УДК 517.432

Ю. Л. КУДРЯШОВ

СИММЕТРИЧЕСКИЕ И САМОСОПРЯЖЕННЫЕ ДИЛАТАЦИИ ДИССИПАТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть A-диссипативный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H_0 (т. е. $\mathrm{Jm}(Af, f) \geqslant 0 \ \forall f \in D(A)$). Оператор B, действующий в гильбертовом пространстве H, называется дилатацией [1] оператора A, если $H_0 \subset H$ и $(A-\lambda I)^{-1}h_0 = P(B-\lambda I)^{-1}h_0 \times \times (\forall\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B) \wedge \forall h_0 \in H_0)$, где P — оператор ортогонального проектирования в H на H_0. Для некоторых классов диссипативных операторов задача построения самосопряженной дилатации была решена в ряде работ Б. С. Павлова [2—4]. Так, в [2] для оператора Шредингера $L = -\Delta + q + ip$, где q и p — вещественные непрерывные функции в R^3, $0 \leqslant p = \frac{\alpha^2}{2} \leqslant \mathrm{const} < \infty$, и оператор $A = -\Delta + q$ предполагается самосопряженным на $D(A)$.

Отметим, что методы работы [2] могут быть перенесены на случай произвольного диссипативного оператора A с $D(A^*) = D(A)$, однако последнее условие имеет существенное значение как при построении дилатации, так и при соответствующих обоснованиях.

В [3], [4] самосопряженная дилатация построена в случае некоторых других конкретных диссипативных дифференциальных операторов (порожденных соответственно самосопряженным дифференциальным уравнением второго порядка и стационарным волновым уравнением).

При этом в [4] исследуемый оператор L является несамосопряженным расширением симметрического оператора с индексом дефекта (1.1) и, таким образом, $D(L^*) \neq D(L)$. Однако используемый в [4] метод неприменим для построения самосопряженной дилатации других операторов указанного класса.

В настоящей заметке явно строятся как симметрическая, так и самосопряженная дилатации произвольного замкнутого диссипативного оператора A с плотной областью определения. Предполагается лишь, что множество регулярных точек $\rho(A)$ оператора A не является пустым (для определенности предполагаем, что $-i \in \rho(A)$). При этом существенную роль играет тот факт, что вместо оператора $\frac{A-A^*}{2i}$, который в случае $D(A) \neq D(A^*)$ определен лишь на части множества $D(A)$, используется оператор $R = iR_{-i} - iR^*_{-i} - 2R^*_{-i}R_{-i}$, где $R_{-i} = (A + iI)^{-1}$ **(1)**, который был введен и исследован ранее в работах А. В. Кужеля [5]. Что касается схемы построения дилатации, то она близка той, которая использовалась в работах [2—4].

Одновременно с изложенными здесь результатами была построена самосопряженная дилатация диссипативного оператора и J-самосопряженная дилатация линейного оператора в [6] по схеме, близкой к схеме С.-Надя-Фояша.

1. Симметрическая дилатация. Всюду в дальнейшем A-диссипативный, замкнутый оператор, действующий в гильбертовом пространстве H_0, такой, что $\overline{D(A)} = H_0$ и $-i \in \rho(A)$.

Рассмотрим пространство вектор-функций $H_- = L_2(-\infty, 0; H_1)$, где $H_1 = \overline{\sqrt{R} H_0}$ и оператор R определен равенством (1).

Образуем гильбертово пространство $H = H_- \oplus H_0$ и построим в нем оператор L следующим образом.

Вектор $h = \begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \end{pmatrix}$, где $h_- \in H_-$ и $h_0 \in H_0$, принадлежит $D(L)$ тогда и только тогда, когда

$h_- \in W_2^1(-\infty, 0; H_1)$, где W_2^1 — класс Соболева;

$h_0 \in D(A)$;

$h_-(0) = G h_0$, где $G = Q(A + iI)$, $Q = \sqrt{R}$ (т. к. A — диссипативный, то $R \geqslant 0$ [6]).

Если $h \in D(L)$, то $Lh = L\begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_- h_- \\ A h_0 \end{pmatrix}$, где $\Gamma_- h_- = -i \dfrac{dh_-}{dt}$.

Теорема 1. *Оператор L является симметрической дилатацией оператора A.*

Доказательство. Легко проверить непосредственными преобразованиями, что

$$\| Gh \|^2 = 2 \operatorname{Im} (Ah, h) \ (\forall h \in D(A)). \tag{2}$$

Пусть $h \in D(L)$, тогда, применяя (2), условия на $D(L)$ и формулу интегрирования по частям, получаем

$$(Lh, h)_H - (h, Lh)_H = 2i \operatorname{Im} (Ah_0, h_0)_{H_0} - i \| h_-(0) \|^2_{H_0} = 0.$$

Докажем, что множество значений оператора $L + iI$ плотно в H, т.е. $\overline{E(L + iI)} = H$. Допустим противное, т. е., что существует ненулевой вектор $h' = \begin{pmatrix} h_-' \\ h_0' \end{pmatrix} \perp E(L + iI)$.

Положим $h_-(0) = h_0 = 0$. Так как $-i \in \rho(\Gamma_0)$, где $\Gamma_0 = \Gamma_- \mid_M$, $M = \{ h_- \in D(\Gamma_-) \mid h_-(0) = 0 \}$, то $h_-' = 0$. И так как $-i \in \rho(A)$, то $h_0' = 0$ и, следовательно, $h' = 0$.

Легко проверить, что

$(L - \lambda I)^{-1} h = \begin{pmatrix} (\Gamma_0 - \lambda I)^{-1} h_- + i e^{i\lambda t} Q (I + (\lambda + i) R_\lambda) h_0 \\ R_\lambda h_0 \end{pmatrix}$, т. е. L-дилатация A. Теорема доказана.

2. Самосопряженная дилатация. Рассмотрим пространство вектор-функций $H_+ = L_2(0, \infty; H_2)$, где $H_2 = \overline{Q' H_0}$, $R' = iR_{-i} - iR_{-i}^* - 2R_{-i} R_{-i}^*$, $Q' = \sqrt{R'}$.

Образуем гильбертово пространство $H = H_- \oplus H_0 \oplus H_+$ и построим в нем оператор S: вектор $h = \begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix}$, где $h_\pm \in H_\pm$, $h_0 \in H_0$, принадлежит $D(S)$ тогда и только тогда, когда 1) $h_- \in W_2^1 \times (-\infty, 0; H_1)$, $h_+ \in W_2^1(0, \infty; H_2)$, где W_2^1 — класс Соболева;

$\varphi = h_0 + Q'h_+(0) \in D(A)$; 3) $h_-(0) = T^*h_+(0) + iG\varphi$, где $T^* = I + 2iR^*_{-i}$. (Оператор G определен выше). Если $h = \begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} \in D(S)$,

$$Sh = S\begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_- h_- \\ -ih_0 + (A + iI)\varphi \\ \Gamma_+ h_+ \end{pmatrix}, \text{ где } \Gamma_+ h_+ = -i\frac{dh_+}{dt}.$$

Теорема 2. *Оператор S является самосопряженной дилатацией оператора A.*

Доказательство. Очевидно, что $\overline{D(S)} = H$. Докажем, что оператор S является симметрическим. Для этого нам понадобится легко проверяемое равенство $(I - 2iR_{-i})G\varphi = Q'(A + iI)\varphi$ $(\forall \varphi \in D(A))$ **(3)**.

Используя сначала формулу интегрирования по частям, затем условие 3) на $D(S)$ и (2), а потом (3), получим:

$$(Sh, h)_H - (h, Sh)_H = i\|h_+(0)\|^2_{H_0} - i\|h_-(0)\|^2_{H_0} + 2i\,\mathrm{Im}(A\varphi, h_0)_{H_0} + 2i\,\mathrm{Im}\,i\,(Q'h_+(0), h_0)_{H_0} = -2i\,\mathrm{Im}\,[2(h_+(0), R^*_{-i}h_+(0))_{H_0} + (T^*h_+(0), G\varphi)_{H_0} + 2i\|R^*_{-i}h_+(0)\|^2_{H_0} - i(Q'h_+(0), h_0)_{H_0} + (A\varphi, Q'h_+(0))_{H_0}] = -2i\,\mathrm{Im}\,[2(h_+(0), R^*_{-i}h_+(0))_{H_0} + i(B'h_+(0), h_+ \times (0))_{H_0} + 2i(R_{-i}R^*_{-i}h_+(0), h_+(0))_{H_0}] = 0.$$

Последнее равенство получено с учетом выражения для B'.

Докажем теперь самосопряженность оператора S. Для этого достаточно показать, что $\{i, -i\} \subset \rho(S)$.

I. Докажем, что $\overline{E(S + iI)} = H$. Допустим противное, т. е., что существует ненулевой вектор $h' = \begin{pmatrix} h'_- \\ h_0 \\ h'_+ \end{pmatrix} \perp E(S + iI)$.

Положим $h_-(0) = h_0 = 0$ и $h_+ = 0$, и так как $-i \in \rho(\Gamma_0)$, то $h'_- = 0$.

Положим $h_+(0) = 0$, тогда условие 3) на $D(S)$ станет: $h_-(0) = iQ(A + iI)h_0$. Ясно, что h_0 может принимать любые значения из $D(A)$. А так как $i \in \rho(A)$, то $h_0 = 0$.

Пусть $h_+(0)$ произвольно, и так как $\overline{E(\Gamma_+ + iI)} = H_+$, то $h'_1 = 0$. Таким образом, $h^1 = 0$.

II. Докажем, что $\overline{E(S - iI)} = H$. Допустим противное, как и в пе вом случае.

Положим, $h_0 = h_+(0) = 0$ и $h_- = 0$. Так как $i \in \rho(\Gamma_+ | M')$, $M' = \{h_+ \in D(\Gamma_+) \,|\, h_+(0) = 0\}$, то $h'_+ = 0$.

Из у ловия 3) на $D(S)$ и равенства $T^*Q' = QT^*$ легко получить, что $(A + iI)\,\text{р} - (A^* - iI)\psi = 2ih_0$ **(4)**, где $\psi = h_0 + Qh_-(0) \in D(A^*)$. По ожим $_- = 0$, тогда из (4) получаем $(A + iI)\varphi - 2ih_0 = (A^* - iI)\ _0$ **(5)**.

Покажем, что
$(\forall h_0 \in D(A^*))(\exists \varphi \in D(A) \wedge \exists h_+(0) \in H_2)$, что $\varphi = h_0 + Q' h_+(0)$.

Действительно, существует h_1, что $h_0 = iR^*_{-i} h_1$. Положим $\varphi = (iR_{-i} + 2R_{-i}R^*_{-i}) h_1 \in D(A)$, отсюда и получаем доказываемое утверждение $h_+(0) = Q' h_1$.

Легко проверить, что найденные $h_+(0)$, φ и h_0 удовлетворяют (5). Таким образом, $h_0 = 0$.

Пусть $h_-(0)$ произвольно, так как $\overline{E(\Gamma_- - iI)} = H_-$, то $h'_- = 0$. Следовательно, $h' = 0$.

Остается проверить, что S — дилатация оператора A.

Действительно

$$(S - \lambda I)^{-1} h = \begin{pmatrix} (\Gamma_0 - \lambda I)^{-1} h_- + e^{i\lambda t} T^* \psi_+(0) + iQ(I + \mu R_\lambda)(h_0 + \mu Q' \psi_+(0)) \\ R_\lambda h_0 - (I + \mu R_\lambda) Q' \psi_+(0) \\ (\Gamma_+ - \lambda I)^{-1} h_+ \end{pmatrix}.$$

Обозначим $(S - \lambda I)^{-1} \begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_- \\ V_0 \\ V_+ \end{pmatrix}$, где $\lambda \in \rho(S) \cap \rho(A)$, $[(\Gamma_+ - \lambda I)^{-1} h_+(t)]|_{t=0} = \psi_+(0)$, $\mu = \lambda + i$.

Эту формулу легко доказать непосредственными вычислениями, используя равенство $V_-(0) = T^* V_+(0) + iG(V_0 + Q' V_+(0))$. Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Секефальви-Надь Б., Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Мир, 1970. — 431 с. 2. *Павлов Б. С.* Самосопряженная дилатация диссипативного оператора Шредингера и разложение по его собственным функциям. — Мат. сб., 1977, **102** (144), № 4, с. 511 — 536. 3. *Павлов Б. С.* Теория дилатаций и спектральный анализ несамосопряженных дифференциальных операторов. — Мат. программир. и смежн. вопр. Теория операторов в линейных пространствах, М., 1976, с. 3 — 69. 4. *Павлов Б. С., Фадеев Л. Д.* Построение самосопряженной дилатации для задачи с импедансными граничными условиями. — Зап. ЛОМИ АН СССР, 1977, **73**, с. 217 — 223. 5. *Кужель А. В.* О приведении неограниченных несамосопряженных операторов к треугольному виду. — Докл. АН СССР, 1958, 119, 5, с. 868 — 871. 6. *Кужель А. В.* Самосопряженные и $\mathcal{J}$-самосопряженные дилатации линейных операторов. (См. статью в наст. сб.).

Поступила в редколлегию 14.04.80.