УДК 517.9

А. М. БЛОХ

О ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ НА ОДНОМЕРНЫХ РАЗВЕТВЛЕННЫХ МНОГООБРАЗИЯХ. 3

Настоящее исследование является продолжением работ [1, 2]. Ранее [2] для неатомических инвариантных мер μ непрерывного отображения одномерного разветвленного многообразия (будем писать ниже «графа») доказана равносильность таких свойств: а) $\exists x : \operatorname{supp} \mu \subset \omega(x)$; б) у μ есть типичная точка; в) μ изоморфна мере Лебега для некоторого иррационального поворота окружности либо приближается мерами, сосредоточенными на циклах.

Устанавливаем данный факт для любых мер. Для этого в подразд. 1 введено понятие квазиспецификации, более слабое, чем свойство спецификации, но влекущее аналогичные свойства инвариантных мер. В подразд. 2 доказано, что непрерывные отображения «графа» на базисном множестве (определения см. в работе [1] или ниже) обладают квазиспецификацией, что вместе с доказанным ранее [1] дает сформулированный результат (см. подразд. 3). Там же обобщены результаты о множествах вращения для отображений окружности степени 1 на случай отображений «графов» (ср. с [3]) и получен ряд следствий о поточечных предельных множествах чезаровских итераций непрерывных функций под действием отображения «графа».

1. Пусть (X, d) — метрический компакт; $T: X \to X$ — непрерывно; $Q_e(T)$ — множество всех типичных для какой-либо неатомической меры точек; $Q(T) = Q_e(T) \cup \operatorname{Per} T$. Скажем, что T обладает свойством *квазиспецификации* КС-*свойством*) и является *КС-отображением*, если есть компакты $X_1, \ldots, X_R$ и число u с такими свойствами.

1) $X = \bigcup\limits_{i=1}^{R} X_i$, $TX_i = X_{i+1}$ $(1 \leqslant i \leqslant R-1)$, $TX_R = X_1$, $X_i \cap X_j$ конечно $(i \neq j)$.

2) Для любого набора точек $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset Q(T)$, которым сопоставлены компакты $X_{r(i)} \ni x_i$, любых $s > 0$ и $\varepsilon > 0$, есть числа $N = N(\bigcup\limits_{i=1}^{n} x_i, s, \varepsilon)$ и $M = M(\bigcup\limits_{i=1}^{n} x_i, s, \varepsilon)$ такие, что если дан набор чисел $a_1 \leqslant b_1 < a_2 \leqslant b_2 < \cdots < a_n \leqslant b_n$, p, где $a_{i+1} - b_i \geqslant M \times (1 \leqslant i \leqslant n-1)$, $p - b_n + a_1 \geqslant M$, $p \,\vdots\, R$, $T^{a_j - a_1} X_{r(1)} = X_{r(j)} \times (1 \leqslant j \leqslant n)$, $b_i - a_i \geqslant N$ при $x_i \notin \operatorname{Per} T$, то найдется z, где $T^{up} z = z$, с такими свойствами: а) при $x_i \in \operatorname{Per} T$ и $a_i \leqslant t \leqslant b_i$, $d(T^{lp+t} z, T^{t-a_i} x_i) \leqslant \varepsilon$ $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 0 \leqslant l \leqslant u-1)$; б) при $x_i \notin \operatorname{Per} T$ для не менее чем $(1-s)(b_i - a_i)$ чисел t из $\{a_i, \ldots, b_i\}$ имеем $d(T^{t+pl} z, T^{t-a_i} x_i) \leqslant \varepsilon$ $(0 \leqslant l \leqslant u-1,\ 1 \leqslant i \leqslant n)$.

От известного свойства спецификации КС-свойство отличается «статистическим» характером и тем, что константы зависят от выбранных точек. Нам понадобится

Лемма 1. *а) Пусть* $\{a_i\}_{i=1}^{N}$ *— набор чисел, причем для не менее чем* k *из них* $|a_i| \leqslant \varepsilon$, *а для остальных —* $|a_i| \leqslant c$. *Тогда* $\left|\sum\limits_{i=1}^{N} a_i\right| \cdot N^{-1} \leqslant \varepsilon + (1 - kN^{-1})\, c$.

б) Пусть $\{a_i\}_{i=1}^{N}$, $\{b_j\}_{j=1}^{M}$ *— два набора чисел,* $N \leqslant M$, *каждому* i *инъективно сопоставлено* $j = j(i)$ *так, что для не менее чем* k *чисел* i $|a_i - b_{j(i)}| \leqslant \varepsilon$, *а для любых* i *и* j $|a_i| \leqslant c$,

$b_j| \leqslant c$. *Тогда* $|N^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{N} a_i - M^{-1} \cdot \sum_{j=1}^{M} b_j| \leqslant \varepsilon + 2c\left(1 - \frac{k}{N}\right) + 2c \times \left(\frac{M-N}{M}\right)$.

Доказательство. а) Очевидно. б) По пункту а) $|M^{-1} \times \sum_{i=1}^{N} (a_i - b_{j(i)})| \leqslant \varepsilon + 2c\left(1 - \frac{k}{N}\right)$. Но $\left|\sum_{i=1}^{N} \frac{b_{j(i)}}{N} - \sum_{j=1}^{M} \frac{b_j}{M}\right| \leqslant \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{M}\right)c + \frac{M-N}{M} c = 2c\left(\frac{M-N}{M}\right)$, что и требовалось доказать.

Назовем инвариантную меру с носителем на цикле СО-*мерой*; объединение СО-мер, сосредоточенных на циклах периода p, обозначим $P(p)$. Семейство всех T-инвариантных вероятностных мер обозначим $D_T(X)$. Центр T обозначим $Ce(T)$. Для $x \in X$ пусть $V_T(x)$ — множество предельных мер для последовательности мер $\delta_x^N = N^{-1} \cdot (\delta(x) + \cdots + \delta(T^{N-1}x))$, где $\delta(\cdot)$ — обозначение для δ-меры. Заметим (см. [4, 3.8]), что $V_T(x) \subset D_T(X)$, $V_T(x)$ непусто, замкнуто и связно. Следующая теорема близка к доказанным в гл. 21 книги [4]; в ней мы будем считать $u = 1$ (см. определение КС-свойства), так как все доказательства верны при $u > 1$.

Теорема 1. *Пусть* $T: X \to X$ — *КС-отображение. Тогда* а) $\bigcup_{p \geqslant l} P(p)$ *плотно в* $D_T(X)$ $(\forall l)$; *б) семейство эргодических неатомических мер с носителем* X *массивно в* $D_T(X)$; *в) если* $V \subset D_T(X)$ — *непустой связный компакт, то множество* $x \in Ce(T)$ *таких, что* $V_T(x) = V$, *плотно в* $Ce(T)$; *г) множество* $x \in Ce(T)$ *таких, что* $V_T(x) = D_T(X)$, *массивно в* $Ce(T)$.

Доказательство. а) Пусть $l \in N$, $\mu \in D_T(X)$, окрестность μ в $D_T(X)$ имеет вид $W(\mu) = \{\nu \in D_T(X) : \left|\int \varphi\, d\mu - \int \varphi\, d\nu\right| < \varepsilon$ при $\varphi \in F\}$, где $F \subset C(X)$ — конечный набор функций; $\|\varphi\| \leqslant 1$ при $\varphi \in F$. Докажем, что $W(\mu) \cap (\bigcup_{p \geqslant l} P(p)) \neq \varnothing$. Для $x \in Q(T)$ пусть $\varphi^*(x) = \lim \delta_x^n(\varphi)$. Разобьем $Q(T)$ на непустые борелевские множества $Q_1, \ldots, Q_k$ так, что φ^*/Q_j имеет колебание меньше $\varepsilon/6$, выберем $x_j \in Q_j$ и возьмем достаточно большое N; тогда

$$\left|\int \varphi\, d\mu - \sum_{j=1}^{k} \mu(Q_j) \cdot \delta_{x_j}^N(\varphi)\right| < \varepsilon/3 \quad (\forall \varphi \in F).$$

Найдем натуральные $m_1, \ldots, m_k$ так, что $\frac{1}{m} \cdot m_j$ близко к $\mu(Q_j)$, где $m = m_1 + \cdots + m_k$; тогда имеем $\left|\int \varphi\, d\mu - \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{m} \cdot m_j \times \delta_{x_j}^N(\varphi)\right| < \varepsilon/3$. Пусть $s = \varepsilon/12$, точки $\{y_i\}_{i=1}^{m}$ выбраны так: при $0 < i \leqslant m_1$ $y_i = x_1, \ldots,$ при $m_1 + \cdots + m_j < i \leqslant m_1 + \cdots + m_{j+1}$ $y_i = x_{j+1}, \ldots$. Далее, пусть δ — такое, что $d(x', y') \leqslant \delta$ влечет

$|\varphi(x') - \varphi(y')| \leqslant \frac{\varepsilon}{6}$ $(\forall \varphi \in F)$. Тогда по КС-свойству есть числа N, M с надлежащими свойствами, причем можно считать, что $(M + R) \cdot (M + N)^{-1} < \varepsilon/3$.

Подберем числа $0 = a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m, p$ так, чтобы удовлетворялись условия КС-свойства, причем $b_i = a_i + N$, $M \leqslant a_{i+1} - b_i \leqslant M + R$ $(1 \leqslant i \leqslant m - 1)$, $M \leqslant p - b_m \leqslant M + R$, $p \vdots R$. Тогда есть z такое, что $T^p z = z$, $d(T^t z, T^{t-a_j} y_j) \leqslant \delta$ для не менее чем $(1 - s)(b_j - a_j)$ чисел $t \in \{a_j, \ldots, b_j\}$ $(j = 1, \ldots, m)$. Пусть A' — множество чисел из $\mathbf{Z} \cap (\bigcup_{j=1}^{m} [a_j, b_j])$ таких, что при $t \in [a_j, b_j] \cap A'$ $d(T^t z, T^{t-a_j} y_t) \leqslant \delta$. Имеем 1) для $\operatorname{card} A' \geqslant mN(1 - s)$ чисел r между 0 и $p - 1$ $|\varphi(T^r z) - \varphi(T^{r-a_j} y_j)| = \frac{\varepsilon}{6}$, где $a_j \leqslant r \leqslant b_j$; 2) $|\varphi(x)| \leqslant 1$ $(\forall x)$. По лемме 1 отсюда

$$\left|\delta_z^p(\varphi) - m^{-1} \sum_{j=1}^{m} \delta_{y_j}^N(\varphi)\right| = \left|\delta_z^p(\varphi) - \sum_{j=1}^{k} \frac{m_j}{m} \cdot \delta_{x_j}^N(\varphi)\right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{6} + 2\left(1 - \frac{mN(1-s)}{mN}\right) + 2\left[1 - mN \cdot (m \cdot (N + M + R))^{-1}\right] <$$

$$< \frac{\varepsilon}{6} + 2s + (M + R)(M + N + R)^{-1} < \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Окончательно $\left|\int \varphi\, d\mu - \delta_z^p(\varphi)\right| < \varepsilon$, что и требовалось доказать. б) Несложно следует из а) (см. [4, предложения 21.9—21.12]). в) Из а) $\overline{\operatorname{Per} T} = \operatorname{Ce}(T)$. Поэтому достаточно в δ_0-шаре с центром $x_0 \in \overline{\operatorname{Per} T}$ найти $z \in \operatorname{Ce}(T) : V_T(z) = V$. Пусть $\tilde{d}$ — метрика в пространстве $D(X)$ всех мер на X. Найдутся замкнутые шары $\{B_n\}$ в $D(X)$ с радиусами ε_n такие, что 1) $B_n \cap B_{n+1} \cap V \neq \varnothing$ $(\forall n)$; 2) $\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n \geqslant N} B_n = V$; 3) $\varepsilon_n \to 0$; 4) центры всех B_n — СО — меры γ_n, носители которых — орбиты периодических точек x_n периода q_n.

Лемма 2. *Пусть $x, y \in \operatorname{Per} T$, p — период x, q — период y, $\tilde{\delta} > 0$. Найдутся числа k, l, M_1, M_2 и точка z такие, что если $r = kp + lq + M_1 + M_2$, то $T^r z = z$, а также 1) при $0 \leqslant i \leqslant kp$ $d(T^i x, T^i z) \leqslant \tilde{\delta}$; 2) при $kp + M_1 \leqslant i \leqslant kp + M_1 + lq$ $d(T^{i-kp-M_1} y, T^i z) \leqslant \tilde{\delta}$; 3) для $m \geqslant kp$ найдется $\alpha = \alpha(m) \in [0, 1]$ такое, что если $\varphi \in C(X)$, $\|\varphi\| \leqslant 1$, а $d(x', y') \leqslant \tilde{\delta}$ влечет $|\varphi(x') - \varphi(y')| \leqslant \varepsilon$, то $|\delta_z^m(\varphi) - \alpha \cdot \delta_x^p(\varphi) - (1 - \alpha)\,\delta_y^p(\varphi)| \leqslant 2\varepsilon$, причем при $m \geqslant r$ $\alpha(m) = 0$.*

Доказательство. По КС-свойству найдем M, соответствующее числу $\tilde{\delta}$ и точкам x, y (так как $x, y \in \operatorname{Per} T$, то s и N неважны). Выберем теперь k и l так, что $k > 4(M + R) \cdot (\varepsilon p)^{-1}$ 1); $l > \max\{2kp \cdot q^{-1}(4\varepsilon^{-1} - 1),\ 8(2M + 2R + p + q) \cdot q^{-1}\varepsilon^{-1}\}$ 2).

Выберем M_1: $M \leqslant M_1 \leqslant M + R$, а затем $M_2 : M \leqslant M_2 \leqslant M + R$ так, чтобы КС-свойство было применимо к точкам x, y и числам $a_1 = 0$, $b_1 = kp$, $a_2 = b_1 + M_1$, $b_2 = a_2 + lq$, а период точки z, совместно приближающей орбиты x, y, есть $b_2 + M_2 = r$. Чтобы проверить для z пункт 3) условия, выделим в множестве $\{0, \ldots, m-1\}$ подмножества $A = \{i : i \bmod r \leqslant kp\}$, $B = \{i : kp + M_1 \leqslant i \bmod r \leqslant kp + M_1 + lq - 1\}$. Уменьшив A не более чем на p, а B — не более чем на q элементов, можно считать A и B состоящими из целого набора групп по p (соответственно q) идущих друг за другом чисел, первое из которых в группах из A сравнимо по модулю r с кратным p числом, а в группах из B — с числом вида $kp + M_1 + tq$, где $t \in \boldsymbol{N}$, $t \leqslant l$. Наконец, пусть $C = \{0, \ldots, m-1\} \setminus (A \cup B)$.

Обозначим $\operatorname{card} A = a$, $\operatorname{card} B = b$, $\operatorname{card} C = c$; для любого i такого, что $i \bmod r \in \{0, \ldots, kp\} \cup \{kp + M_1, \ldots, kp + M_1 + lq\}$, рассмотрим функцию $\chi(i) = 1)$ $i \bmod r$ при $0 \leqslant i \bmod r \leqslant kp$; 2) $i \bmod r - kp - M_1$ при $kp + M_1 \leqslant i \bmod r \leqslant kp + M_1 + lq$ (ясно, что для этих $id(T^i z, T^{\chi(i)}\zeta) \leqslant \delta$, где $\zeta = x$ или $\zeta = y$ в зависимости от i). Применим лемму 1 к числам $\{\varphi(T^i z)\}_{i=0}^{m-1}$, а также $\{\varphi(T^{\chi(i)} x)\}_{i \in A}$, $\{\varphi(T^{\chi(i)} y)\}_{i \in B}$. Имеем $\left|\delta_z^m(\varphi) - \left(\sum\limits_{i \in A} \varphi \times (T^{\chi(i)} x) + \sum\limits_{i \in B} \varphi(T^{\chi(i)} y)\right) \cdot (a+b)^{-1}\right| = \left|\delta_z^m(\varphi) - \frac{a}{a+b} \cdot \delta_x^p(\varphi) - b \times (a+b)^{-1} \cdot \delta_y^q(\varphi)\right| \leqslant \varepsilon + 2c(a+b+c)^{-1}$. Но если $m \leqslant r$, то $c \leqslant M_1 + M_2$, следовательно, $2c(a+b+c)^{-1} \leqslant 2(M_1 + M_2)(kp)^{-1} \leqslant \varepsilon$ по 1) (и $\alpha(m) = a(a+b)^{-1}$), а если $m > r$, то, обозначив E целую часть m/r, имеем $b \geqslant Elq$, $a \leqslant (E+1)kp$, $c \leqslant (E+1) \times (M_1 + M_2) + p + q$; отсюда и из 2) $2c(a+b+c)^{-1} \leqslant 2cb^{-1} \leqslant [2(E+1)(M_1 + M_2) + p + q] \cdot (Elq)^{-1} \leqslant 4(M_1 + M_2 + p + q)/lq < \varepsilon/2$ 3). Поскольку $\left|\frac{a}{a+b}\delta_x^p(\varphi) - \frac{a}{a+b} \cdot \delta_y^q(\varphi)\right| \leqslant 2a(a+b)^{-1} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, то $|\delta_z^m(\varphi) - \delta_y^q(\varphi)| \leqslant 2\varepsilon$. Лемма доказана.

Продолжая доказательство пункта в) теоремы 1, рассмотрим индуктивный процесс. Пусть $a_0 = b_0 = 0$, $z_0 = x_0$ — выбранная нами точка. Найдем по числу $\tilde{\delta}_1 = \tilde{\delta}_0 \cdot 2^{-1}$ и точкам z_0, x_1 с периодами $p_1 = q_0$ и q_1 числа k_1, l_1, M_1', M_1'' и точку $z_1 \in \operatorname{Per} T$ так, как гарантирует лемма 2. Тогда $T^{k_1 p_1 + l_1 q_1 + M_1' + M_1''}(z_1) = z_1$, при $0 \leqslant i \leqslant k_1 p_1$ $d(T^i z_0, T^i z_1) \leqslant \tilde{\delta}_1$, при $k_1 p_1 + M_1' \leqslant i \leqslant k_1 p_1 + M_1' + l_1 q_1$ $d(T^i z_0, T^{i - k_1 p_1 - M_1'} x_1) \leqslant \tilde{\delta}_1$ выполняется свойство 3) из леммы 2. Далее построение аналогично; на n-м шагу найдем по числу $\tilde{\delta}_n = \tilde{\delta}_0 \cdot 2^{-n}$, точке z_{n-1} с периодом p_n и точке x_n с периодом q_n числа k_n, l_n, M_n', M_n'' и точку z_n со свойствами из леммы 2. Ясно, что есть $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z$, $d(z, x_0) \leqslant \delta_0$. Далее, очевидно, что при $i \leqslant k_n p_n$ $d(T^i z, T^i z_n) \leqslant \delta_n$, а при $k_{n-1} p_{n-1} + M_n' \leqslant j \leqslant$

$\leqslant k_{n-1}p_{n-1} + M'_{n-1} + l_{n-1}q_{n-1}$ $d(T^j z_n,\ T^{j-k_n p_n - M'_n} x_n) \leqslant \delta_n$. Докажем, что $V = V_T(z)$.

Вначале докажем, что $V \subset V_T(z)$. Если $\mu \in V$, то найдется последовательность $\{n(k)\}$ такая, что $\gamma_{n(k)} \to \mu$. Пусть $\varphi \in C(X)$, i_0 — такое, что при $d(x',\ y') \leqslant \delta_{i_0}$ $|\varphi(x') - \varphi(y')| \leqslant \varepsilon$. Тогда при $n(k) \geqslant i_0$ $|\delta_{z_{n(k)}}^{p_{n(k)}}(\varphi) - \delta_{x_{n(k)}}^{q_{n(k)}}(\varphi)| \leqslant 2\varepsilon$, а также $|\delta_z^{p_{n(k)}}(\varphi) - \delta_{z_{n(k)}}^{p_{n(k)}}(\varphi)| \leqslant \varepsilon$, откуда $|\delta_{z_{n(k)}}^{p_{n(k)}}(\varphi) - \int \varphi\, d\gamma_{n(k)}| \leqslant 3\varepsilon$. Так как $\gamma_{n(k)} \to \mu$, то отсюда $\delta_z^{p_{n(k)}}(\varphi) - \int \varphi\, d\mu \Big|_{k\to\infty} \to 0$, т. е. $V \subset V_T(z)$.

Будем теперь доказывать, что $V_T(z) \subset V$. Пусть $\{n_j\}$ — последовательность, $\delta_z^{n_j} \underset{j\to\infty}{\to} \nu$. Фиксируем $\varphi \in C(X)$, $\|\varphi\| \leqslant 1$. Для всех i найдем $r = r(i)$ так, что $k_{r(i)}p_{r(i)} \leqslant n_i < k_{r(i)+1}\ p_{r(i)+1}$. Пусть i так велико, что при $d(x',\ y') \leqslant \delta_{r(i)-1}$, $|\varphi(x') - \varphi(y')| \leqslant \varepsilon$. По лемме 2 для $\alpha_i = \alpha(n_i)$ $\delta_{z_{r(i)}}^{n_i}(\varphi) - \alpha_i \cdot \delta_{z_{r(i)-1}}^{p_{r(i)-1}}(\varphi) - (1-\alpha_i)\,\delta_{x_{r(i)}}^{q_{r(i)}}(\varphi)\,| \leqslant 2\varepsilon$ затем по той же лемме $|\delta_{z_{r(i)-1}}^{p_{r(i)-1}}(\varphi) - \delta_{x_{r(i)-1}}^{q_{r(i)-1}}(\varphi)| \leqslant 2\varepsilon$ и, наконец, $|\delta_z^{n_i}(\varphi) - \delta_{z_{r(i)}}^{n_i}(\varphi)| \leqslant \varepsilon$ по выбору i. Окончательно $|\delta_z^{n_i}(\varphi) - \alpha_i \times \int \varphi d\gamma_{r(i)-1} - (1-\alpha_i)\int \varphi d\gamma_{r(i)}| \leqslant 5\varepsilon$. Значит, $\alpha_i\gamma_{r(i)-1} + (1-\alpha_i) \times \gamma_{r(i)} \underset{i\to\infty}{\to} \nu$. Но этот предел лежит в V, так как $\tilde{d}(\gamma_{r(i)-1},\ V) \leqslant \varepsilon_{r(i)-1}$, $\tilde{d}(\gamma_{r(i)-1},\ \gamma_{r(i)}) \leqslant \varepsilon_{r(i)-1} + \varepsilon_{r(i)}$, $\varepsilon_r \underset{r\to\infty}{\to} 0$, что и требовалось доказать.

2. Напомним ряд определений из [1, 2]. *Узел* $\underset{\text{def}}{\equiv}$ точка «графа», не имеющая окрестности, гомеоморфной интервалу; из определения следует, что у «графа» конечное число узлов. *Дуга* $\underset{\text{def}}{\equiv}$ подмножество «графа», гомеоморфное интервалу. Если x — точка «графа» K, то под *стороной R точки x* будем понимать семейство открытых невырожденных не содержащих узлов дуг $\{V_R(x)\}$ с одним из концов в x и таких, что если $V'_R(x) \in R$, $V''_R(x) \in R$, то либо $V'_R(x) \subset V''_R(x)$, либо $V''_R(x) \subset V'_R(x)$. Пусть $f: K \to K$ непрерывно, $x \in K$, R — сторона x, S — сторона fx; *S принадлежит образу R*, если для любой полуокрестности $V_R(x) \in R$ найдется полуокрестность $V_S(fx) \in S$ такая, что $fV_R(x) \supset V_S(fx)$. *Множество всех сторон x* обозначим $Si(x)$. Важным для нас будет следующее определение. Пусть $T: X \to X$, $\tilde{T}: \tilde{X} \to \tilde{X}$ — непрерывные отображения топологических пространств, $\Phi: X \to \tilde{X}$ — монотонная (т. е. $\Phi^{-1}(\tilde{x})$ связно для любого $\tilde{x} \in \tilde{X}$) непрерывная сюръекция, полусопрягающая T и $\tilde{T}$ (т. е. $\Phi_\circ T = \tilde{T}_\circ \Phi$). Пусть $F \subset X$ — T-инвариантное замкнутое множество, причем существует $N < \infty$ такое, что для любого $\tilde{x} \in \tilde{X}$ $1 \leqslant \mathrm{card}(\Phi^{-1}(\tilde{x}) \cap F) \leqslant N$ и $\mathrm{int}(\Phi^{-1}(\tilde{x})) \cap F = \varnothing$ (т. е. $\Phi^{-1}(\tilde{x}) \cap F \subset \partial\Phi^{-1}(\tilde{x})$); тогда Φ *почти точно на F полусопрягает T и $\tilde{T}$*. Если еще $\Phi^{-1}(\tilde{x}) \cap F = \partial\Phi^{-1}(\tilde{x})$, то назовем Φ *полным*. Ниже, если не оговорено противное, рассматриваются

непрерывные отображения «графов». Наконец, пусть на «графе» выбрана метрика d с таким свойством: каждой дуге A сопоставлена ее длина $l(A)$ и если $l(A)$ мало, то для любых $x, y \in A$ $d(x, y) = l([x, y])$, где $[x, y] \subset A$ — дуга с концами в x и y.

Пусть M — инвариантный *«подграф»* ($\underset{\text{def}}{\equiv}$ подмногообразие). Если множество $E(M) = \{x \in M$: любая окрестность x в M имеет плотную траекторию$\}$ бесконечно, то при $\mathrm{Per}\, f/M \neq \varnothing$ назовем $E(M)$ *базисным* и будем обозначать $B(M)$, а при $\mathrm{Per}\, f/M = \varnothing$ назовем $E(M)$ *окружностным* и будем обозначать $S(M)$. В [1, 5] доказаны две теоремы, которые объединим здесь в одну.

Теорема 2. *а)* [1] *Бесконечное множество $E = E(M)$ — совершенно, f/E — транзитивно и если $\omega_f(z) \supset E$, то $\omega_f(z) = E$; при этом существует «граф» $\boldsymbol{M}$ и транзитивное отображение $g: \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}$ такие, что f/M полно и почти точно на E полусопряжено с g, причем кратность полусопряжения на E зависит лишь от топологии M;* б) ([5]) *Пусть $\psi: K \to K$ транзитивно. Тогда $K = \bigcup_{i=0}^{m-1} K_i$, где все K_i — связные компакты, $K_i \cap K_j$ конечно при $i \neq j$, $\psi K_i = K_{i+1}$ $(0 \leqslant i \leqslant m-1)$, $\psi K_{m-1} = K_0$, f^m/K_i имеет свойство спецификации (если $\mathrm{Per}\, \psi \neq \varnothing$) или сопряжено с иррациональным сдвигом в окружности (если $\mathrm{Per}\, \psi = \varnothing$).*

Докажем КС-свойство для отображений базисных множеств.

Теорема 3. *Если $f: K \to K$ — непрерывное отображение «графа», F — базисное, то f/F — КС-отображение.*

Доказательство. Из определения ясно, что можно считать $F = E(K)$. По теореме 2 найдется транзитивное отображение некоторого «графа» $g: \boldsymbol{K} \to \boldsymbol{K}$, с которым f полно и почти точно на F φ-полусопряжено, в $\boldsymbol{K}$ есть «подграфы» $\boldsymbol{K}_1, \ldots, \boldsymbol{K}_{m'}$, циклически переставляющиеся под действием g, причем $g^{m'}/\boldsymbol{K}_i$ обладает свойством спецификации $(\forall i)$. Обозначим $\boldsymbol{d}(\cdot, \cdot)$ метрику на $\boldsymbol{K}$. Достаточно доказать, что $f^{m'}/\varphi^{-1}(\boldsymbol{K}_1) \cap F$ — КС-отображение с $R = 1$, отсюда будет следовать, что f/F — КС-отображение с $R = m'$ и разбиением F на подмножества $\varphi^{-1}(\boldsymbol{K}_i) \cap F$. Поэтому будем считать, что $m' = 1$, g обладает свойством сцецификации. Пусть даны $\varepsilon > 0$, $s > 0$, $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset Q(f)$. Обозначим $\pi = \{i : x_i \in \mathrm{Per}\, f\}$, для $i \in \pi$ пусть σ_i' — множество всех сторон x_i, с которых x_i предельна для F. Ясно, что найдется q такое, что для любого $i \in \pi$ $f^q(\sigma_i') \subset \sigma_i'$ (в частности, $f^q x_i = x_i$ для $i \in \pi$). Пусть теперь σ_i'' — множество всех сторон S точек из $F \cap \varphi^{-1}(\varphi(x_i))$, для которых найдется $m(S)$ такое, что $f^{qm(S)}(S) \subset \sigma_i'$; пусть m — максимум $m(S)$ по всем i и S. Обозначим $\sum_i' = \varphi(\sigma_i')$, $\sum_i'' = \varphi(\sigma_i'')$, $\boldsymbol{y}_i = \varphi(x_i)$.

Определим важные для дальнейшего константы и окрестности.

1) Пусть ε_1 — такое, что $d(x', y') < \varepsilon_1$ влечет $d(f^i x', f^i y') < \varepsilon$ при $0 \leqslant i < q$ (в частности, $\varepsilon_1 < \varepsilon$).

2) Пусть А — семейство всех множеств вида $\varphi^{-1}(y)$ с $\mathrm{diam}\, \varphi^{-1} \times (y) \geqslant \varepsilon/3$, В — семейство их окрестностей вида $\varphi^{-1}(U_y)$, где U_y

фиксировано для каждого $y \in \varphi(A)$ и выбрано так, что найдется N со следующим свойством: при $l \geqslant N$, $z \in \{x_1, \ldots, x_n\} \setminus \operatorname{Per} f$ выполняется $l^{-1} \cdot \sum_{i=0}^{l} \chi_{\varphi^{-1}(\tilde{U})}(T^i z) < s$, где $\chi_A = 1$ на множестве, $\chi_A = 0$ вне A; $\tilde{U} = \bigcup_{U \in \mathrm{B}} U$.

3) Фиксируем $i \in \pi$. По всем сторонам точек из $\varphi^{-1}(\varphi(x_i)) \cap F$, не принадлежащим σ_i'', рассмотрим объединение Ω_i малых односторонних полуокрестностей, f^q-образ которого не пересекается с некоторым объединением W_i^* односторонних полуокрестностей точек из $\varphi^{-1}(\varphi(x_i))$, которое, в свою очередь, берется по всем сторонам из σ_i''. Можно считать, что $\operatorname{diam} \Omega_i < \varepsilon_1$, $\operatorname{diam} W_i^* < \varepsilon_1$. По выбору Ω_i, если $z \in \Omega_i$, а для некоторого k $f^{kq} z \in W_i^*$, то для некоторого $k' \leqslant k$ $f^{k'q} z \notin W_i^* \cup \Omega_i$, откуда для некоторого $\delta_2 > 0$ $d(f^{k'q}(\varphi(z)), \boldsymbol{y}_i) \geqslant \delta_2$ (можно считать δ_2 не зависящим от i).

4) Пусть W_i — часть W_i^*, получающаяся объединением полуокрестностей по сторонам из σ_i'. Можно считать, что в $\hat{W}_i$ выбрано подмножество $\tilde{W}_i$, также составленное из невырожденных полуокрестностей, соответствующих сторонам из σ_i', причем такое, что, обозначая $\varphi(W_i^*) = \boldsymbol{W}_i^*$, $\varphi(\hat{W}_i) = \hat{\boldsymbol{W}}_i$, $\varphi(\tilde{W}_i) = \tilde{\boldsymbol{W}}_i$, имеем

а) для некоторого $\delta_1' > 0$, если $\boldsymbol{z} \in g^q \hat{W}_i$, $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z}, \tilde{\boldsymbol{W}}_i) \leqslant \delta_1'$, то $\boldsymbol{z} \in \hat{\boldsymbol{W}}_i$ (δ_1' найдется ввиду определения множества сторон σ_i');

б) $\varphi(\partial \tilde{W}_i \setminus x_i) \cap \varphi(\partial \hat{W}_i \setminus x_i) = (\partial \tilde{\boldsymbol{W}}_i \setminus \boldsymbol{y}_i) \cap (\partial \hat{\boldsymbol{W}}_i \setminus \boldsymbol{y}_i) = \varnothing$ (так что есть $\delta_1'' > 0$ такое, что $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z}, \zeta) \geqslant \delta_1''$ при $\boldsymbol{z} \in \partial \tilde{W}_i \setminus \boldsymbol{y}_i$, $\zeta \in \partial \hat{\boldsymbol{W}}_i \setminus \boldsymbol{y}_i$;

в) $f^{qm}(W_i^* \setminus \hat{W}_i) \subset \tilde{W}_i$, $g^{qm}(\boldsymbol{W}_i^* \setminus \hat{\boldsymbol{W}}_i) \subset \tilde{\boldsymbol{W}}_i$, $\tilde{W}_i \subset \hat{W}_i \subset \boldsymbol{W}_i^*$, $\tilde{\boldsymbol{W}}_i \subset \hat{\boldsymbol{W}}_i \subset \boldsymbol{W}_i^*$;

г) $\operatorname{diam} \boldsymbol{W}_i^* \leqslant \delta_3$, $\boldsymbol{d}(\partial \tilde{\boldsymbol{W}}_i \setminus \boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{y}_i) \geqslant \delta_4$;

д) $0 < \delta_1 < \min\left(\delta_2 - \delta_3, \frac{1}{2}\delta_4, \delta_1', \delta_1''\right)$;

е) $\varphi^{-1}(\boldsymbol{W}_i^* \setminus \boldsymbol{y}_i) = W_i^* \setminus x_i$, $\varphi^{-1}(\hat{\boldsymbol{W}}_i \setminus \boldsymbol{y}_i) = \hat{W}_i \setminus x_i$, $\varphi^{-1} \times (\tilde{\boldsymbol{W}}_i \setminus \boldsymbol{y}_i) = \tilde{W}_i \setminus x_i$.

При выборе этих окрестностей, возможно, придется уменьшить W_i^*.

5) Выберем $\delta < \delta_1$ так, что если $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{K} \setminus \varphi(\tilde{U})$, то $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \leqslant \delta$ влечет $d(\varphi^{-1}(\boldsymbol{y}), \varphi^{-1}(\boldsymbol{x})) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

6) Выберем, пользуясь спецификацией g, число $M' = M'(\delta)$ по числу δ; пусть $M = M' + (m+1)q$, (m — такое, что $g^{mq} \times (\boldsymbol{W}_i^* \setminus \hat{\boldsymbol{W}}_i) \subset \tilde{\boldsymbol{W}}_i \subset \hat{\boldsymbol{W}}_i$.

Покажем, что M и найденное в пункте 2) N — искомые. Пусть $a_1 \leqslant b_1 < a_2 \leqslant b_2 < \cdots < a_n \leqslant b_n$, p — такие, что $a_{i+1} - b_i \geqslant M$

$(0 \leqslant i \leqslant n-1)$, $p+a_1-b_n \geqslant M$, при $x_i \notin \operatorname{Per} f$ $b_i-a_i \geqslant N$. Из определения КС-свойства очевидно, что можно считать $a_1=mq$. Рассмотрим числа $\{a_i', b_i'\}$, где $a_i'=a_i-mq$, $b_i' \equiv a_i' \pmod q$, $b_i \leqslant b_i' \leqslant b_i+q$. Кроме того, изменим точки $\{\boldsymbol{y}_i\}$ так:

а) если $x_i \notin \operatorname{Per} f$, то пусть $\boldsymbol{z}_i=\boldsymbol{y}_i=\varphi(x_i)$ $\left(\text{по выбору } N \text{ при } r \geqslant N \ \frac{1}{r}\sum_{j=0}^{r-1}\chi_{\tilde{U}}(g^j\boldsymbol{z}_i) \leqslant s\right)$;

б) если $x_i \in \operatorname{Per} f$, $\boldsymbol{y}_i=\varphi(x_i)$, то выберем $\boldsymbol{z}_i$ так. Из транзитивности $g^q(\tilde{\boldsymbol{W}}_i) \not\subset \tilde{\boldsymbol{W}}_i$; значит, есть $\boldsymbol{y}_i' \in \tilde{\boldsymbol{W}}_i$ такое, что $g^q\boldsymbol{y}_i' \in \partial\tilde{\boldsymbol{W}}_i \setminus \boldsymbol{y}_i$. Взяв у $\boldsymbol{y}_i'$ g^q-прообразы в $\tilde{\boldsymbol{W}}_i$, найдем в конце концов точку $\boldsymbol{z}_i: g^{jq}\boldsymbol{z}_i \in \tilde{\boldsymbol{W}}_i$ $(0 \leqslant j \leqslant (b_i'-a_i') \cdot q^{-1})$, $g^{(b_i'-a_i')}\boldsymbol{z}_i \in \partial\tilde{\boldsymbol{W}}_i \setminus \boldsymbol{y}_i$.

По точкам $\{\boldsymbol{z}_i\}$ и числам $\{a_i', b_i', p\}$ найдем точку $\boldsymbol{z}$ так, что $\boldsymbol{d}(g^t\boldsymbol{z}, g^{t-a_i}\boldsymbol{z}_i) \leqslant \delta$ $(a_i' \leqslant t \leqslant b_i',\ 1 \leqslant i \leqslant n)$, $g^p\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}$ (это возможно, так как $a_{i+1}'-b_i' \geqslant M-(m+1)q \geqslant M'$). По теореме 2 $\operatorname{card}(F \cap \varphi^{-1}(\boldsymbol{z})) \leqslant \tilde{u}$, $\tilde{u}$ зависит только от топологии K. Значит, если $u=\tilde{u}!$, то среди точек из $F \cap \varphi^{-1}(\boldsymbol{z})$ есть ζ такая, что $f^{pu}\zeta=\zeta$. Осталось показать, что $\operatorname{orb}_f(\varphi^{-1}(\boldsymbol{z}))$ проходит на расстоянии не большем, чем ε, от надлежащих итераций точек $\{x_i\}$.

Покажем, что при $i \in \pi$ $g^{a_i'}\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{W}_i^*$. Пусть это не так. Так как по выбору $\boldsymbol{z}_i$ $g^{(b_i'-a_i')}\boldsymbol{z}_i \in \partial\tilde{\boldsymbol{W}}_i \setminus \boldsymbol{y}_i$, то $\boldsymbol{d}(g^{(b_i'-a_i')}\boldsymbol{z}_i, g^{b_i'}\boldsymbol{z}) \leqslant \delta$, $\boldsymbol{d}(g^{(b_i'-a_i')}\boldsymbol{z}_i, \boldsymbol{y}_i) \geqslant \delta_4 > \delta$, $d(g^{b_i'-a_i'}\boldsymbol{z}_i, \partial\boldsymbol{W}_i \setminus \boldsymbol{y}_i) \geqslant \delta_1' > \delta$, откуда $g^{b_i'}\boldsymbol{z} \in \hat{\boldsymbol{W}}_i$.

По пункту 3) выбора констант отсюда и так как $g^{a_i'}\boldsymbol{z} \notin \boldsymbol{W}_i^*$, то для некоторого $0 \leqslant k \leqslant (b_i'-a_i')q^{-1}$ $\boldsymbol{d}(g^{a_i'+kq}\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}_i) \geqslant \delta_2$. Значит, $\boldsymbol{d}(g^{kq}\boldsymbol{z}_i, \boldsymbol{y}_i) \geqslant \delta_2-\delta > \delta_3$, хотя $\operatorname{diam}\hat{\boldsymbol{W}}_i < \delta_3$ (условие 2) пункта 4).

Значит, $g^{a_i'}\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{W}_i^*$, откуда $g^{lq+a_i'}\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{W}_i$ для некоторого $0 \leqslant l \leqslant m$. Тогда условие а) пункта 4) влечет для $0 \leqslant k \leqslant (b_i'-a_i')q^{-1}-l$ $g^{lq+kq+a_i'}\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{W}_i$, так как $\boldsymbol{d}(g^{lq+kq+a_i'}\boldsymbol{z}, g^{(l+k)q}\boldsymbol{z}_i) \leqslant \delta < \delta_1'$, а $g^{(l+k)q}\boldsymbol{z}_i \in \boldsymbol{W}_i$. Отсюда $f^{a_i'+(m+k)q}\varphi^{-1}(\boldsymbol{z}) \subset \boldsymbol{W}_i$ $(0 \leqslant k \leqslant (b_i'-a_i') \times q^{-1}-m)$; по пункту 3) и выбору ε_1 отсюда $d(f^t\varphi^{-1}(\boldsymbol{z}), f^{t-a_i}x_i) \leqslant \varepsilon$ при $a_i \leqslant t \leqslant b_i$. Остался случай $x_i \notin \operatorname{Per} f$. По выбору N для не менее чем $(1-s)(b_i-a_i)$ значений t между a_i и b_i $f^{t-a_i}x_i \notin \tilde{U}$, так что по пункту 5) для них $\boldsymbol{d}(g^t\boldsymbol{z}, g^{t-a_i}(\varphi(x_i))) \leqslant \delta$ влечет $d(f^{t-a_i}x_i, f^t(\varphi^{-1}(\boldsymbol{z}))) \leqslant \varepsilon$, что и требовалось доказать.

3. Напомним ряд определений из [1].

Пусть $\tilde{M}=\{m_i\}_{i=0}^{\infty}$ — последовательность целых чисел такая, что $m_{i+1} \vdots m_i$ $(\forall i)$. В $\boldsymbol{Z}_{m_0} \times \boldsymbol{Z}_{m_1} \times \cdots$, взятом с топологией произведения, рассмотрим подгруппу $H(\tilde{M})$ (несколько неточно назовем ее *«соленоидом»*), состоящую из таких $(r_0, r_1, \ldots)$, что $r_{i+1} \equiv \equiv r_i \pmod{m_i}$ $(\forall i)$. Пусть у отображения f «графа» K есть семейство инвариантных компактов $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$, где $M_n = \bigcup_{i=0}^{m_n-1} M_n^{(i)}$ $(\forall n)$, причем $fM_n^{(0)} \subset M_n^{(1)}$, $fM_n^{(1)} \subset M_n^{(2)}$, $\ldots$, $fM_n^{(m_n-1)} \subset M_n^{(0)}$, все $M_n^{(i)}$ связны и $m_n \to \infty$. Тогда $\bigcap_{n \geqslant 0} M_n = Q$ — инвариантный компакт. Назовем любое инвариантное $\Omega \subset Q$ *сильно соленоидальным.*

В [1] в теореме 1 доказано, что если $\tilde{Q} = \bigcap_{n \geqslant 0} M_n$ сильно соленоидально, то $\tilde{Q} \cap \overline{\operatorname{Per} f}$ — минимальное и есть множество $\Omega'' = \omega(y) \subset \tilde{Q}$ такое, что $\omega(z) \cap Q \neq \varnothing$ влечет $\omega(z) \subset \Omega''$ $(\forall z)$. Максимальные по включению среди ω-предельных множество циклы назовем *множествами рода* 0. Суммируя нужные нам результаты из [1], приведем

Утверждение 1 [1]. *Пусть выполнено одно из следующих условий: а)* $\operatorname{orb} p = \Omega = \tilde{Q}$ *— множество рода 0; б)* $\Omega \subset \bigcap_{n \geqslant 0} M_n = \tilde{Q}$ *— предельное сильно соленоидальное множество; в)* $\Omega = S(M)$ *— окружностное множество,* $\tilde{Q} = M$. *Тогда* $f/\tilde{Q}$ *полно и почти точно на* Ω *полусопряжено с минимальным сдвигом в компактной абелевой группе, которая в случае а) есть цикл, в случае б) — соответствующий соленоид, в случае в) — конечный набор окружностей.*

Утверждение 2 [1]. *Если* $\Omega = \omega(x)$, *т. е. множество* $\tilde{\Omega}$ *(либо базисное, либо окружностное, либо соленоидальное, либо рода 0) такое, что* $\Omega \subset \tilde{\Omega}$.

Следствие 1. *Если* $A \subset D_f(K)$, *то свойства 1) и 2) равносильны: 1)* A *замкнуто, связно и есть* x *такое, что* $\operatorname{supp} \mu \subset \subset \omega(x)$ $(\forall \mu \in A)$; *2)* $\exists y: V_f(y) = A$ *(*D_f, V_f *определены в разделе 1).*

Доказательство. Следствие утверждений 1,2 и теорем 1,3.

Следствие 2. *Для инвариантной меры* μ *равносильны такие свойства: а)* $\exists x: \operatorname{supp} \mu \subset \omega(x)$; *2)* y μ *есть типичная точка; 3)* μ *приближается эргодическими мерами с носителями на циклах либо* μ *сосредоточена на окружностном множестве.*

Доказательство. В [2] следствие 2 доказано для неатомических мер. Случай μ с носителем на окружностном множестве очевиден (см. теорему 2). Если окружностного множества, на котором сосредоточена μ, нет, то можно считать, что $\operatorname{supp} \mu$ не пересекается с окружностными множествами (иначе ни а), ни б), ни в) невозможны). Ясно, что б) $\Rightarrow$ а). Далее, пусть $\operatorname{supp} \mu \subset \subset \omega(x)$. Если $\omega(x)$ — базисное, то а) $\Rightarrow$ в) по теоремам 1,3. Если $\omega(x)$ сильно соленоидально, то μ неатомична и а) $\Rightarrow$ в) по доказанному в [2]. Наконец, случай, когда $\omega(x)$ — множество рода 0, очевиден. В силу утверждения 2 «а) $\Rightarrow$ в)» доказано. По следствию 1 а) $\Rightarrow$ б). Значит, осталось показать, что в) $\Rightarrow$ а). Нам понадобится

Лемма 3. *Пусть* $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, $x_n \in \operatorname{Per} f\,(\forall n)$, *для малой односторонней полуокрестности* $W_n(x)$ $x_n \in W_T(x)$, *начиная с некоторого* $\tilde{n}$. *Пусть* $D = \{z : \forall U \ni z\, \exists n_k \to \infty : orb\, x_{n_k} \cap U \neq \varnothing\}$, где U — *открытое. Тогда найдется* $\zeta : \omega(\zeta) \supset D$. *При этом* 1) *если* G — *окрестность* D, *то найдется* n' *такое, что* $n \geqslant n'$ *влечет* $orb\, x_n \subset G$; 2) *если* D — *конечно, то* $\omega(\zeta) = D$ — *цикл*; 3) *если* D — *бесконечно, т. е. две возможности*: а) $D \subset \bigcap_{r>0} M_r$ — *сильно соленоидально и для любого* r *есть* $n'' = n''(r)$ *такое, что при* $n \geqslant n''$ $orb\, x_n \not\subset M_r$; *б)* $D \subset B(M)$, *где* $B(M)$ — *базисное, причем найдется* n''' *такое, что при* $n \geqslant n'''$ $orb\, x_n \subset M$ *и в любом множестве вида* $\bar{U}$, *где* U — *компонента множества* $M \setminus B(M)$, *лежит конечное (например, пустое) количество точек из* $\bigcup_{i>0} orb\, x_i$.

Доказательство. Пункт 1) леммы очевиден. Ясно также, что $D = fD$ — инвариантный компакт. Далее, пусть $P_T(x) = \bigcap_{U_T(x)} \overline{orb\, U_T(x)}$; ясно, что $P_T \cap \overline{\operatorname{Per} f} \supset D$. Лемма 1 из [1] исследует свойства множеств $P(z) = \bigcap_{U \ni z} \overline{\operatorname{orb} U}$, где $z \in \Omega(f)$; U — открыто, легко видеть, что она верна и в нашем случае, и в силу ее множество $P_T(x)$ есть либо цикл, либо сильно соленоидальное множество, либо «подграф», состоящий из циклически переставляющихся связных компактов. Если $P_T(x)$ — цикл, то лемма очевидна. Пусть $P_T(x) \subset \bigcap_{r \geqslant 0} M_r$ сильно соленоидально. По теореме 1 из [1] $P_T(x) \cap \overline{\operatorname{Per} f} = D = \omega(\zeta)$ для некоторого ζ. Для любого M_r найдется N такое, что $f^N x \in \operatorname{int} M_r$; выбирая большие n так, что x_n близко к x, имеем отсюда $\operatorname{orb} x_n \subset M_r$, что доказывает лемму. Итак, пусть $P_T(x)$ — «подграф» с циклически переставляющимися компонентами связности.

Если D конечно, то D — набор циклов $\{\xi^1, \ldots, \xi_l\}$. Взяв их окрестности $U_1, \ldots, U_l$, где $(U_i \cup fU_i) \cap U_j$ при $i \neq j$, и считая n' таким, что $\operatorname{orb} x_n \subset \bigcup_{i=1}^{l} U_i$ при $n \geqslant n'$, имеем для $n \geqslant n'$ однозначно определено $i = i(n)$ такое, что $\operatorname{orb} x_n \subset U_i$. Так как $x_n \to x$, то отсюда $l = 1$, $\xi_1 = \operatorname{orb} x_n = D$ — цикл, и лемма доказана. Пусть D бесконечно. Так как $P_T(x)$ — «подграф», то, как легко видеть, найдется полуокрестность $\tilde{W}_T(x) \subset P_T(x)$ и можно считать $x_n \in \tilde{W}_T(x)$ $(\forall n)$. Пусть теперь $y \in D$, S — сторона y такая, что с этой стороны $y_{m_i} \to y$, где $\{m_i\}$ — некоторая последовательность; $y_{m_i} \in \operatorname{orb} x_{m_i}$. Для любой полуокрестности $U_S(y)$ $\overline{\operatorname{orb} U_S(y)}$ есть «подграф», содержащий все x_{m_i} с большими i, а значит, содержащий некоторую T-полуокрестность x, откуда $\overline{\operatorname{orb} U_S(y)} = P_T(x)$. Мы показали, что $D \subset E(P_T(x))$, так как $\operatorname{Per}(f/P_T \times (x)) \neq \varnothing$, то $E(P_T(x)) = B(P_T(x))$ — базисное. Осталось заметить, что если U' — компонента $P_T(x) \setminus B$ такая, что все x_n, кроме конечного числа, содержатся в $\bar{U}'$, то $D \subset B \cap \overline{\operatorname{orb} U'}$, а $B \cap \overline{\operatorname{orb} U'}$ конечно — противоречие. Лемма доказана.

Вернемся к импликации в) $\Rightarrow$ а). Пусть γ_n — меры, сосредоточенные на циклах $\operatorname{orb} x_n$, $x_n \in \operatorname{Per} f$, $\gamma_n \to \mu$. Считая, что x_n стремятся, с одной стороны, к некоторому x, найдем множество $\omega(\zeta) \supset D$, где D строится, как в лемме 3. Но, очевидно, $\operatorname{supp} \mu \subset \subset D$, что и требовалось доказать.

Следствие 3. *Семейство $G_f \subset D_f(K)$ мер, имеющих типичную точку, замкнуто.*

Следствие 4. *Пусть $\varphi \in C(K, \boldsymbol{R}^l)$. Существует компакт $I \subset \boldsymbol{R}$ и не более, чем счетный набор выпуклых компактов $\{I_r\}$ такие, что следующие свойства множества $A \subset \boldsymbol{R}^l$ равносильны: а) найдется x такое, что A есть множество $I(\varphi, x)$ предельных точек последовательности $y_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{\varphi(f^i x)}{n}$; б) A — связный компакт, $A \subset I$, причем если A невырожден, то для некоторого r $A \subset I_r$; в) если $C = \overline{\bigcup\limits_{x \in \operatorname{Per} f} I(x, \varphi)}$, то $I \setminus C$ конечно и состоит из точек $d = I(z, \varphi)$, где z принадлежит окружностному множеству; г) $I_r = \bigcup\limits_{x \in B_r} I(x, \varphi)$, где B_r — некоторое базисное множество, причем $\overline{\bigcup\limits_{x \in B_r \cap \operatorname{Per} f} I(x, \varphi)} = I_r$; д) если $d' \in C \setminus \bigcup I_r$, т. е. $y \in \operatorname{Per} f$ такое, что $I(y, \varphi) = d'$.*

Доказательство. Пусть $\Phi: \mu \to \int \varphi \, d\mu$. Положим $I = \Phi(G_f)$. По следствию 3 I — компакт. Далее, пусть $\{B_r\}$ — все базисные множества f, $D_r \equiv D_{f/B_r}(B_r)$, $I_r \equiv \Phi(D_r)$. Тогда I_r — выпуклые компакты, а по следствию 2 $I_r \subset I\, (\forall r)$. Далее, если $x \in K$, то множество предельных точек последовательности $y_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{\varphi(f^i x)}{n}$ есть $\Phi(V_f(x))$. Ясно, что а) $\Rightarrow$ б). Пусть A обладает свойствами из б). Достаточно рассмотреть случай невырожденного связного компакта $A \subset I_r$. Но если $\tilde{A} = \Phi^{-1}(A) \cap D_r$, то, очевидно, $\tilde{A}$ связно и компактно, и по следствию 1 есть точка $x \in B_r$: $: V_f(x) = \tilde{A}$, откуда $\Phi(V_f(x)) = \Phi(\tilde{A}) = A$. Теперь следствие 4 вытекает из следствия 2, что и требовалось доказать.

Для дальнейшего условимся подмножество $\tilde{M}$ в $\boldsymbol{R}^d$ $(d < \infty)$ точек $\tilde{y} \in \boldsymbol{R}^d$, среди координат которых все целые, кроме одной, называть «решеткой». Нам понадобится такой несложный факт: «Пусть K — связный «граф»; для некоторого $d < \infty$ найдется вложенная в $\boldsymbol{R}^d$ «решетка» $\tilde{M}$, накрывающая K».

Для доказательства можно, например, воспользоваться результатами главы VI первой части книги [6], в силу которых можно выбрать точку $v \in K$ и конечное число петель $\{\alpha_i\}_{i=1}^{d}$ — образующих фундаментальной группы $\pi(K, v)$, причем так, что $\bigcup_{i=1}^{d} \alpha_i = K$. На каждом ребре взятой в $\boldsymbol{R}^d$ решетки $\tilde{M}$, имеющем вид $\{(n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}, n_k + t, n_{k+1}, \ldots, n_d) : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, рассмотрим отображение α_k, соответствующее одноименной петле; ясно, что полученное отображение $\tilde{\pi} : \tilde{M} \to K$ — искомое накрытие.

Далее, пусть Δ — семейство непрерывных $f : K \to K$, поднятие $F : \tilde{M} \to \tilde{M}$ которых имеет свойство $F(\tilde{x} + \tilde{e}_i) = F(\tilde{x}) + \tilde{e}_i$ $(\tilde{x} \in \tilde{M})$, где $\tilde{e}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$ — координатные орты в $\boldsymbol{R}^d$.

Для $x \in K$ пусть $\tilde{I}(f, x) = \tilde{I}(x)$ — множество предельных точек последовательности $(F^n(\tilde{x}) - \tilde{x}) \cdot n^{-1}$, где $\tilde{\pi}(\tilde{x}) = x$. Ясно, что $\tilde{I}(x)$ не зависит от выбора $\tilde{x}$; так как разные поднятия f отличаются константой вида $k_1 e_1 + \cdots + k_d e_d$, сдвиг на которую оставляет $\tilde{M}$ на месте, то с точностью до таких констант и определено $\tilde{I}(x)$. Ниже, считая F выбранным, опишем возможные множества $\tilde{I}(z)$, $z \in K$; $\tilde{I} \underset{\mathrm{def}}{\equiv} \bigcup_{x \in K} \tilde{I}(x)$. Наш результат аналогичен результату из [3], относящемуся к случаю отображений окружности степени 1.

Теорема 4. *Пусть $f \in \Delta$. Существует конечное число выпуклых компактов $I_r \subset \mathbf{R}^d$ таких, что свойства 1) и 2) множества $A \subset \boldsymbol{R}^d$ равносильны: 1) $\exists z : A = \tilde{I}(z)$; 2) A — связный компакт, $A \subset I_r$ для некоторого r.*

Доказательство. Отметим очевидное и важное для отображений $f \in \Delta$.

Свойство 1. *Если S содержит подмножество, гомеоморфное окружности, то fS тоже содержит подмножество, гомеоморфное окружности.*

Нам понадобится

Лемма 4. *Пусть $x_n \in Perf$ $(\forall n \in \boldsymbol{N})$, $\tilde{I}(x_i) \neq \tilde{I}(x_j)$ $(i \neq j)$. Тогда есть базисное множество B такое, что для бесконечного множества индексов n и любых ω-предельных множеств $\Omega_n \ni x_n$ либо $\Omega_n = B$, либо есть компонента U_n множества $M \setminus B(M)$ и число k такие, что $\bar{U}_n, f\bar{U}_n, \ldots, f^{k-1}\bar{U}_n$ попарно не пересекаются, $\bigcup_{i=1}^{k} f^i\bar{U} \supset \Omega_n$, $\tilde{I}(z)$ на $\bigcup_{i=1}^{k-1} f^i\bar{U}$ есть константа, совпадающая с $\tilde{I}(\zeta)$ для $\zeta \in \bar{U} \cap B$.*

Доказательство леммы. Можно считать, что x_n сходятся к некоторому x с некоторой стороны T. Если производное множество D набора циклов $\{\mathrm{orb}\, x_n\}$ конечно (оно определяется как в лемме 3), то по лемме 3 D есть цикл, к которому равномерно стремятся множества $\mathrm{orb}\, x_n$; это противоречит тому, что $\tilde{I}(x_i) \neq \tilde{I}(x_j)$ $(i \neq j)$. Пусть D бесконечно. Если D сильно соленоидально, $D \subset \bigcap_{r \geqslant 0} M_r$, то по свойству 1 для некоторого r $M_r =$

$= \bigcup\limits_{i=1}^{m} M_r^{(i)}$, $fM_r^{(i)} = M_r^{(i+1)}$ $(1 \leqslant i \leqslant m-1)$, $fM_r^{(m)} = M_r^{(1)}$, $M_r^{(i)}$ не содержит подмножеств, гомеоморфных окружности $(1 \leqslant i \leqslant m)$, откуда следует, что $\tilde{I}(z)$ на M_r есть постоянная величина, что противоречит условию $\tilde{I}(x_i) \neq I(x_j)$. Значит, по лемме 3 есть базисное множество $B = B(M)$ и число n' такие, что $\operatorname{orb} x_n \subset M$ при $n \geqslant n'$ и в замыкании любой компоненты множества $M \setminus B(M)$ лежит конечное число точек из $\bigcup\limits_{i \geqslant 0} \operatorname{orb} x_i$. Вместе со свойством 1 это, очевидно, влечет, что есть $n'' > n'$ с таким свойством: если $n \geqslant n''$ и $\bar{U}_n \ni x_n$, где U_n — компонента $M \setminus B(M)$, то $\tilde{I}(z)$ на $\bar{U}_n$ — константа, что и требовалось доказать.

Продолжим доказательство теоремы 4. Ясно, что на K правильно определена непрерывная функция $\varphi(x) = F(\tilde{x}) - \tilde{x}$, где $\tilde{\pi}(\tilde{x}) = x$. Тогда множество $\tilde{I}(x)$ есть множество предельных точек последовательности $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i x) \cdot n^{-1}$, так что применимо следствие 4, обозначениями из которого мы и воспользуемся. Обозначим $C = \bigcup \tilde{I}(z)$, где z пробегает весь K, кроме таких инвариантных «подграфов» $M \subset K$, что $E(M) = S(M)$ — окружностное множество. Тогда $\tilde{I} \setminus C$ конечно. Пусть Λ — семейство множеств L, где $L = I_r$ для некоторого r или L — точка, $L \in C \setminus \bigcup I_r$; $L_1 \underset{\neq}{\subset} L_2 \underset{\neq}{\subset} \ldots$ $\ldots$, $L_i \in \Lambda$. Так как уже L_2 невырождено, то $L_i = I_{r(i)}$ при $i \geqslant 2$ и по следствию 4 есть $x_i \in \operatorname{Per} f$ такое, что $I(x_i) \in L_i \setminus L_{i-1}$. Тогда к последовательности $\{x_i\}$ применима лемма 4, в силу которой, проредив $\{x_i\}$, можно считать, что есть базисное множество B такое, что для любого i либо $L_i = B$, либо $\tilde{I}/L_i$ есть константа — противоречие. Значит, в семействе Λ есть, по лемме Цорна, семейство максимальных по включению множеств. Пусть оно бесконечно, $\tilde{L}_1$, $\tilde{L}_2$, ... — его элементы. Пользуясь следствием 4, найдем точки $\tilde{x}_i \in \operatorname{Per} f \cap \tilde{L}_i$ так, что $\tilde{I}(\tilde{x}_i) \neq \tilde{I}(\tilde{x}_j)$ при $i \neq j$. По лемме 4 снова, обозначив Ω_j предельное множество такое, что $\tilde{L}_j = \tilde{I}(\Omega_j)$, найдем базисное B такое, что для бесконечного множества индексов либо $\Omega_j = B$ $(\Rightarrow \tilde{L}_j = \tilde{I}(B))$, либо $\tilde{I}(\Omega_j) = \tilde{L}_j$ — константа, принадлежащая $\tilde{I}(B)$ — противоречие. Значит, есть лишь конечный набор множеств $\tilde{L}_i$ что с учетом того, что $\tilde{I} \setminus C$ конечно, завершает доказательство.

Список литературы: 1. *Блох А. М.* О динамических системах на одномерных разветвленных многообразиях. I//Теория функций, функцион. анализ и их прил.—1986.— Вып. 12.— С. 77—87. 2. *Блох А. М.* О динамических системах на одномерных разветвленных многообразиях. II/Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1987.— Вып. 14.— С. 12—77. 3. *Rotation* intervals of endomorphisms of the circle /R. Bamon, I. P. Malta, M. J. Pacifico, E. Takens//Erg. Theory and Dyn. Syst.—1984.—V.4, № 4.—P. 493—498. 4. *Denker M.* et al. Ergodic theory on compact spaces /M. Denker, C. Grillenberger, K. Sigmund//Berlin etc.: Springer, 1975.—345 p. (Lect. Notes in Math., v. 527). 5. *Блох А. М.* О транзитивных отображениях одномерных разветвленных многообразий//Дифференциально-разностные уравнения и задачи математической физики. К., 1984.— С. 3—10. 6. *Масси У., Столлингс Дж.* Алгебраическая топология.—М.: Мир, 1977.—343 с.

Поступила в редколлегию 15.10.85