УДК 517.5

Ю. В. АЗАРИНА

МЕРОМОРФНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ $w(z+1) = R[w(z)]$

Настоящая работа посвящена описанию мероморфных в комплексной плоскости решений уравнения

$$w(z+1) = R[w(z)], \tag{1}$$

где R — рациональная функция.

Отметим, что к уравнению (1) сводится уравнение

$$w(bz) = R[w(z)] \tag{2}$$

заменой $z = b^u$. Существование мероморфных решений уравнения (2) исследовал А. Пуанкаре. Он показал, что при $|b| > 1$ для существования мероморфных решений необходимо наличие у функции R неподвижной точки с мультипликатором b. Каждой такой неподвижной точке β соответствует решение w со свойствами

$$w(0) = \beta, \quad w'(0) = 1. \tag{3}$$

Остальные решения получаются подстановкой $\varphi(z) = w(az^m)$, $a \in \boldsymbol{C}$, $m \in \boldsymbol{N}$. Если $|b| \leqslant 1$, то мероморфных во всей плоскости решений не существует.

В своем мемуаре П. Фату [1, §§ 72—80] показал, что уравнение (1) всегда имеет решение. Через несколько лет Жюлиа [2] доказал это же утверждение, применив к (1) метод последовательных приближений. В последнее время решения уравнения (1) изучались рядом авторов. Так, Н. Янагихара [3] опять доказал существование решения (без ссылок на Фату и Жюлиа). И. Бэйкер и Л. Ливерпуль [4] полностью описали все решения уравнения (1) в случае, когда R — многочлен.

Дж. Ритт [5] исследовал мероморфные решения более общего функционального уравнения:

$$F[w(\lambda(z)), \; w(z)] = 0, \tag{4}$$

где F — многочлен от двух переменных, а $\lambda(z)$ — линейная функция. Дж. Ритт перечислил все мероморфные функции w, которые могут удовлетворять соотношению вида (4), за исключением случая, когда уравнение (4) сводится к уравнению (1). По поводу функций, удовлетворяющих уравнению (1), Ритт пишет [5]: «Полное описание таких функций до сих пор не было дано. Большой их класс получается из функций Пуанкаре с помощью подстановки, но нет оснований считать, что все они могут быть получены таким образом».

Действительно, оказывается, что остальные решения уравнения (1) получаются из решений уравнения Абеля: $A[R^{-1}(z)] = A(z) - 1$.

В настоящей работе будут полностью описаны мероморфные решения уравнения (1) в случае, когда R — произвольная рациональная функция. Отметим, что все необходимое для такого описания имелось в мемуаре Фату [1], хотя в явном виде окончательный результат у него не приведен.

Изучение уравнения (1) тесно связано с теорией итераций рациональных функций, построенной в начале XX века Г. Жюлиа, П. Фату и Дж. Риттом. Введение в эту теорию имеется в книге П. Монтеля [6] и обзоре П. Бланшара [7].

Основные определения и обозначения. Определим необходимые для дальнейшего понятия из теории итераций. Точка $\beta \in \bar{\boldsymbol{C}}$ называется неподвижной точкой функции R, если $R(\beta) = \beta$. Мультипликатором или множителем неподвижной точки β называется число

$$b = \begin{cases} R'(\beta), & \text{если } \beta \neq \infty; \\ \dfrac{1}{R'(\beta)}, & \text{если } \beta = \infty. \end{cases}$$

Неподвижная точка β называется: притягивающей, если $|b| < 1$; нейтральной, если $|b| = 1$; отталкивающей, если $|b| > 1$. Через R^p обозначаем p-ю итерацию функции R, через R^{-1} — (многозначную) функцию, обратную к R.

Сходимость будем всюду понимать в сферической метрике (см. Монтель [6]).

Обозначим $P = P(a, c) = \{z = x + iy: a \leqslant y \leqslant c\}$, $S = S(a, c, d) = \{z = x + iy: a \leqslant y \leqslant c, x \leqslant d\}$, $\Pi = \Pi(a, c, d_1, d_2) = \{z = x + iy: a \leqslant y \leqslant c, d_1 \leqslant x \leqslant d_2\}$, $D = D(\alpha, r) = \{z : |z - \alpha| < r\}$.

Основные результаты. Далее предполагаем, что $\deg R > 1$.

Теорема 1. *Пусть w — произвольное мероморфное решение уравнения (1). Тогда*

1) существует предел $\lim\limits_{x \to -\infty} w(x + iy) = \beta$, где β — некоторая неподвижная точка функции R, причем сходимость равномерная при $a \leqslant y \leqslant c$ для любых a, c;

2) модуль мультипликатора точки β удовлетворяет неравенству $|b| \geqslant 1$, причем если $|b| = 1$, то *$b = +1$.*

Теорема 2. *Пусть в условиях теоремы 1 $|b| > 1$. Тогда общее решение уравнения (1) имеет вид*

$$w(z) = \varphi(b^z E(z)),$$

где φ есть функция Пуанкаре (решение уравнения (2)), а E — произвольная периодическая целая функция с периодом 1.

Теорема 3. *Пусть в условиях теоремы 1 $b = 1$, а значит, в окрестности точки β R имеет разложение*: $R(z) = \beta + (z - \beta) + \sum\limits_{j=m+1}^{\infty} a_j (z - \beta)^j$, $a_{m+1} \neq 0$ для некоторого целого $m \geqslant 1$. Тогда имеется m мероморфных решений $w = w_j(z)$ уравнения (1) таких, что $w_j(z) \sim \beta + c_j(-z)^{-\frac{1}{m}}$, $z \to \infty$ (c_j — постоянные), причем каждое непостоянное мероморфное решение w, удовлетворяющее условию $w(-x) \to \beta$, $x \to +\infty$, имеет вид $w(z) = w_j(z + E(z))$ для некоторого j и произвольной целой периодической функции E с периодом 1.*

Лемма *(Жюлиа — Фату). Среди неподвижных точек рациональной функции найдется хотя бы одна либо отталкивающая точка, либо нейтральная точка с мультипликатором $+1$.*

---

* Не ограничивая общности, считаем здесь и далее, что $\beta \neq \infty$.

Доказательство этой леммы см., например, в книге Монтеля [6, § 107].

Теоремы 1, 2, 3 вместе с этой леммой дают полное описание множества решений уравнения (1).

Мы приведем доказательство только теоремы 1, теорема 2 содержится в работе Н. Янагихары [3], а доказательство теоремы 3 в основном следует рассуждениям И. Бэйкера и Л. Ливерпуля [4], см. также [3]. Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1 *(Фату [1]). Пусть R — рациональная функция. Тогда у R найдется неподвижная точка, имеющая бесконечное число предшествующих.*

Обозначим $w_n(z) = w(z-n)$. Если λ — неподвижная точка функции R, то обозначим $A(\lambda) = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} R^{-n}(\lambda)$ множество всех предшествующих к точке λ.

Лемма 2. *Пусть w — произвольное мероморфное решение уравнения (1), а λ — неподвижная точка из леммы 1. Тогда для любых вещественных a и c найдется $d > -\infty$ такое, что w в полуполосе $S = S(a, c, d)$ не принимает значений из множества $A(\lambda) \setminus \{\lambda\}$.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть уравнение $w(z) = a$, где $R^m(a) = \lambda$, $a \neq \lambda$, имеет последовательность решений $\{z_k\}$, $a \leqslant \operatorname{Im} z_k \leqslant c$, $\operatorname{Re} z_k \to -\infty$. Будем считать, что $\operatorname{Re} z_k < -m-2$, $k = 1, 2, \ldots$. Добавляя подходящее натуральное число, каждую из точек z_k можно перевести в прямоугольник $\Pi = \Pi(a, c, -2, 0)$. Получим точки $\zeta_k \in \Pi$, $k = 1, 2, \ldots$. При этом для всех точек ζ_k будет выполняться $w(\zeta_k) = \lambda$. Действительно, пусть $\zeta_k = z_k + m + m_k$, $m_k \in \boldsymbol{N}$. Тогда в силу (1)

$$w(\zeta_k) = w(z_k + m + m_k) = R^{m_k}[R^m(w(z_k))] =$$
$$= R^{m_k}[R^m(a)] = R^{m_k}(\lambda) = \lambda.$$

Возможны два случая:

а) среди точек (ζ_k) есть бесконечное (счетное) число различных. Тогда, по теореме единственности, $w(z) \equiv \lambda$, что противоречит условию;

б) среди точек (ζ_k) конечное число различных. Тогда в некоторую точку ζ_0 перейдет бесконечное число различных точек z_k. Будем рассматривать только эти z_k. Пусть точка z_1 — ближайшая к прямоугольнику Π, и пусть точка z_s из последовательности такова, что $z_s = z_1 - n$, $n \geqslant m$. Тогда в силу (1) $w(z_1) = R^n[w(z_1 - n)] = R^n[w(z_s)] = R^n(a) = \lambda$. Получим, что в точке z_1: $w(z_1) = \lambda$. Это противоречит предположению: $a \neq \lambda$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Семейство функций $\{w_n(z)\}$ нормально на каждом компакте в плоскости.*

Доказательство. По лемме 1 найдется такая неподвижная точка λ, что множество $A(\lambda) \setminus \{\lambda\}$ содержит, по крайней мере, три различные точки. Так как для любого $n > n_0(d)$ $w_n(z)$ не принимает (по лемме 2) значений из множества $A(\lambda) \setminus \{\lambda\}$ в полуполосе $S = S(a, c, d)$, то семейство $\{w_n(z)\}$ нормально в любой компактной части множества S. Ввиду произвольности вещественных a, c и d, $\{w_n(z)\}$ нормально в любой компактной части плоскости, что и требовалось доказать.

Лемма 4. *Существует предел:* $\lim\limits_{t \to +\infty} w(z-t) = \beta$, *где* $R(\beta) = \beta$, *равномерный по* $z \in S(a, c, d)$ *для любых* a, c.

Доказательство. Рассмотрим некоторую сходящуюся последовательность $w_{n_k}(z)$. Пусть $\psi(z)$ — ее предельная функция; ψ — мероморфна. В силу лемм 1 и 2 существуют три значения μ_1, μ_2, μ_3 такие, что для каждой ограниченной области K найдется число $N = N(K)$ такое, что $w_{n_k}(z) \neq \mu_1, \mu_2, \mu_3$, $z \in K$, $k > N$. По теореме Гурвица предельная функция ψ не принимает значений μ_1, μ_2, μ_3 в области K.

Поскольку K — произвольная область, то эти значения не принимаются во всей плоскости. Значит, по теореме Пикара ψ является постоянной. Мы показали, что каждая сходящаяся подпоследовательность $w_n(z)$ имеет своим пределом постоянную и сходимость будет равномерная на каждом компакте в плоскости.

Рассмотрим прямоугольник $\Pi = \Pi(a, c, -2, 0)$. Так как $\{w_n\}$ имеет только постоянные предельные функции (среди них может быть и ∞), то $\operatorname{diam} w_n(\Pi) \to 0$, $n \to \infty$ (диаметр берется в сферической метрике).

Для каждой из сходящихся подпоследовательностей $\{w_{n_k}\}$, предел которой, скажем, β, имеем $w_{n_k}(\Pi) \to \beta$, $n_k \to \infty$, и так как $(\Pi - 1) \cap \Pi \neq \varnothing$, то $w_{n_k+1}(\Pi) \cap w_{n_k}(\Pi) \neq \varnothing$. Следовательно, $w_{n_k+1}(\Pi) \to \beta$, $n_k \to \infty$. Возьмем такое z, чтобы и z, и $z+1$ принадлежали Π. Тогда $w_{n_k+1}(z) \to \beta$, $w_{n_k}(z) = R[w_{n_k+1}(z)] \to R(\beta)$. Отсюда $R(\beta) = \beta$. Мы показали, что пределом каждой подпоследовательности $\{w_{n_k}\}$ является неподвижная точка функции R. То же самое верно и для пределов произвольных подпоследовательностей: $w_{t_k}(z) = w(z - t_k)$, $t_k \to +\infty$.

Но тогда множество Ω предельных постоянных является связным множеством (см., например, [8], гл. 1, §§ 1, 2). Так как число неподвижных точек конечно, то множество Ω обязано совпадать с одной из них. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Множитель* b *неподвижной точки* β *по модулю больше или равен единице.*

Доказательство. Предположим противное: $|b| < 1$. Покажем, что в этом случае образ прямоугольника $\Pi = \Pi(a, c, -2, 0)$ под действием w попадает в сколь угодно малую окрестность точки β.

В силу леммы 4 $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n \geqslant n_0 : w(\Pi - n) \subset D(\beta, \varepsilon)$ и, так как $|b| < 1$, то при $\varepsilon < \varepsilon_0$ $w(\Pi) = R^n[w(\Pi - n)] \subset R^n[D(\beta, \varepsilon)] \subset D(\beta, \varepsilon)$, что, очевидно, невозможно. Лемма 5 доказана.

Пусть для рациональной функции R разрешимо уравнение (1) и пусть f — ветвь обратной к R функции. Тогда, как показывает следующая лемма, для функции f выполняется некоторое характерное свойство.

Лемма 6 [*4*, *с. 102—103*]. *Пусть в лемме 4* $\beta = 0$ *и пусть* $f(z)$ — *та ветвь* R^{-1}, *для которой* $f(0) = 0$. *Тогда найдется односвязное множество* G *такое, что*

$$f(G) \subset G; \tag{5}$$

$$f^n(G) \to 0, \quad n \to \infty \tag{6}$$

равномерно в G.

Такое множество G называется инвариантной областью притяжения функции f.

Доказательство. Пусть $D' = D(0, \varepsilon)$ — круг, в котором f однолистна. Рассмотрим множество: $H = \bigcup\limits_{n=N}^{\infty} w(\mathring{\Pi} - n) = w(\mathring{S} - N)$, где $\Pi = \Pi(a, c, -2, 0)$, $S = S(a, c, -2)$. Выберем $N = N(\varepsilon)$ так, чтобы $H \subset D'$. Если H неодносвязно, то «заклеим» в нем все «дыры», т. е. добавим к нему все ограниченные компоненты дополнения. Полученная область и есть искомая G. Действительно, проверим выполнение свойств (5) и (6).

Из построения множества H видно, что условие (5) для него выполняется. Но в силу принципа сохранения области оно выполнено для всего G.

В силу леммы 4 условие (6) выполняется для $z \in H$. По принципу максимума (6) будет выполнено и для z из ограниченных компонент дополнения к H. Лемма 6, таким образом, доказана.

Следующая лемма показывает, что в случае нейтральной точки множитель равен $+1$.

Лемма 7. *Пусть функция* $f(z)$ *имеет в окрестности нуля разложение*:

$$f(z) = \gamma z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k, \quad |\gamma| = 1,$$

и пусть у f *есть инвариантная область притяжения к нулю. Тогда* $\gamma = 1$.

Доказательство см. Фату [1], §§ 54—55, а также Бэйкер, Ливерпуль [4], с. 102—103.

Теперь утверждения теоремы 1 сразу же следуют из лемм 4—7.

Замечание. Попутно доказан следующий факт. Пусть φ — решение уравнения Пуанкаре (2), мероморфное в $C \setminus \{0\}$. Тогда оно мероморфно во всей комплексной плоскости, а следовательно, выполняется

$$\varphi(0) = \beta, \quad R(\beta) = \beta, \quad b = R'(\beta), \quad |b| > 1.$$

Действительно, по лемме 4 точка $z = 0$ не может быть изолированной существенной особенностью функции φ.

Отметим, что Жюлиа [2] построил решения уравнения (2), мероморфные в проколотой окрестности нуля и имеющие существенную особенность в нуле. Ясно, что при этом $|b| \leqslant 1$.

После того, как настоящая работа была сдана в печать, автору стала известна работа N. Yanagihara "Meromorphic Solutions of Some Difference Equations and Conformal Mapping of Infinite Strips" *, в которой теорема 1 получена другим методом, не связанным с итерациями рациональных функций.

Список литературы: 1. *Fatou P.* Sur les equations fonctionnelles // Bull. Soc. Math France. — 1919. — V. 47. — P. 161—271. — V. 48. — P. 33—94, 208—314. 2. *Julia G.* Sur quelques application de la representation conforme a la resolution d'equations fonctionnelles // Bull. Soc. Math. France. — 1924. — V. 52. — P. 279—315. 3. *Yanagihara N.* Meromorphic solutions of some difference equations // Funkc. Ekvac. — 1980. — V. 23, № 3. — P. 309—326. 4. *Baker I. N., Liverpool L. S. O.* The entire solutions of a polynomial difference equation // Aequat. Math. — 1984. — V. 27, № 1/2. — P. 97—113. 5. *Ritt J. F.* Meromorphic functions with addition or multiplication theorems // Trans. Amer. Math. Soc. — 1927. — P. 341—360. 6. *Монтель П.* Нормальные свойства аналитических функций. — М.: ОНТИ НКТП СССР. — 1936. — 240 с. 7. *Blanchard P.* Complex analytic dinamics // Bull. Amer. Math. Soc., 1984. — V. 11, № 1. — P. 85—141. 8. *Коллингвуд Э., Ловатер А.* Теория предельных множеств. — М.: Мир. — 1971. — 312 с.

Поступила в редколлегию 15.10.85

* N. Yanagihara. Meromorphic Solutions of Some Difference Equations and Conformal Mapping of Jnfinite Strips//Funkc, Ekvacioj. — 1983. — V. 26, № 1. — P. 17—35.