)| \leqslant \exp\left(-\frac{1}{8}TM\right),\ T \geqslant B. \tag{4.12}$$

Для тех же t х. ф. $\varphi(t;\ Q_T)$ допускают оценки

$$|\varphi(t;\ Q_T)-Q_T(+0)+Q_T(0)| \leqslant Q_T(0)+$$

$$+\frac{1}{4}r\int_{-\infty}^0 e^{-\frac{1}{4}rx}Q_T(x)\,dx+Q_T(+\infty)-$$

$$-Q_T(+0)+\frac{1}{4}T\int_0^\infty e^{\frac{1}{4}Tx}\{Q_T(+\infty)-Q_T(x)\}\,dx.$$

Из (5) с $r_1 = \frac{1}{2} r$ и $B(Q_T) \leqslant B$ следует неравенство для $B \geqslant 200/r$:

$$\frac{1}{4} r \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{4} rx} Q_T(x)\, dx \leqslant BQ_T(0) +$$

$$+ \frac{1}{4} Br \int_{-\infty}^{-B} e^{\frac{1}{4} rx}\, dx \leqslant BQ_T(0) + \frac{1}{24},$$

а из (7) следует неравенство для $T > 0$:

$$\frac{1}{4} T \int_{0}^{\infty} e^{\frac{1}{4} Tx} \{Q_T(+\infty) - Q_T(x)\}\, dx \leqslant \frac{1}{3}.$$

Из последних двух соотношений при $T \geqslant B$ в силу (8) для $Q_T(x)$ получаем оценку для t, $-\frac{1}{4} T \leqslant \operatorname{Im} t \leqslant \frac{1}{4} r$,

$$|\varphi(t;\ Q_T) - Q_T(+0) + Q_T(0)| \leqslant \frac{9}{24} +$$

$$+ BQ_T(0) + Q_T(+\infty) - Q_T(+0) \leqslant \frac{5}{12}. \qquad (4.13)$$

Из леммы 7 ($\sigma(x) = G_T(x)$), примененной к интегралам $I(-\infty, -1, t)$, $I(-1, 1, t)$, $I(1, N, t)$, с учетом оценки (2) легко следует, что функция $\ln \varphi(t;\ \Lambda_T)$ допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $t \in \boldsymbol{C}^1$, $\operatorname{Im} t < \frac{1}{2} r$. При этом аналитическое продолжение осуществляется с помощью интеграла, которым она задается для вещественных t, и справедлива оценка сверху в прямоугольнике $\prod(r,\ T) = \left\{t : |\operatorname{Re} t| \leqslant \frac{1}{4} T,\ -\frac{1}{4} T \leqslant \operatorname{Im} t \leqslant \frac{1}{4} r\right\}$

$$|\ln \varphi(t;\ \Lambda_T)| \leqslant BN(1 + |t|^2)(1 + e^{-N \operatorname{Im} t}) \leqslant e^{\frac{1}{2} TN},\ T \geqslant B.$$

Отсюда устанавливаем нужное неравенство для $t \in \prod(r,\ T)$:

$$|\varphi(t;\ \Lambda_T)| \geqslant \exp(-e^{\frac{1}{2} TN}) \geqslant e^{-\frac{1}{16} TM}.$$

Применяя это неравенство к (4.12), получаем для $t \in \prod(r,\ T)$, $T \geqslant B$,

$$|\varphi(t;\ V_T)| \leqslant \frac{1}{4} |\varphi(t;\ \Lambda_T)|. \qquad (4.14)$$

Отсюда с учетом оценки (4.13) легко следует основное соотношение для х. ф. $\varphi(t;\ F_{jT})$, $j = 1, 2$:

$$\frac{1}{4} |\varphi(t;\ \Lambda_T)| \leqslant |\varphi(t;\ F_{1T})| \cdot |\varphi(t;\ F_{2T})| \leqslant$$

$$\leqslant 2 |\varphi(t;\ \Lambda_T)|,\ t \in \prod(r,\ T),\ T \geqslant B. \qquad (4.15)$$

§5. Исследование функций $\varphi(t;\ F_{jT})$, $j=1,\ 2$. Из левой части неравенства (4.15) следует, что в прямоугольнике $\prod(r,\ T)$ у функций $\varphi(t;\ F_{jT})$, $j=1,\ 2$, отсутствуют нули. Поэтому в указанном прямоугольнике функции $\varphi(t;\ F_{jT})$, $j=1,\ 2$, допускают представление

$$\varphi(t;\ F_{jT}) = \exp g_j(t),\ g_j(0) = 0,$$

где $g_j(t)$ — аналитические внутри $\prod(r,\ T)$ функции. Через $U_j(t)$, $j=1,\ 2$, обозначим гармонические функции $\operatorname{Re} g_j(t)$, $j=1,\ 2$. Эти функции, как и функции $g_j(t)$, $j=1,\ 2$, конечно, зависят от параметра T. Но там, где это не вызовет недоразумения, его будем опускать. Для функций $U_j(t)$, $t=u+iv$, u, v — вещественные переменные, справедлива

Лемма 9. *Пусть вещественные переменные u, v таковы, что $u+iv\in\prod(r,\ T)$, тогда для таких u, v выполняется неравенство*

$$0 \leqslant U_j(iv) - U_j(iv+u); \tag{5.1}$$

для $|v| \leqslant \frac{1}{4} r$ выполняется неравенство

$$U_j(iv) - U_j(iv+u) \leqslant B(u^2+1); \tag{5.2}$$

для $n\in N$ и точек $\mu_{q1} > 0$ таких, что $2\pi n\mu_{q1}^{-1} \leqslant \frac{1}{4} T$ выполняются неравенства

$$0 \leqslant U_j(iv) - U_j(iv + 2\pi n/\mu_{q1}) \leqslant 2c_{q-1,1}\left(\sin\frac{\pi n\mu_{q-1,1}}{\mu_{q1}}\right)^2 \times$$

$$\times e^{-\mu_{q-1,1}v} + B(1+n^2/\mu_{q1}^2)\, e^{-\mu_{q-2,1}v}, \tag{5.3}$$

где

$$c_{q1} = \frac{1+\mu_{q1}^2}{\mu_{q1}^2}\{G(\mu_{q1}+0) - G(\mu_{q1})\},\ q = 0,\ \pm 1,\ \ldots .$$

Доказательство леммы 9. Из свойства хребта х. ф. $\varphi(t;\ F_{jT})$ [2, с. 43] и соотношения (4.15) имеем для $u+iv\in\prod(r,\ T)$:

$$1 \leqslant \left|\frac{\varphi(iv;\ F_{jT})}{\varphi(iv+u;\ F_{jT})}\right| \leqslant 8\left|\frac{\varphi(iv;\ \Lambda_T)}{\varphi(iv+u;\ \Lambda_T)}\right|. \tag{5.4}$$

Так как $U_j(iv) - U_j(iv+u) = \ln\varphi(iv;\ F_{jT}) - \ln|\varphi(iv+u;\ F_{jT})|$, то из левой части неравенства (5.4) получаем оценку (5.1). Из правой части неравенства (5.4) имеем для $u+iv\in\prod(r,\ T)$

$$U_j(iv) - U_j(iv+u) \leqslant \ln 8 +$$

$$+ 2\int\limits_{-\infty}^{N_T} e^{-vx}\sin^2\frac{ux}{2}\cdot\frac{1+x^2}{x^2}\, dG(x). \tag{5.5}$$

Поскольку для $G(x)$ выполнено условие (2), то из него легко следует для v, $|v| \leqslant \frac{1}{4} r$, $\int\limits_{-\infty}^{N_T} e^{-vx} \sin^2 \frac{xu}{2} \cdot \frac{1+x^2}{x^2} dG(x) \leqslant \frac{1}{4} u^2 \times \times \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-vx}(1+x^2)\, dG(x) \leqslant Bu^2$, что в сочетании с (5.5) приводит к неравенству (5.2). Применение этой же оценки к неравенству (5.5) позволяет для $-\frac{1}{4} T \leqslant v \leqslant 0$ написать $U_j(iv) - U_j(iv+u) \leqslant \leqslant Bu^2 + \ln 8 + \int\limits_0^{N_T} e^{-vx} \sin^2 \frac{ux}{2} \cdot \frac{1+x^2}{x^2} dG(x)$. Полагая здесь $u = = 2\pi n/\mu_{q1}$, получаем $U_j(iv) - U_j(iv + 2\pi n/\mu_{q1}) \leqslant 2c_{q-1,1} \sin^2 \times \times \frac{\pi n \mu_{q-1,1}}{\mu_{q1}} \cdot e^{-\mu_{q-1,1} v} + 2e^{-\mu_{q-2,1} v} \int\limits_0^{\mu_{q-2,1}} \sin^2 \frac{\pi n x}{\mu_{q1}} \cdot \frac{1+x^2}{x^2} dG(x) + B(1 + + n^2/\mu_{q1}^2)$, откуда с очевидностью следует оценка (5.3).

Информацию о поведении функций $g_j(t)$, $j = 1, 2$, в прямоугольнике $\prod(-r, r, T) = \left\{t : |v| \leqslant \frac{1}{8} r,\ |u| \leqslant \frac{1}{8} T\right\}$ дает такая лемма.

Лемма 10. *В прямоугольнике* $\prod(-r, r, T)$ *выполняется оценка* $|g_j(t)| \leqslant B(1 + |t|^3)$, $j = 1, 2$.

Доказательство леммы 10. Поскольку функции $F_{jT}(x)$ сходятся по вариации к ф. р. $F_j(x)$ при $T \to \infty$, то при $T \geqslant B$ имеем $F_{jT}(B) - F_{jT}(-B) \geqslant \frac{1}{2}$, $j = 1, 2$. Поэтому при $T \geqslant B$ выполняются неравенства для $iv \in \prod(r, T)$ $\varphi(iv; F_{jT}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-vx} \times \times dF_{jT}(x) \geqslant \int\limits_{-B}^{B} e^{-vx} dF_{jT}(x) \geqslant \frac{1}{2} e^{-B|v|}$. В силу основного соотношения для х. ф. $\varphi(t; F_{jT})$ (4.15) и условия (2) на $G(x)$ для v, $|v| \leqslant \frac{1}{4} r$, справедливо неравенство $\varphi(iv; F_{jT}) \leqslant 2\varphi(iv; \Lambda_T)/\varphi \times \times (iv; F_{kT}) \leqslant 4e^{B|v|} \varphi(iv; \Lambda_T) \leqslant B$, $j, k = 1, 2$, $j \neq k$. Отсюда и из оценок (5.1), (5.2) следует неравенство

$$|U_j(u + iv)| \leqslant B(1 + u^2), \tag{5.6}$$

$u + iv \in \prod(-2r, 2r, 2T)$. По формуле Шварца для $t \in \prod(-r, r, T)$

$$g_j(t+z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\operatorname{Re}g_j\left(t+\frac{1}{8}re^{i\theta}\right)\frac{\frac{1}{8}re^{i\theta}+z}{\frac{1}{8}re^{i\theta}-z}\,d\theta+i\operatorname{Im}g_j(t),\quad z\in C^1,$$

$|z|\leqslant\frac{1}{8}r$. Продифференцировав эту формулу по переменной z, а затем положив в ней $z=0$, приходим к выражению $g_j'(t)=$ $=\frac{8}{\pi r}\int\limits_0^{2\pi}\operatorname{Re}g_j\left(t+\frac{1}{8}re^{i\theta}\right)e^{-i\theta}\,d\theta$. Отсюда, используя оценку (5.6), получаем $|g_j'(t)|\leqslant B(1+|t|^2)$, $t\in\prod(-r,\ r,\ T)$. Поскольку $g_j(t)=$ $=t\int\limits_0^1 g_j'(tu)\,du$, то для $t\in\prod(-r,\ r,\ T)$ $|g_j(t)|\leqslant|t|\max\limits_{0\leqslant u\leqslant 1}|g_j'\times$ $\times(tu)|\leqslant B|t|(1+|t|^2)$, что дает утверждение леммы 10.

Пусть $n\in N$ и точка μ_{q1} такие, что $2\pi n/\mu_{q1}\leqslant 2^{-3}T$. Рассмотрим функции $g_{jqn}(t)=g_j(t)\exp(-i\mu_{q1}t/n)$. Функции $g_{jqn}(t)$, как и функции $g_j(t)$,— вещественные на мнимой оси. Введем функции $\chi_{jqn}(t)$, $j=1,\ 2$, следующим образом: $\chi_{jqn}(t)=g_{jqn}(t)-\frac{1}{2}\{g_{jqn}\times$ $\times(t+2\pi n/\mu_{q1})+g_{jqn}(t-2\pi n/\mu_{q1})\}$. Аналогично определим функции $\hat{\chi}_{jqn}(t)$, которые отличаются от $\chi_{jqn}(t)$ только тем, что в правой части предыдущего равенства стоят функции $g_j(t)$. Для этих функций выполняются простые соотношения: $\hat{\chi}_{jqn}(iv)=U_j(iv)-$ $-U_j(iv+2\pi n/\mu_{q1})$, $-\frac{1}{4}T\leqslant v\leqslant 0$, $\chi_{jqn}(t)=\hat{\chi}_{jqn}(t)\exp(-i\mu_{q1}t/n)$, $t\in\prod(r,\ T/2)$. Из второго из этих соотношений следует неравенство для $t\in\prod(r,\ T/2)$:

$$|\chi_{jqn}(t)|\leqslant|\hat{\chi}_{jqn}(t)|\exp(\mu_{q1}\operatorname{Im}t/n).\tag{5.7}$$

Теперь сформулируем лемму о поведении функций $g_{jqn}(t)$.

Лемма 11. *Функции $g_{jqn}(t)$, $j=1,\ 2$, в прямоугольнике $\prod\left(\frac{1}{2}r,\ \frac{1}{2}T\right)$ допускают представление $g_{jqn}(t)=g^+_{jqn}(t)+H_j(t)$, где $g^+_{jqn}(t)$ — аналитические в квадрате $\left\{t:|\operatorname{Im}t|\leqslant\frac{1}{16}T,\ |\operatorname{Re}t|\leqslant\right.$ $\left.\leqslant\frac{1}{16}\right\}$ вещественные на мнимой оси, причем в этом квадрате выполняются оценки*

$$|g^+_{jqn}(t)|\leqslant B\cdot|t|^5,\ 0\leqslant\operatorname{Im}t\leqslant\frac{1}{16}T,\tag{5.8}$$

$$|H_j(t)|\leqslant B\cdot|t|^5,\ -\frac{1}{16}T\leqslant\operatorname{Im}t\leqslant 0.\tag{5.9}$$

Доказательство леммы 11. Определим функции $g^{+}_{jqn}(t)$, $j=1, 2$, для $\operatorname{Im} t > \frac{1}{8} r$ формулами $g^{+}_{jqn}(t) = \frac{t^5}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_r} \frac{g_{jqn}(z)}{z^5 (z-t)} dz$, где $\Gamma_r = \left\{z : z = u + ir/8, \; -\frac{1}{8} T \leqslant u \leqslant \frac{1}{8} T\right\}$. Проинтегрируем функцию $f(z, t) = \frac{g_{jqn}(z)}{z^5 (z-t)}$ вдоль контура прямоугольника с вершинами $\frac{1}{8}(T+ir)$, $\frac{1}{8}(-T+ir)$, $-\frac{1}{8}T+iH$, $\frac{1}{8}T+iH$, $-\frac{1}{8}T \leqslant H \leqslant 0$. По теореме Коши для $t \in \prod\left(\frac{1}{2} r, \frac{1}{2} T\right)$

$$-\frac{t^5}{2\pi i} \int\limits_{-T/8}^{T/8} f\left(u + \frac{1}{8} ir, t\right) du + \frac{t^5}{2\pi i} \int\limits_{-T/8}^{T/8} f(u+iH, t)\, du +$$

$$+ F_H(t, r, T) = \begin{cases} 0, \; \operatorname{Im} t > \frac{1}{8} r, \; \operatorname{Im} t < H, \\ g_{jqn}(t), \; H < \operatorname{Im} t < \frac{1}{8} r, \end{cases} \tag{5.10}$$

где функция $F_H(t, r, T)$ определяется формулой $F_H(t, r, T) = \frac{t^5}{2\pi i} \int\limits_{H}^{r/8} \left\{f\left(\frac{1}{8} T + iv, t\right) - f\left(-\frac{1}{8} T + iv, t\right)\right\} dv$ и, значит, является аналитической для t, $|\operatorname{Re} t| < \frac{1}{8} T$. Для t, $\operatorname{Im} t > \frac{1}{8} r$, и любого H, $-\frac{1}{8} T \leqslant H \leqslant 0$ справедливо

$$g^{+}_{jqn}(t) = \frac{t^5}{2\pi i} \int\limits_{-T/8}^{T/8} f(u+iH, t)\, du + F_H(t, r, T), \tag{5.11}$$

поэтому функция $g^{+}_{jqn}(t)$ аналитически продолжается в прямоугольник $\prod\left(\frac{1}{2} r, \frac{1}{2} T\right)$, причем представление (5.11) сохраняется и для $t \in \prod\left(\frac{1}{2} r, \frac{1}{2} T\right)$, $\operatorname{Im} t > H$. Для этих t функцию $g^{+}_{jqn}(t)$ в силу соотношений (5.10), (5.11) представим в виде

$$g^{+}_{jqn}(t) = g_{jqn}(t) + \frac{t^5}{2\pi i} \int\limits_{-T/8}^{T/8} f\left(u + \frac{1}{8} ir, t\right) du. \tag{5.12}$$

Из леммы 10 следуют такие оценки: $|F_H(t, r, T)| \leqslant B \cdot |t|^5$, $|H| \leqslant \frac{1}{8} r$, $|\operatorname{Re} t| \leqslant \frac{1}{16} T$, $\left|\int\limits_{-T/8}^{T/8} f(u+iH, t)\, du\right| \leqslant B$, $|H| \leqslant \frac{1}{8} r$,

$|\operatorname{Im} t - H| \geqslant \frac{1}{16} r$. С учетом этих оценок положим в представлении (5.11) $H = -\frac{1}{8} r$, тогда получаем для $\operatorname{Im} t \geqslant -\frac{1}{16} r$, $|\operatorname{Re} t| \leqslant \leqslant \frac{1}{16} T$, $|g^{+}_{jqn}(t)| \leqslant B \cdot |t|^5$. Для интеграла в правой части равенства (5.12) для t, $\operatorname{Im} t \leqslant \frac{1}{16} r$, справедлива такая же оценка. Вещественность функций $g^{+}_{jqn}(t)$ на мнимой оси, очевидно, следует из вещественности на мнимой оси функций $g_j(t)$. Взяв в качестве функции $H_j(t)$ интеграл в правой части равенства (5.12), приходим к утверждению леммы 11.

Изучим поведение функций $\hat{\chi}_{jqn}(t)$ с $n \in \boldsymbol{N}$, μ_{q1} такими, что $2\pi n/\mu_{q1} \leqslant \frac{1}{8} T$. Для них в силу неравенств (5.3) имеем

$$e^{\mu_{q-1,1} v} |\hat{\chi}_{jqn}(iv)| \leqslant B(1 + n^2/\mu_{q1}^2), \quad -\frac{1}{4} T \leqslant v \leqslant 0. \tag{5.13}$$

Пусть $h = 2\pi l/\mu_{s1}$, $s \geqslant q$, $l \in \boldsymbol{Z}$, тогда запишем следующую формулу: $\operatorname{Re} \hat{\chi}_{jqn}(iv + h) = \operatorname{Re} g_j(iv + h) - \frac{1}{2} \operatorname{Re} g_j(iv + h + 2\pi n/\mu_{q1}) - \frac{1}{2} \operatorname{Re} g_j(iv + h - 2\pi n/\mu_{q1}) = \{-g_j(iv) + \operatorname{Re} g_j(iv + h)\} + \frac{1}{2} \times \{g_j(iv) - \operatorname{Re} g_j(iv + h + 2\pi n/\mu_{q1})\} + \frac{1}{2} \{g_j(iv) - \operatorname{Re} g_j(iv + h - 2\pi n/\mu_{q1})\}$. Из этой формулы с помощью неравенства (5.3) получаем

$$|\operatorname{Re} \hat{\chi}_{jqn}(iv + h)| \leqslant B(1 + n/\mu_{q1} + |l|/\mu_{s1})^2 \exp(-\mu_{s-1,1} v), \tag{5.14}$$
$$-\frac{1}{8} T \leqslant v \leqslant 0, \ s \geqslant q, \ l \in \boldsymbol{Z}, \ 2\pi |l|/\mu_{s1} \leqslant \frac{1}{8} T.$$

Покажем, что для функций $\hat{\chi}_{jqn}(-t)$ выполняются условия теоремы 6 в квадрате K_R, $R = \frac{1}{16} T$. В силу неравенства (5.13) выполняется условие 1 теоремы 6 с $d = 3$, $B_1 = B(1 + n/\mu_{q1})^2 \times \exp(\mu_{q-1,1} R)$. Из леммы 10 следует выполнение условия 2 теоремы 6 с теми же d, B_1 и $a = \frac{1}{8} r$. Чтобы проверить условие 3 теоремы 6 для ρ, где $M(\rho, \hat{\chi}_{jqn}(-t)) \geqslant \exp(B(\rho + 1))$ выберем точку $\tilde{\mu}_{s1}$, определяемую следующим образом. Точка $\tilde{\mu}_{s1}$ совпадает с точкой μ_{s1}, $s \geqslant q$, если выполняется неравенство

$$\frac{1}{4} \leqslant \mu_{s1} ((\ln M(\rho, \hat{\chi}_{jqn}(-t)))/(1 + \rho))^{-1} \leqslant \frac{1}{2}. \tag{5.15}$$

Если для точек μ_{s1}, $s \geqslant q$, (5.15) не выполняется, то полагаем $\tilde{\mu}_{s1} = \frac{1}{p} \mu_{s1}$, где μ_{s1} — минимальная из точек μ_{l1}, $l \geqslant q$, для которых не выполняется правая часть неравенства (5.15), натуральное число p выбирается так, чтобы для точки $\tilde{\mu}_{s1} \geqslant B$ уже выполнялось неравенство (5.15). Легко видеть, что такое p всегда найдется. Рассмотрим в квадрате K_ρ, $\rho \leqslant \frac{1}{16}T$, вертикальные отрезки с вещественными частями $h = 2\pi l/\tilde{\mu}_{s1}$, $l \in \boldsymbol{Z}$. Из неравенств (5.14) на этих отрезках имеем для v, $0 \leqslant v \leqslant \rho$, $|\operatorname{Re}\hat{\chi}_{jqn} \times (-iv - h)| \leqslant B(1 + n/\mu_{q1})^2\rho^2 e^{\mu_{s-1,1}v} \leqslant B(1 + n/\mu_{q1})^2 e^{\mu_{q-1,1}R}\{M(\rho, \hat{\chi}_{jqn}(-t))\}^{1/3}$. Таким образом, для функции $\hat{\chi}_{jqn}(-t)$ выполняется условие 3 теоремы 6 с $B_1 = B(1 + n/\mu_{q1})^2 \exp(\mu_{q-1,1}R)$, $\delta = \frac{1}{3}$. В силу этой теоремы в квадрате K_{R_1}, $R_1 = \frac{1}{48}T$, выполняется оценка

$$|\hat{\chi}_{jqn}(-t)| \leqslant B(1 + n/\mu_{q1})^6 \exp(3\mu_{q-1,1}R)(1 + |t|)^9 + \exp(B|t|). \tag{5.16}$$

Применим к функции

$$\tilde{\chi}_{jqn}(t) = \hat{\chi}_{jqn}(t) / \exp(i\mu_{q-1,1}t)B(1 + n/\mu_{q1})^2(t + 1)^3$$

теорему о двух константах [3, с. 296] в секторе

$$S\left(\frac{3}{2}\pi,\ 2\pi,\ 2^{-6}T\right) = \left\{t : \frac{3}{2}\pi \leqslant \arg t \leqslant 2\pi,\ |t| \leqslant 2^{-6}T\right\}.$$

Поскольку на радиусах рассматриваемого сектора $|\tilde{\chi}_{jqn}(t)| \leqslant 1$, то выполняется оценка для t из этого сектора:

$$\ln|\tilde{\chi}_{jqn}(t)| \leqslant \omega_4(t) \max_{t_1 \in \tilde{E}} \ln|\tilde{\chi}_{jqn}(t_1)|, \tag{5.17}$$

где $\tilde{E}$ — дуга сектора $S\left(\frac{3}{2}\pi,\ 2\pi,\ 2^{-6}T\right)$, а $\omega_4(t)$ — гармоническая мера дуги $\tilde{E}$ относительно всего сектора. Для $\omega_4(t)$ легко доказать оценку для $t \in S\left(\frac{3}{2}\pi,\ 2\pi,\ 2^{-7}T\right)$ $\omega_4(t) \leqslant c|\operatorname{Im} t||\operatorname{Re} t|/T^2$, вытекающую из явного вида гармонической меры $\omega_4(t)$ [3, с. 294]. Применяя последнюю оценку и оценку (5.16) к неравенству (5.17), получаем для t, $-2^{-7}T \leqslant \operatorname{Im} t \leqslant 0$, $0 \leqslant \operatorname{Re} t \leqslant 4\pi a/\mu_{q1}$,

$$|\tilde{\chi}_{jqn}(t)| \leqslant B\exp\{-B\{(\mu_{q-1,1} + 1)\,a/(T\mu_{q1})\}\operatorname{Im} t\}. \tag{5.18}$$

Для функций $\hat{\chi}_{jqn}(t)$ имеют место легко проверяемые формулы для $l \in \boldsymbol{N}$, $2\pi nl/\mu_{q1} \leqslant 2^{-7}T$, $\operatorname{Re}\hat{\chi}_{jqn}(iv + 2\pi nl/\mu_{q1}) = -\operatorname{Re}\chi_{jq,nl} \times (iv) + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\hat{\chi}_{jq,n(l-1)}(iv) + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\hat{\chi}_{jq,n(l+1)}(iv)$; $\operatorname{Im}\hat{\chi}_{jqn}(iv + 2\pi nl/\mu_{q1}) = \operatorname{Im}\hat{\chi}_{jq,nl}(iv + 2\pi n/\mu_{q1}) + 2(-1)^{l-1}\sum_{m=1}^{l-1}(-1)^{m-1}\operatorname{Im} \times \chi_{jq,nm}(iv + 2\pi n/\mu_{q1})$. Из этих формул и оценки (5.18) следуют такие неравенства для $l \geqslant 0$, $n \leqslant \mu_{q1}/\mu_{q-1,1}$, $2\pi nl/\mu_{q1} \leqslant 2^{-7}T$, $-2^{-7}T \leqslant v \leqslant 0$, $|\hat{\chi}_{jqn}(iv + 2\pi nl/\mu_{q1})| \leqslant B(1 + n/\mu_{q1})^3(1 + |v| + nl/\mu_{q1})^6 \exp\{-(\mu_{q-1,1} + Bn/(T\mu_{q1}))v\}$. В каждом прямоугольнике $\tilde{\prod}(l, T) = \{t: -2^{-7}T \leqslant \operatorname{Im} t \leqslant 0, |\operatorname{Re} t - \pi n(2l+1)/\mu_{q1}| \leqslant \pi n/\mu_{q1}\}$, $0 \leqslant \pi n(2l+1)/\mu_{q1} \leqslant 2^{-8}T$, применим теорему о двух константах к функции $(n \leqslant \mu_{q1}/\mu_{q-1,1})$ $\tilde{\tilde{\chi}}_{jqn}(t) = \tilde{\chi}_{jqn}(t)/\left\{B\left(1 + \frac{n}{\mu_{q1}}\right)(1+t)^3 \times \right.$ $\left.\times e^{iBnt/(T\mu_{q1})}\right\}$, которая на вертикальных стенках указанных прямоугольников и на вещественной оси не превосходит по модулю единицы. По этой теореме имеем оценку для $t \in \tilde{\prod}(l, T)$:

$$\ln|\tilde{\tilde{\chi}}_{jqn}(t)| \leqslant \omega_5(t) \max_{t_1 \in \tilde{H}} \ln|\tilde{\tilde{\chi}}_{jqn}(t)|, \tag{5.19}$$

где $\tilde{H}$ — нижняя вертикальная стенка $\tilde{\prod}(l, T)$; $\omega_5(t)$ — гармоническая мера $\tilde{H}$ относительно всего $\tilde{\prod}(l, T)$. Поскольку $\omega_5(t) \leqslant \omega_6(t)$, где $\omega_6(t)$ — гармоническая мера полуполосы $\{t: \operatorname{Im} t \geqslant -2^{-7}T, |\operatorname{Re} t - \pi n(2l+1)/\mu_{q1}| \leqslant \pi n/\mu_{q1}\}$, то в силу леммы 5 ($\beta = \pi n/\mu_{q1}$, $b = 2^{-7}T$), примененной к функции $\omega_6(-t + \pi n(2l+1)/\mu_{q1})$, получаем оценку для t из этой полуполосы: $\omega_6(t) \leqslant c\exp(-2^{-8}\mu_{q1}T/n)$, $\operatorname{Im} t \geqslant -2^{-8}T$. Применяя эту оценку и оценку (5.16) к неравенству (5.19), окончательно получаем в каждом $\tilde{\prod}\left(l, \frac{1}{2}T\right)$ при условии, что $n \leqslant \mu_{q1}/\mu_{q-1,1}$

$$|\hat{\chi}_{jqn}(t)| \leqslant B\left(1 + \frac{n}{\mu_{q1}}\right)^3 (1 + |t|)^6 \exp\left\{-\left(\mu_{q-1,1} + \frac{Bn}{T\mu_{q1}}\right)\operatorname{Im} t\right\}. \tag{5.20}$$

Аналогично доказывается эта же оценка для $t \in \prod(r, 2^{-9}T)$, $\operatorname{Re} t \leqslant 0$.

Пусть n, μ_{q1} таковы, что $\mu_{q-1,1} + 2^8T^{-1/2} \leqslant \frac{1}{n}\mu_{q1} \leqslant B$. Рассмотрим функции

$$\chi^+_{jqn}(t) = g^+_{jqn}(t) - \frac{1}{2}\{g^+_{jqn}(t - 2\pi n/\mu_{q1}) + g^+_{jqn}(t + 2\pi n/\mu_{q1})\}. \tag{5.21}$$

В силу леммы 11 и неравенств (5.7), (5.20) для этих функций выполняется оценка в круге $|t| \leqslant 2^{-5}T^{1/2} = T_1$:

$$|\chi^+_{jqn}(t)| \leqslant B(1 + n/\mu_{q1})^5(1 + |t|^6).$$

Наша ближайшая цель — решить разностное уравнение (5.21) в этом круге.

§ 6. Решение разностного уравнения (5.21). Для этой цели служат следующие теоретико-функциональные леммы.

Лемма 12. *Разностное уравнение*

$$f(t+2\pi/\omega)-2f(t)+f(t-2\pi/\omega)=D(t), \tag{6.1}$$

$0<2\pi/\omega\leqslant\frac{1}{4}R$, *в котором* $D(t)$ — *функция аналитическая в круге* $|t|\leqslant R$, $R\geqslant 10$, *и удовлетворяет условию для некоторых постоянных* $B_1>0$, $k\in\boldsymbol{N}$, $|D(t)|\leqslant B_1(1+|t|^k)$, *имеет в круге* $|t|\leqslant\leqslant\frac{1}{4}R$ *аналитическое решение* $f_1(t)$, *для которого справедлива оценка* $|f_1(t)|\leqslant c(k)B_1\omega^2(1+\omega^{-2k})(1+|t|^{k+2})$, *где* $c(k)>0$ — *постоянная, зависящая лишь от* k.

Эта лемма является уточнением леммы 3 из [4] и доказывается аналогично. Поэтому доказательство ее не приводим.

Лемма 13. *Пусть функция* $f(t)$, *аналитическая в квадрате* $K_{0R}=\{t\colon |\operatorname{Im}t|\leqslant R,\ |\operatorname{Re}t|\leqslant R\}$, *вещественная на мнимой оси, удовлетворяет соотношению*

$$f(t+2\pi/\omega)-2f(t)+f(t-2\pi/\omega)=0,\ \omega>8\pi/R, \tag{6.2}$$

и допускает в квадрате K_{0R} *для некоторых постоянных* $B_1>0$, $k\in\boldsymbol{N}$, *оценку*

$$|f(t)|\leqslant B_1(1+|t|^k),\ \operatorname{Im}t\geqslant 0. \tag{6.3}$$

Тогда в квадрате $K_{0,\,R/2}$ $f(t)$ *допускает представление* $f(t)=\sum\limits_{p=0}^{\infty}(b_p+id_pt)\exp(i\omega pt)+H(t)$, *в котором ряд сходится абсолютно и равномерно на любом компакте в квадрате* $K_{0,\,R/2}$ *и, следовательно, является в этом квадрате аналитической функцией; коэффициенты* b_p, $d_p\in\boldsymbol{R}^1$, $p=0,1,\ldots$, *и*

$$|b_p|\leqslant cB_1\omega(1+\omega^{-k-1}),\quad |d_p|\leqslant cB_1(1+\omega^{-k}), \tag{6.4}$$

а для функции $H(t)$ *выполняется оценка при* $t\in K_{0,\,R/8}\cap\{\operatorname{Im}t\leqslant 0\}$:

$$|H(t)|\leqslant cB_1R^{k+1}\exp\left(-\frac{1}{8}\omega R\right). \tag{6.5}$$

Лемма 13 близка к лемме 3 из работы [5] и доказывается аналогичным образом. Поэтому ее доказательство не приводим.

Лемма 14. *Пусть функция* $f(t)$ *аналитична в прямоугольнике* $K_{0R}\cap\{\operatorname{Im}t\leqslant 0\}$ *и пусть для некоторых постоянных* $B_1>0$, $\sigma>0$, $a>0$ *в этом прямоугольнике выполняется неравенство*

$$|f(t)|\leqslant B_1\exp(-\sigma\operatorname{Im}t+a\ln R). \tag{6.6}$$

Пусть $f(t)$ *представима в виде ряда* $f(t)=\sum\limits_{p=0}^{\infty}(b_p+id_pt)\times\times\exp(i\omega pt)$, $\omega\geqslant 4\pi/R$, *который сходится абсолютно и равно-*

мерно на любом компакте в $K_{0R}\cap\{\operatorname{Im} t\leqslant 0\}$. *Тогда для* $p>[\sigma/\omega]$ *выполняются неравенства*

$$|d_p|\leqslant cB_1\omega R^a\exp\left\{\frac{1}{2}R(\sigma-p\omega)\right\},\tag{6.7}$$

$$|b_p|\leqslant c\left\{B_1\omega+\sum_{p=0}^{[\sigma/\omega]}(|b_p|+|d_p|)\right\}R^{a+1}\exp\left\{\frac{1}{4}R(\sigma-p\omega)\right\}.\tag{6.8}$$

Лемма 14 является небольшим уточнением леммы 5 из [5], доказывается точно так же, поэтому ее доказательство не приводим.

Заметим, что в силу леммы 12 ($R=T_1$, $D(t)=2\chi^{+}_{jqn}(t)$, $\omega=\mu_{q1}/n$, $B_1=B(1+n/\mu_{q1})^5$, $k=6$) разностное уравнение $f(t+2\pi n/\mu_{q1})-2f(t)+f(t-2\pi n/\mu_{q1})=2\chi^{+}_{jqn}(t)$ имеет в круге $|t|\leqslant\frac{1}{4}T_1$ аналитическое решение $f_{1j}(t)$, допускающее оценку $|f_{1j}(t)|\leqslant B(1+n/\mu_{q1})^{10}(1+|t|^8)$. Рассмотрим функции $\tilde g_{jqn}(t)=g^{+}_{jqn}(t)-\frac{1}{2}f_{1j}(t)$. Для этих функций в круге $|t|\leqslant\frac{1}{4}T_1$ выполняется соотношение $\tilde g_{jqn}(t+2\pi n/\mu_{q1})-2\tilde g_{jqn}(t)+\tilde g_{jqn}(t-2\pi n/\mu_{q1})=0$. Таким образом, для функций $\tilde g_{jqn}(t)$ выполняются условия леммы 13 $\left(R=\frac{1}{8}T_1,\quad \omega=\mu_{q1}/n,\quad B_1=B(1+n/\mu_{q1})^{10},\quad k=8\right)$. В силу этой леммы в квадрате $K_{0,\,T_1/16}$ функции $\tilde g_{jqn}(t)$ допускают представления

$$\tilde g_{jqn}(t)=\sum_{p=0}^{\infty}(b_{pj}+id_{pj}t)\,e^{i\mu_{q1}pt/n}+\tilde H_j(t),\tag{6.9}$$

где коэффициенты b_{pj}, d_{pj} — вещественные и такие, что

$$|b_{pj}|\leqslant B(1+n/\mu_{q1})^{19},\quad |d_{pj}|\leqslant B(1+n/\mu_{q1})^{18},\tag{6.10}$$

для функций $\tilde H_j(t)$ в прямоугольнике $K_{0,\,T_1/64}\cap\{\operatorname{Im} t\leqslant 0\}$ выполняются оценки

$$|\tilde H_j(t)|\leqslant B(1+n/\mu_{q1})^{10}T_1^9\exp(-\mu_{q1}T_1/(64n)),\tag{6.11}$$

ряды в правых частях соотношений (6.9) сходятся абсолютно и равномерно на любом компакте в $K_{0,\,T_1/16}$. Отметим, что коэффициенты b_{pj}, d_{pj} в представлении (6.9) зависят, конечно, от параметров q и n. Зададимся числом $T_1^{-1/2}$ и укажем $n\in N$, μ_{q1} такие, что $\frac{\mu_{q1}}{n+1}\leqslant T_1^{-1/2}\leqslant\frac{\mu_{q1}}{n}$, $n\leqslant\mu_{q1}/\mu_{q-1,1}$. В дальнейшем считаем, что n и μ_{q1} выбраны таким образом.

§ 7. Исследование коэффициентов b_{pj}, d_{pj} из представления (6.9) функций $\tilde g_{jqn}(t)$. Положим

$$f_{jqn}(t)=\left\{g^{+}_{jqn}(t)-\frac{1}{2}f_{1j}(t)-\tilde H_j(t)\right\}e^{i\mu_{q1}t/n},\quad j=1,\,2.$$

Зададимся $m \in \boldsymbol{N}$, точкой μ_{s1}, $s \geqslant q$, такими, что $\frac{1}{m}\mu_{s1} \geqslant \mu_{s-1,1} + 2^7\pi T_1^{-1}$, и введем функции $f_{jsm}(t) = f_{jqn}(t) - \frac{1}{2}\{f_{jqn}(t + 2\pi \times m/\mu_{s1}) + f_{jqn}(t - 2\pi m/\mu_{s1})\}$, $j = 1, 2$. Из леммы 11 получаем формулу

$$f_{jsm}(t) = g_j(t) - \frac{1}{2}\{g_j(t + 2\pi m/\mu_{s1}) + g_j(t - 2\pi m/\mu_{s1})\} - H_j(t)\exp(i\mu_{q1}t/n) + \frac{1}{2}\hat{H}_j(t + 2\pi m/\mu_{s1})\exp(i\mu_{q1}t/n + i2\pi m\mu_{q1}/(n\mu_{s1})) + \frac{1}{2}\hat{H}_j(t - 2\pi m/\mu_{s1})\exp(i\mu_{q1}t/n - i2\pi m\mu_{q1}/(n\mu_{s1})),$$

где $\hat{H}_j(t) = \frac{1}{2}f_{1j}(t) + \tilde{H}_j(t) + H_j(t)$.

Из этой формулы в силу оценок (5.20), (5.9), (6.11) и оценки функций $f_{1j}(t)$ получаем для $t \in \{K_{0,2^{-7}T_1} \cap (\operatorname{Im} t \leqslant 0)\}$

$$|\hat{f}_{jsm}(t)| \leqslant BT_1^{19}\{e^{-\mu_{q1}\operatorname{Im} t/n} + e^{-\mu_{s-1,1}\operatorname{Im} t}\}. \tag{7.1}$$

С другой стороны, функции $\hat{f}_{jsm}(t)$ с помощью (6.9) допускают представление $\hat{f}_{jsm}(t) = \sum_{p=1}^{\infty}(\hat{b}_{p-1,j} + i\hat{d}_{p-1,j}t)\exp(ip\mu_{q1}t/n)$,

где

$$\hat{b}_{p-1,j} = 2b_{p-1,j}\left(\sin\frac{\pi pm\mu_{q1}}{n\mu_{s1}}\right)^2 + d_{p-1,j}\frac{2\pi m}{\mu_{s1}}\sin\frac{2\pi pm\mu_{q1}}{n\mu_{s1}}; \tag{7.2}$$

$$\hat{d}_{p-1,j} = 2d_{p-1,j}\left(\sin\frac{\pi pm\mu_{q1}}{n\mu_{s1}}\right)^2. \tag{7.3}$$

Конечно, коэффициенты $\hat{b}_{pj}$, $\hat{d}_{pj}$ зависят от q, n, s, m, но, чтобы не перегружать формулы индексами, эти параметры в обозначениях опускают там, где это не вызовет недоразумений.

Оценки (7.1) позволяют к функциям $\hat{f}_{jsm}(t)$ применить лемму 14 ($R = 2^{-7}T_1$, $B_1 = B$, $\omega = \mu_{q1}/n$, $\sigma = \mu_{q1}/n$, $s = q$, $\sigma = \mu_{s-1,1}$, $s \geqslant q + 1$, $a = 19$). Поскольку для коэффициентов $\hat{b}_{pj}$, $\hat{d}_{pj}$ в силу (6.10) выполняются оценки для $s \geqslant q$, $2\pi m/\mu_{s1} \leqslant 2^{-8}T_1$,

$$\sum_{p=0}^{[n\mu_{s-1,1}/\mu_{q1}]}(|\hat{b}_{pj}| + |\hat{d}_{pj}|) \leqslant BT_1^{20}(1 + \mu_{s-1,1}),$$

то из леммы 14 следует: найдется такое $B > 0$, что для всех $m \in \boldsymbol{N}$ и точек μ_{s1}, $s \geqslant q$, удовлетворяющих условию $m \leqslant \frac{\mu_{s1}}{\mu_{s-1,1}}$, $2\pi m/\mu_{s1} \leqslant 2^{-8}T_1$, имеет место для $p > \tilde{\mu}_{s1}n/\mu_{q1}$, где $\tilde{\mu}_{s1} = \max\{\mu_{s-1,1}, \mu_{q1}/n\}$,

$$|b_{p-1,}| + |d_{p-1,j}| \leqslant T_1^{40}(1 + \mu_{s-1,1})\exp\{2^{-10}(\tilde{\mu}_{s1} - p\mu_{q1}/n)T_1\}. \tag{7.4}$$

Используя последнее неравенство, проведем оценку коэффициентов $b_{p-1,j}$, $d_{p-1,j}$ для p, $n\tilde{\mu}_{s1}\mu_{q1}^{-1} < p < n\mu_{s1}\mu_{q1}^{-1}$, $s \geqslant q$. Обозначим через $\boldsymbol{N}_{qs1}$ множество целых чисел p из интервала $(n\tilde{\mu}_{s1}/\mu_{q1}, n\mu_{s1}/\mu_{q1})$, представимых в виде $p = n_p n\tilde{\mu}_{s1}/\mu_{q1}$, где n_p — натуральное число, а через $\boldsymbol{N}_{qs2} = \{\boldsymbol{N} \cap (n\tilde{\mu}_{s1}/\mu_{q1}, n\mu_{s1}/\mu_{q1})\} \setminus \boldsymbol{N}_{qs1}$. Пусть $p \in \boldsymbol{N}_{qs1}$, тогда из неравенства (7.4) с $m = [\mu_{s1}/(4n_p\tilde{\mu}_{s1})] + 1$ и соотношения (7.3) следует

$$|d_{p-1,j}| \leqslant T_1^{40}\left(\sin\frac{\pi m\tilde{\mu}_{s1}n_p}{\mu_{s1}}\right)^{-2}(1+\mu_{s-1,1}) \times$$

$$\times \exp\{-2^{-11}T_1(n_p-1)\tilde{\mu}_{s1}\} \leqslant T_1^{40}\exp\{-2^{-12}T_1(n_p-1)\tilde{\mu}_{s1}\}. \quad (7.5)$$

Пусть $p \in \boldsymbol{N}_{qs2}$. Воспользуемся неравенством (7.4) для коэффициентов $\hat{b}_{p-1,j}$, $\hat{d}_{p-1,j}$ с параметром не s, а $s-1$ и $m=1$. Приходим к оценке для $s \geqslant q+1$:

$$|d_{p-1,j}| \leqslant T_1^{40}\left(\sin\frac{\pi\mu_{q1}p}{n\mu_{s-1,1}}\right)^{-2}(1+\mu_{s-2,1}) \times$$

$$\times \exp\{2^{-11}T_1(\tilde{\mu}_{s-1,1} - p\mu_{q1}/n\} \leqslant T_1^{40}(\mu_{s-1,1}n/\mu_{q1})^3 \times$$

$$\times \exp\left\{2^{-11}T_1\left(\frac{1}{2}\tilde{\mu}_{s1} - p\mu_{q1}/n\right)\right\} \leqslant T_1^{43}\exp\{-2^{-13}T_1 p\mu_{q1}/n\}. \quad (7.6)$$

На интервале $(1, n)$ оценка (7.6) получается аналогично из неравенства (7.4) с $s=q$ и $m=1$. Используя неравенства (7.4) — (7.6), а также соотношение (7.2) по той же схеме, что и для $d_{p-1,j}$, приходим для коэффициентов $b_{p-1,j}$ к оценке для

$$p \in (n\tilde{\mu}_{s1}/\mu_{q1}, n\mu_{s1}/\mu_{q1}),\ s \geqslant q,$$

$$|b_{p-1,j}| \leqslant T_1^{40}\exp\{-2^{-14}T_1(n_p-1)\tilde{\mu}_{s1}\},\ p \in \boldsymbol{N}_{qs1},$$

$$|b_{p-1,j}| \leqslant T_1^{43}\exp\{-2^{-14}T_1 p\mu_{q1}/n\},\ p \in \boldsymbol{N}_{qs2}. \quad (7.7)$$

Оценки (7.5) — (7.7), очевидно, имеют место и для коэффициентов $\hat{b}_{p-1,j}$, $d_{p-1,j}$. Составим суммы

$$S_{qj}(t) = \sum_{s=q}^{\infty}\sum_{p \in \boldsymbol{N}_{qs1}\cup\boldsymbol{N}_{qs2}}(\hat{b}_{p-1,j} - id_{p-1,j}t)\exp\{-ip\mu_{q1}t/n\}.$$

В силу оценок (7.5) — (7.7) для коэффициентов $\hat{b}_{p-1,j}$, $d_{p-1,j}$ в квадрате $K_{2^{-15}T_1}$ имеем неравенство

$$|S_{qj}(t)| \leqslant BT_1^{45}. \quad (7.8)$$

Обозначим через $\boldsymbol{N}_q$ множество целых чисел:

$$\boldsymbol{N}_q = \{n,\ n\mu_{q+1,1}/\mu_{q1},\ n\mu_{q+2,1}/\mu_{q1},\ \ldots\}.$$

Тогда в квадрате $K_{2^{-15}T_1}$ функция $\hat{f}_{jsm}(-t)$ перепишется в виде

$$\hat{f}_{jsm}(-t) = \sum_{p \in \boldsymbol{N}_q,\ p \leqslant \mu_{s-1,1}n/\mu_{q1}}(\hat{b}_{p-1,j} - id_{p-1,j}t)\exp(-ip\mu_{q1}t/n) + \tilde{H}_{qj}(t),$$

$s \geqslant q+1$, где функция $\tilde{H}_{qj}(t)$ допускает оценку (7.8). В последнем соотношении положим $t = i\alpha 2^{-15}T_1$, $0 < \alpha \leqslant 1$, и разделим обе части равенства на $\exp(\alpha 2^{-15}\mu_{s-1,1}T_1)$. Поскольку в силу оценок (6.10) имеет место неравенство при $\alpha \geqslant BT_1^{-1}$ $\sum\limits_{p\in N_q, p<\mu_{s-1,1}n/\mu_{q1}} \times$ $\times |(\hat{b}_{p-1,j}| + |\hat{d}_{p-1,j}|\alpha T_1)\exp(-\alpha 2^{-16}\mu_{s-1,1}T_1) \leqslant T_1^{20}(1+\mu_{s-1,1}) \times$ $\times \exp(-\alpha 2^{-16}\mu_{s-1,1}T_1) \leqslant T_1^{20}\exp(-\alpha 2^{-17}\mu_{s-1,1}T_1)$, то из определения функций $\hat{f}_{jsm}(t)$, оценок (7.1), (5.3), (7.8) видим, что выполняются неравенства при $p = n\mu_{s-1,1}/\mu_{q1}$ и α, $BT_1^{-1} \leqslant \alpha \leqslant 1$,

$$-T_1^{45}\exp(-\alpha 2^{-17}\mu_{s-1,1}T_1) \leqslant \hat{b}_{p-1,j} + 2^{-15}\alpha d_{p-1,j}T_1 \leqslant$$
$$\leqslant 2c_{s-1,1}\left(\sin\frac{\pi m\mu_{s-1,1}}{\mu_{s1}}\right)^2 + T_1^{45}\exp(-\alpha 2^{-17}\mu_{s-1,1}T_1). \qquad (7.9)$$

Чтобы извлечь отсюда информацию о коэффициентах $b_{p-1,j}$, $d_{p-1,j}$, запишем

$$b_{p-1,j} + 2^{-15}\alpha\hat{d}_{p-1,j}T_1 = 2b_{p-1,j}\left(\sin\frac{\pi m\mu_{s-1,1}}{\mu_{s1}}\right)^2 +$$
$$+ d_{p-1,j}\left\{\frac{2\pi m}{\mu_{s1}}\sin\frac{2\pi m\mu_{s-1,1}}{\mu_{s1}} + 2^{-14}\alpha T_1\left(\sin\frac{\pi m\mu_{s-1,1}}{\mu_{s1}}\right)^2\right\} \qquad (7.10)$$

и разберем различные возможности.

Пусть $b_{p-1,j} \leqslant 0$, $d_{p-1,j} \leqslant 0$. В этом случае из левой части неравенства (7.9) следует при $m = [\mu_{s1}/(4\mu_{s-1,1})] + 1$, $\alpha = 1$, $-b_{p-1,j} \leqslant BT_1^{45}\exp(-2^{-17}\mu_{s-1,1}T_1)$, $-d_{p-1,j} \leqslant BT_1^{44}\exp(-2^{-17} \times$ $\times \mu_{s-1,1}T_1)$.

Пусть $b_{p-1,j} \leqslant 0$, $d_{p-1,j} \geqslant 0$. Если в этом случае $\mu_{s1}/\mu_{s-1,1} = 2$, то, полагая в (7.10) $m = 1$, получаем из правой части неравенства (7.9) при $\alpha = 1$

$$d_{p-1,j} \leqslant cc_{s-1,1}/T_1 + BT_1^{44}\exp(-2^{-17}\mu_{s-1,1}T_1) +$$
$$+ c|b_{p-1,j}|/T_1. \qquad (7.11)$$

Если $\mu_{s1}/\mu_{s-1,1} > 2$, то $m \in N$ можно выбрать так, чтобы выполнялись неравенства

$$\sin\frac{2\pi m\mu_{s-1,1}}{\mu_{s1}} \geqslant \quad , \quad \sin\frac{\pi m\mu_{s-1,1}}{\mu_{s1}} \geqslant \frac{1}{4}. \qquad (7.12)$$

Подставляя такое m в (7.10), снова из правой части неравенства (7.9) получаем оценку (7.11). Чтобы получить оценку коэффициента $b_{p-1,j}$, возьмем в (7.10) m таким, что

$$\sin\frac{2\pi m\mu_{s-1,1}}{\mu_{s1}} \leqslant 0, \quad \sin\frac{\pi m\mu_{s-1,1}}{\mu_{s1}} \geqslant \frac{1}{4}, \qquad (7.13)$$

а $\alpha = 2^{17}/T_1^{1/2}$. Тогда из левой части неравенства (7.9) с указанными m и α с учетом оценки (7.11) получаем

$$-b_{p-1,j} \leqslant c\cdot c_{s-1,1}\cdot T_1^{-1/2} + BT_1^{45}\exp(-\mu_{s-1,1}T_1^{1/2}) \qquad (7.14)$$

и, значит, в силу (7.11) такая же оценка справедлива и для $d_{p-1,j}$.

Пусть $b_{p-1,j} \geqslant 0$, $d_{p-1,j} \leqslant 0$. Выберем в (7.10) $m \in \boldsymbol{N}$ так, чтобы выполнялись неравенства (7.12), что всегда возможно, и воспользуемся левой частью неравенства (7.9) с $\alpha = 1$. Имеем

$$-d_{p-1,j} \leqslant 2^{15} b_{p-1,j} T_1^{-1} + BT_1^{45} \exp(-2^{-17} \mu_{s-1,1} T_1). \quad (7.15)$$

Теперь выберем в (7.10) $m \in \boldsymbol{N}$ так, чтобы выполнялись неравенства (7.13), что тоже всегда возможно, а $\alpha = 1/4$. Тогда из правой части неравенства (7.9) получаем оценку

$$b_{p-1,j} \leqslant c_{s-1,1} + 2^{-17} |d_{p-1,j}| T_1 + BT_1^{45} \exp(-2^{-19} \mu_{s-1,1} T_1). \quad (7.16)$$

Из (7.15) тогда следует неравенство

$$-d_{p-1,j} \leqslant cc_{s-1,1} T_1^{-1} + BT_1^{45} \exp(-2^{-19} \mu_{s-1,1} T_1). \quad (7.17)$$

Пусть $b_{p-1,j} \geqslant 0$, $d_{p-1,j} \geqslant 0$. В этом случае, выбирая в (7.10) $m \in \boldsymbol{N}$ так, чтобы имело место (7.12), получаем из правой части неравенства (7.9) при $\alpha = 1$ оценки (7.16), (7.17).

В итоге заключаем, что для всех $s = q+1, q+2, \ldots$ найдутся такие величины $c > 0$, $B > 0$, что имеют место оценки для $p = \mu_{s-1,1} n / \mu_{q1}$

$$|d_{p-1,j}| \leqslant cc_{s-1,1} T_1^{-\frac{1}{2}} + T_1^{46} \exp\left(-\mu_{s-1,1} T_1^{\frac{1}{2}}\right), \quad (7.18)$$

$$-\frac{cc_{s-1,1}}{T_1^{1/2}} - T_1^{46} e^{-\mu_{s-1,1} T_1^{1/2}} \leqslant b_{p-1,j} \leqslant c_{s-1,1} + T_1^{46} e^{-\mu_{s-1,1} T_1^{1/2}}. \quad (7.19)$$

§ 8. Завершение доказательства теоремы 5. В силу оценок (7.5) — (7.7), (7.18), (7.19), (6.11) в прямоугольнике $K_{0T_2} \cap \{\operatorname{Im} t \leqslant 0\}$, $T_2 = 2^{-18} T_1^{1/2}$, функции $g_{jqn}^{+}(t)$ допускают представления

$$g_{jqn}^{+}(t) = \sum_{p \in N_q} (\beta_{pj} + i\delta_{pj} t) \exp(i(p-1)\mu_{q1} t/n) + \hat{H}_{jq}(t), \quad (8.1)$$

где функции $\hat{H}_{jq}(t)$ — аналитичны и допускают оценки в $K_{0T_2} \cap \{\operatorname{Im} t \leqslant 0\} : |\hat{H}_{jq}(t)| \leqslant BT_1^{46}$, а коэффициенты $\beta_{pj} \in \boldsymbol{R}^1$, $\delta_{pj} \in \boldsymbol{R}^1$, удовлетворяют соотношениям

$$-cc_{s-1,1} T_1^{-1/2} \leqslant \beta_{pj} \leqslant c_{s-1,1},$$

$$|\delta_{pj}| \leqslant cc_{s-1,1} T_1^{-1/2}, \ p = n\mu_{s-1,1}/\mu_{q1}. \quad (8.2)$$

Вернемся к лемме 11. В силу этой леммы и формулы (8.1) функции $g_j(t)$ имеют вид

$$g_j(t) = \sum_{s=q}^{\infty} (\hat{\beta}_{sj} + i\hat{\delta}_{sj} t) e^{i\mu_{s1} t} + H_{jq}^0(t), \quad (8.3)$$

$\hat{\beta}_{sj} = \beta_{pj}$, $\hat{\delta}_{sj} = \delta_{pj}$, $p = n\mu_{s1}/\mu_{q1}$, $s \geqslant q$, функции $H_{jq}^0(t)$ — аналитические в прямоугольнике $\prod\left(\frac{1}{4}r,\ \frac{1}{2}T_2\right)$ и в нем допускают оценку

$$|H_{jq}^0(t)| \leqslant T_2^{100}. \tag{8.4}$$

Введем функции $\psi_{jq}(t)$, $j=1,\ 2$,

$$\psi_{jq}(t)=\sum_{s=q}^{\infty}\left(\beta_{sj}+i\delta_{sj}t\right)\left(e^{i\mu_{s1}t}-1-\frac{it\mu_{s1}}{1+\mu_{s1}^2}\right).$$

В силу оценок (8.2) и выбора точки μ_{q1} в прямоугольнике $\prod\left(\frac{1}{4}r,\ \frac{1}{2}T_2\right)$ выполняется неравенство

$$|g_j(t)-\psi_{jq}(t)| \leqslant cT_2^{100}. \tag{8.5}$$

Теперь, чтобы подчеркнуть зависимость функций $g_j(t)$ от параметра T, будем обозначать их через $g_{jT}(t)$.

В полосе $|\operatorname{Im} t| \leqslant \frac{1}{16}r$ функции $\psi_{jq}(t)$ в силу леммы 8 и оценок (8.2) допускают неравенство $|\psi_{jq}(t)| \leqslant B(1+|t|^3)$. Таким образом, для функций $g_{jT}(t)$ справедлива формула

$$g_{jT}(t)=\psi_{jq}(t)+\tilde{H}_{jq}(t), \tag{8.6}$$

в которой функции $\tilde{H}_{jq}(t)$ удовлетворяют условиям (8.4) и в силу предыдущего неравенства и леммы 10 удовлетворяют дополнительно неравенству

$$|\tilde{H}_{jq}(t)| \leqslant B(1+|t|^3),\ t\in\prod\left(\frac{1}{4}r,\ \frac{1}{4}r,\ T_2\right). \tag{8.7}$$

Применим к функции $F_{jq}(t)=\tilde{H}_{jq}(t)/(1+it)^3$ теорему о двух константах. По этой теореме для $t\in D$ $\ln|F_{jq}(t)| \leqslant \omega_5(t)\max\limits_{\zeta\in E}\times$ $\times\ln|F_{jq}(\zeta)|+(1-\omega_5(t))\max\limits_{\zeta\in[-T_2/2,\ T_2/2]}\ln|F_{jq}(\zeta)|$, где $\omega_5(t)$ — гармоническая мера полуокружности $E=\{\zeta:|\zeta|=T_2/2,\ \operatorname{Im}\zeta<0\}$ относительно полукруга $D=\{\zeta:|\zeta|<T_2/2,\ \operatorname{Im}\zeta<0\}$. По лемме 1 ($R=T_2/2,\ \beta_1=\pi,\ \beta_2=2\pi$) для $t\in D$ и $|t|\leqslant\frac{1}{4}T_2$ имеем $\omega_5(t)\leqslant$ $\leqslant c|\operatorname{Im} t|/T_2$. Тогда с учетом оценок (8.7), (8.4) получаем в $D\cap\{t:|t|\leqslant 4T_3\}$, $T_3=\frac{1}{16}T_2/\ln T_2$, $|F_{jq}(t)|\leqslant B$, что дает в указанном полукруге оценку

$$|\tilde{H}_{jq}(t)| \leqslant B(1+|t|^3). \tag{8.8}$$

Положим теперь $\tilde{H}_{jq1}(t)=\tilde{H}_{jq}(t)-\tilde{H}_{jq}(0)-\tilde{H}_{jq}^{(1)}(0)t-\tilde{H}_{jq}^{(2)}(0)\times$ $\times\frac{t^2}{2}-\tilde{H}_{jq}^{(3)}(0)\frac{t^3}{6}=\tilde{H}_{jq}(t)-P_{jq}(t)$. В силу (8.7) в прямоугольнике $\prod\left(-\frac{1}{4}r,\ \frac{1}{4}r,\ T_3\right)$ имеем неравенство

$$|t^{-4}\tilde{H}_{jq1}(t)| \leqslant B(1+|t|)^{-1}. \tag{8.9}$$

Поэтому функции $W_{jT}(t)$, $j=1,2$, $W_{jT}(t)=t^{-4}\tilde{H}_{jq1}(t)\,I_{T_3}(t)$, где $I_{T_3}(t)$ — индикаторная функция отрезка $[-T_3, T_3]$, т. е. функция, равная 1 на этом отрезке и 0 — вне его, принадлежат $L_2(-\infty, \infty)$ и нормы их не превосходят величины B. К функциям $W_{jT}(t)$ применима теорема М. Планшереля о преобразовании Фурье в пространстве функций $L_2(-\infty, \infty)$. Согласно этой теореме, эсли положить $v_{jT}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-T_3}^{T_3} W_{jT}(t)\,e^{-ixt}\,dt$, то имеет место равенство для $t\in R^1$

$$W_{jT}(t)=\underset{a\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-a}^{a} e^{itx}v_{jT}(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}v_{jT}(x)\,dx, \quad (8.10)$$

при этом в силу (8.9) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|v_{jT}(x)|^2\,dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|W_{jT}(t)^2|\,dt\leqslant B.$

Пусть $x\geqslant 0$. По теореме Коши $v_{jT}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-T_3}^{T_3}(t-iT_3)^{-4}\,\tilde{H}_{jq1}\times$ $\times(t-iT_3)\,e^{-ix(t-iT_3)}dt+\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-T_3}^{0}(T_3+iu)^{-4}\tilde{H}_{jq1}(T_3+iu)\,e^{-ix(T_3+iu)}du-$ $-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-T_3}^{0}(-T_3+iu)^{-4}\tilde{H}_{jq1}(-T_3+iu)\,e^{-ix(-T_3+iu)}\,du$. С помощью оценки (8.8) легко оценим интегралы в правой части этой формулы. Получаем для $x\geqslant 0$ $|v_{jT}(x)|\leqslant Be^{-T_3x}+B\frac{1-e^{-T_3x}}{T_3x}$. Последняя оценка позволяет написать неравенство

$$\int\limits_{0}^{\infty}|v_{jT}(x)|^2\,dx\leqslant B\int\limits_{0}^{T_3^{-1/2}}dx+B\int\limits_{T_3^{-1/2}}^{\infty}(T_3x)^{-2}\,dx\leqslant BT_3^{-1/2}. \quad (8.11)$$

Рассмотрим функции $v_{jT}^{+}(x)$, $j=1,\ 2$, $v_{jT}^{+}(x)=\begin{cases} v_{jT}(x), & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$

Для их преобразований Фурье $W_{jT}^{+}(t)$ в силу (8.11) и равенства Парсеваля имеем

$$\|W_{jT}^{+}(t)\|_2^2=\|v_{jT}(x)\|_2^2\leqslant BT_3^{-1/2}. \quad (8.12)$$

Перепишем функции $\psi_{jq}(t)$ в виде

$$\psi_{jq}(t)=\int\limits_0^\infty\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG_{jq}(x)+$$
$$+\,it\int\limits_0^\infty\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,dV_{jq}(x),$$

где $G_{jq}(x)$ — функции о. в. со скачками во множестве $\{\mu_{n1}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ и такая, что

$$-BT_3^{-1}\{G(\mu_{n1}+0)-G(\mu_{n1})\leqslant G_{jq}(\mu_{n1}+0)-G_{jq}(\mu_{n1})\leqslant$$
$$\leqslant G(\mu_{n1}+0)-G(\mu_{n1}),\tag{8.13}$$

а $V_{jq}(x)$ — функции о. в. , для которых выполняется $\operatorname*{var}\limits_a^b V_{jq}(x)\leqslant$ $\leqslant BT_3^{-1}\{G(b)-G(a)\}$, $a<b$. Поскольку имеет место (8.13), то в силу теоремы о выборе найдется неубывающая функция о. в. $G_j^+(x)$ со скачками во множестве $\{\mu_{n1}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ такая, что

$$G_j^+(\mu_{n1}+0)-G_j^+(\mu_{n1})\leqslant G(\mu_{n1}+0)-G(\mu_{n1}),\tag{8.14}$$

к которой сходится слабо некоторая подпоследовательность функций $G_{jq}(x)$. Эту подпоследовательность будем обозначать по-прежнему через $G_{jq}(x)$. Для функции $\psi_j(t)=\int\limits_0^\infty\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\times$ $\times\frac{1+x^2}{x^2}\,dG_j^+(x)$ в силу (8.14) выполняется оценка (8.7), кроме того,

$$\psi_{jq}(t)\rightrightarrows\psi_j(t),\ T\to\infty\tag{8.15}$$

на любом конечном отрезке. Положим для $T\geqslant B$

$$\psi_{jq1}(t)=\psi_{jq}(t)-\psi_{jq}^{(1)}(0)\,t-\psi_{jq}^{(2)}(0)\,\frac{t^2}{2}-\psi_{jq}^{(3)}(0)\,\frac{t^3}{6}=$$
$$=\psi_{jq}(t)-\widetilde{P}_{jq}(t),$$
$$g_{jT1}(t)=g_{jT}(t)-g_{jT}^{(1)}(0)\,t-g_{jT}^{(2)}(0)\,\frac{t^2}{2}-$$
$$-\,g_{jT}^{(3)}(0)\,\frac{t^3}{6}=g_{jT}(t)-\widetilde{\widetilde{P}}_{jT}(t).$$

Из определения функции $g_{jT}(t)$ следует, что $g_{jT}(t)\rightrightarrows\ln\varphi(t;F_j)$, $T\to\infty$, на любом конечном отрезке. Кроме того, легко видеть, что выполняются соотношения

$$\left.\begin{aligned}&\psi_{jq}^{(k)}(0)\to\psi_j^{(k)}(0),\\ &g_{jT}^{(k)}(0)\to\{\ln\varphi(t;F_j)\}_{t=0}^{(k)}.\end{aligned}\right\}\quad k=1,\,2,\,3;\ T\to\infty.\tag{8.16}$$

Из неравенств (8.7) для функций $\psi_{jq}(t)$ и леммы 10 следуют оценки для $t \in \prod\left(-\frac{1}{4}r,\ \frac{1}{4}r,\ 4T_3\right)$:

$$|t|^{-4}\{|\varphi_{jq1}(t)| + |g_{jT1}(t)|\} \leqslant B(1+|t|)^{-1}. \tag{8.17}$$

Из оценок (8.17) и соотношений (8.15), (8.16) легко получаем, что

$$\lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|v_{jT}(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}|t|^{-8}|\psi_j(t) - $$
$$-\tilde{P}_j(t) - \ln\psi(t;F_j) + \tilde{\tilde{P}}_j(t)|^2\,dt, \tag{8.18}$$

где $\quad \tilde{P}_j(t) = \sum_{m=0}^{3}\psi_j^{(m)}(0)\frac{t^m}{m!}, \qquad \tilde{\tilde{P}}_j(t) = \sum_{m=0}^{3}\{\ln\varphi(t;F_j)\}_{t=0}^{(m)}\frac{t^m}{m!}.$

Теперь рассмотрим функции $v_{jT}^-(x) = v_{jT}(x) - v_{jT}^+(x)$. Поскольку $\|v_{jT}(x)\|_2 \leqslant B$ и выполнено (8.18), то найдется подпоследовательность $v_{jT_k}(x)$, сходящаяся по норме в $L_2(-\infty;\infty)$ к функции $v_j(x) = v_j^+(x) + v_j^-(x) \in L_2(-\infty,\ \infty)$, где функции $v_j^+(x)$, $v_j^-(x)$ определяются аналогично функциям $v_{jT}^+(x)$, $v_{jT}^-(x)$. Преобразования Фурье функций $v_{jT_k}(x)$, $v_{jT_k}^-(x)$ соответственно $W_{jT_k}(t)$ и $W_{jT_k}^-(t)$ сходятся по норме в $L_2(-\infty,\ \infty)$ соответственно к преобразованиям Фурье функций $v_j(x)$, $v_j^-(x)$: $W_j(t)$, $W_j^-(t)$. Поскольку на любом конечном отрезке $W_{jT}^-(t)$ сходятся почти всюду, то сходятся почти всюду они в силу (8.12) к функции $W_j(t)$. Переходя к пределу при $T\to\infty$ по указанной выше последовательности, приходим к такому представлению для функций $\varphi(t;F_j)$, $j = 1,\ 2$:

$$\ln\varphi(t;F_j) = \frac{t^4}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{itx}v_j^-(x)\,dx +$$
$$\int_0^{\infty}\left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG_j^+(x) + \sum_{k=0}^{3}a_{kj}t^k, \tag{8.19}$$

a_{kj} — постоянные. Такое представление для х. ф. $\varphi(t;F_j)$ получается из предположения а) теоремы 5. Из предположения б) теоремы 5, проводя аналогичные рассуждения, получаем следующее представление:

$$\ln\varphi(t;F_j) = \int_{-\infty}^{0}\left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG_j^-(x) +$$
$$+ t^4\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}e^{itx}v_j^+(x)\,dx + \sum_{k=0}^{3}b_{kj}t^k, \tag{8.20}$$

где $G_j^-(x)$ — неубывающая функция о. в. со скачками во множестве $\{\mu_{n2}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ и $G_j^-(\mu_{n2}+0) - G_j^-(\mu_{n2}) \leqslant G(\mu_{n2}+0) - G(\mu_{n2})$, $v_j^+(x) \in L_2(-\infty, \infty)$, b_{kj} — постоянные.

По теореме М. Планшереля функция $\tilde{\psi}_j(t)$: $\tilde{\psi}_j(t) = t^{-4}\{\psi_j(t) - \tilde{\psi}_j^{(1)}(0)\,t - \psi_j^{(2)}(0)\frac{t^2}{2} - \psi_j^{(3)}(0)\frac{t^3}{6}\}$ допускает представление

$\tilde{\psi}_j(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\tilde{v}_j^+(x)\,dx$, $\tilde{v}_j^+(x) \in L_2(-\infty, \infty)$, причем почти для всех x в смысле меры Лебега $\tilde{v}_j^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}_j(t) \times \frac{e^{-ixt}-1}{-it}\,dt$. Для $\forall h > 0$ и $x < 0$ имеем отсюда $\int\limits_{x}^{x+h}\tilde{v}_j^+(u)\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}_j(t)\,\frac{e^{-it(x+h)} - e^{-itx}}{-it}\,dt = I_{jh}(x)$. Поскольку функция $\tilde{\psi}_j(t)$ аналитична в верхней полуплоскости и допускает в ней оценку

$$|\tilde{\psi}_j(t)| \leqslant B(1+|t|)^{-1}, \tag{8.21}$$

то с помощью теоремы Коши легко получаем для $\forall\Delta > 0$ равенство $I_{jh}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}_j(t+i\Delta)\,e^{(\Delta - it)x}\,\frac{e^{-h(it+\Delta)}-1}{-i(t+i\Delta)}\,dt$. Отсюда, учитывая оценку (8.21) с помощью неравенства Коши-Буняковского, имеем $|I_{jh}(x)| \leqslant e^{\Delta x}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\tilde{\psi}_j(t+i\Delta)|^2\,dt\right\}^{1/2} \times \left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t^2+\Delta^2}\right\} \leqslant B \times e^{\Delta x}\Delta^{-1/2}$. Устремляя $\Delta \to \infty$, получаем отсюда, что для $\forall h > 0$ $x < 0$ $\int\limits_{x}^{x+h}\tilde{v}_j^+ \times (u)\,du = 0$, что влечет за собой почти всюду: $\tilde{v}_j^+(x) = 0$, $x < 0$. Таким образом, получаем представление

$$\int\limits_{0}^{\infty}\left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG_j^+(x) =$$

$$= P_j^+(t) + t^4\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\infty} e^{itx}\tilde{v}_j^+(x)\,dx. \tag{8.22}$$

Аналогично получаем

$$\int_{-\infty}^{0} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2}\, dG_j^-(x) =$$

$$= P_j^-(t) + t^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{itx} \tilde{v}_j^-(x)\, dx, \tag{8.23}$$

где $P_j^-(t)$ — полином степени $\leqslant 3$, $\tilde{v}_j^-(x) \in L_2(-\infty, \infty)$. Учитывая соотношения (8.19), (8.20), (8.22), (8.23), записываем

$$t^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{itx} \{v_j^-(x) - \tilde{v}_j^-(x)\} dx = t^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{itx} \{v_j^+(x) - \tilde{v}_j^+(x)\}\, dx + P(t),$$

где $P(t)$ — полином степени $\leqslant 3$. Поскольку после деления этого равенства на t^4 интегралы представляют собою функции из $L_2(-\infty, \infty)$, то $P(t) = 0$. Получившееся равенство позволяет заключить, что почти всюду $v_j^-(x) = \tilde{v}_j^-(x)$, $v_j^+(x) = \tilde{v}_j^+(x)$. Вспоминая определение функций $\tilde{v}_j^-(x)$, $\tilde{v}_j^+(x)$, приходим к представлению

$$\varphi(t; F_j) = \exp\left\{P_j(t) + \int_{R^1 \setminus \{0\}} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2}\, dG_j(x), \right\}, \tag{8.24}$$

в котором $G_j(x) = G_j^-(x)$ для $x < 0$ и $G_j(x) = G_j^+(x)$ для $x > 0$, полином $P_j(t)$ степени $\leqslant 3$. Коэффициенты этого полинома обозначим через γ_{kj}, $k = 1, 2, 3$. Из вещественности $\varphi(t; F_j)$ на отрезке $\left(-\frac{i}{2} r, \frac{i}{2} r\right)$ мнимой оси следует вещественность чисел $i^k \gamma_{kj}$. Из ограниченности $\varphi(t; F_j)$ на вещественной оси и леммы 5. 2. 4 [2, с. 187] легко получаем $\gamma_{2j} \leqslant 0$, $j = 1, 2$. Покажем, что $\gamma_{3j} = 0$, $j = 1, 2$. Пусть это не так, т. е. $\gamma_{3j} \neq 0$. Не уменьшая общности, считаем, что $i\gamma_{3j} < 0$. Вернемся к функциям $g_{jT}(t)$. В силу (8.15) получаем на любом конечном отрезке соотношение

$$\tilde{H}_{jq}(t) - \gamma_{3j} t^3 \rightrightarrows P_j(t) - \gamma_{3j} t^3 +$$

$$\int_{-\infty}^{0} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2}\, dG_j^-(x), \; T \to \infty. \tag{8.25}$$

Из (8.8) следует, что это соотношение сохраняется на любом компакте, лежащем в замкнутой нижней полуплоскости. Вспоминая, что функции $g_{jT}(t)$ аналитичны в прямоугольнике $\prod\left(\frac{1}{4} r, T_3\right)$, нетрудно заметить, что и функции $\psi_{jq}(t)$ аналитичны в этом же прямоугольнике и задаются в этом прямоугольнике тем же рядом, что и на вещественной оси. Из свойства хребтовости функции $g_{jT}(t)$ в прямоугольнике $\prod\left(\frac{1}{4}r,\ T_3\right)$ имеем: $t = u + iv$,

$$3i\gamma_{3j}vu^2 \leqslant \psi_{jq}(iv) - \operatorname{Re}\psi_{jq}(u+iv) +$$
$$+\{\tilde{H}_{jq}(iv) + i\gamma_{3j}v^3\} - \operatorname{Re}\{\tilde{H}_{jq}(u+iv) - \gamma_{3j}(u+iv)^3\}. \qquad (8.26)$$

Пусть $-v = u = 2\pi/\mu_{s1}$, $\mu_{q1}^{1/8} \leqslant \mu_{s1} \leqslant B$, тогда имеем оценку

$$|\psi_{jq}(iv) - \operatorname{Re}\psi_{jq}(u+iv)| \leqslant B\left(1 + \frac{|v|}{T_3}\right)\sum_{p=q}^{s-1} c_{p1}e^{-\mu_{p1}v}\sin^2\frac{\mu_{p1}u}{2} +$$
$$+\frac{Bu}{T_3}\sum_{p=q}^{s-1} c_{p1}\left|e^{-\mu_{p1}v}\sin(\mu_{p1}u) - \mu_{p1}u\right| + \frac{Bu^2}{T_3} \leqslant Bu^2\left(1 + \frac{|v|}{T_3} + \frac{u^2}{T_3}\right).$$

В силу соотношения (8.25) для $t = iv$, $u + iv$ при тех же u и v имеем для достаточно больших T $|\tilde{H}_{jq}(iv) - \operatorname{Re}\tilde{H}_{jq}(u+iv) + 3ivu^2\gamma_{3j}| \leqslant B(u^2+1)$. Положим в (8.26) $-v = u = 2\pi/\mu_{s1}$, где μ_{s1} — достаточно малое фиксированное число. Разделив обе части неравенства (8.26) на $-3vu^2$ и учитывая две последние оценки, получаем неравенство $|\gamma_{3j}| < \frac{1}{2}|\gamma_{3j}|$, что приводит нас к противоречию. Таким образом, в представлении (8.24) $\gamma_{3j} = 0$ и х. ф. $\varphi(t; F_j)$ являются х. ф. б. д. ф. р. Теорема 5 доказана.

Список литературы: 1. *Чистяков Г. П.* О факторизации вероятностных распределений класса L Ю. В. Линника. I// Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1986.— Вып. 47.— С. 20—77. 2. *Линник Ю. В., Островский И. В.* Разложения случайных величин и векторов.— М.: Наука, 1972.— 480 с. 3. *Евграфов М. А.* Аналитические функции.— М.: Наука, 1965. —424 с. 4. *Чистяков Г. П.* Об устойчивости для теоремы Ю. В. Линника // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1969.— Вып. 9.— С. 118—134. 5. *Чистяков Г. П.* Об устойчивости разложений одного класса безгранично делимых законов // Мат. физика и функцион. анализ.— 1974.— Вып. 5.— С. 27 — 50.

Поступила в редколлегию 25.01.85