УДК 517.53

Н. В. ЗАБОЛОЦКИЙ, С. Ю. ФАВОРОВ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ В R^m ФУНКЦИЙ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА

Пусть $u(x)$ — субгармоническая функция в $\boldsymbol{R}^m$, гармоническая в окрестности нуля и такая, что $u(0)=0$, $\rho(r)$ — ее уточненный порядок, $V(r)=r^{\rho(r)}$; $\mu_u(x)$ — ассоциированная мера, $B(r)=\{x\in\boldsymbol{R}^m:|x|<r\}$,

* α-мерой Карлесона множества E называется $\inf\sum r_j^\alpha$, где r_j — радиусы кругов C_j, образующих покрытие множества E и inf берется по всем счетным покрытиям $\{C_j\}$ множества E (см., например, [7]).

** C^0-множеством называется любое множество E, которое можно покрыть кружками C_j с радиусами r_j так, что $\lim\limits_{r\to\infty}\left\{\frac{1}{r}\sum^r r_j\right\}=0$, где символ Σ^r означает суммирование по всем кружкам, центры которых попали в круг $|z|<r$ (см., например, [1]).

$$n(r,\ u)=\mu_u(B(r)),\quad N(r,\ u)=\int\limits_0^r \frac{n(t,\ u)}{t^{m-1}}\,dt,$$

$$I(x,\ u)=\int\limits_{|y-x|<|x|}(|x-y|^{2-m}-|x|^{2-m})\,d\mu_u(y) \text{ при } m>2,$$

$$I(x,\ u)=\int\limits_{|y-x|<|x|}\ln(|x|\,|x-y|^{-1})\,d\mu_u(y) \text{ при } m=2.$$

Для функции $u(x)$, имеющей нулевой порядок, в случае $m=$ $=2$ в [1] доказаны следующие асимптотические формулы при $|x|\to\infty$:

$$u(x)=-I(x,\ u)+N(|x|,\ u)+o(V(|x|)), \tag{1}$$

$I(x,\ u)=o(V(|x|))$ вне c_0-множества (определение см. [2, (2)].

В [1] показано, что соотношения (1), (2), вообще говоря, уже не верны для субгармонических в $\boldsymbol{R}^m$, $m\geqslant 3$, функций нулевого порядка. А. А. Гольдберг обратил наше внимание на то, что формулы (1), (2) могут быть верны для некоторых подклассов субгармонических в $\boldsymbol{R}^m$ функций. В настоящей заметке дается естественное описание таких подклассов, а также уточняется соотношение (2).

Класс L субгармонических функций в $\boldsymbol{R}^m$ назовем допустимым, если он замкнут относительно умножения на положительные константы, преобразований $x\to kx$ $(k>0)$, предельного перехода в пространстве обобщенных функций $D'(\boldsymbol{R}^m)$, а также не содержит никаких ограничений сверху в $\boldsymbol{R}^m$ функций, кроме констант. Так, класс всех субгармонических функций в R^2, класс всех плюрисубгармонических функций в $\boldsymbol{C}^l\ (\text{-}\boldsymbol{R}^{2l})$ являются допустимыми. Более общий пример приведен в теореме 2 настоящей заметки.

Субгармоническую функцию $u(x)$ в R^m, имеющую нулевой порядок роста, назовем допустимой, если она принадлежит какому-нибудь допустимому классу.

Теорема 1. *Для любой допустимой функции* $u(x)$ *при* $r\to\infty$

$$n(r,\ u)=o(V(r)\cdot r^{m-2}).$$

Доказательство. Рассмотрим предельное множество $\mathrm{Fr}\,u$ для функции $u(x)$ (см. [3]), т. е. множество функций, являющихся пределами в $D'(\boldsymbol{R}^m)$ последовательностей функций вида $V(t_n)^{-1}$ $u\ (t_nx)$, $t_n\to\infty$. Согласно [3] множество $\mathrm{Fr}\,u$ состоит из субгармонических функций $v(x)$, таких, что $v(x)\leqslant C|x|^\rho$ при $x\in\boldsymbol{R}^m$, где ρ — порядок роста функции $u(x)$, в нашем случае $\rho=0$. Так как функции $v\in\mathrm{Fr}\,u$ лежат в допустимом классе, то множество $\mathrm{Fr}\,u$ содержит только константы. Далее, предельное множество $\mathrm{Fr}\,\mu_u$ (т. е. пределы в $D'(\boldsymbol{R}^m)$ мер вида $V(t_n)^{-1}t_n^{2-m}\mu_u(t_nx)$ при $t_n\to\infty$) состоит из мер, являющихся ассоциированными к функциям из $\mathrm{Fr}\,u$ (см. [3]), т. е. $\mathrm{Fr}\,\mu_u=\{0\}$. Отсюда следует утверждение теоремы.

Теорема 2. *Пусть $m_i \in N$, $i=1, \ldots, k$, $0=m_0<m_1<\ldots<m_{k-1}<m_k=m$, $m_i \leqslant m_{i-1}+2$. Класс L, состоящий из субгармонических в $\boldsymbol{R}^m$ функций, для каждого $i=1, 2, \ldots, k$-субгармонических по переменным $x_{m_i}, x_{m_i+1}, \ldots, x_m$ при любых фиксированных остальных переменных, является допустимым.*

Доказательство. Докажем вначале, что субгармоническая в $\boldsymbol{R}^m$ функция $u(x)$, удовлетворяющая при $s<m$ соотношению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_{s+1}^2}+\ldots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} \geqslant 0$$

в смысле $D'(\boldsymbol{R}^m)$, является субгармонической по переменным $x_{s+1}, \ldots, x_m$ при любых фиксированных $x_1, \ldots, x_s$. Для этого достаточно выбрать последовательность финитных бесконечно дифференцируемых функций $\alpha_n(t)$, такую, чтобы последовательность сверток $(u * \alpha_n)(x)$ монотонно убывала к субгармонической в R^m функции $u(x)$. Осталось заметить, что $(u*\alpha_n)(x)$-субгармонические функции по переменным $x_{s+1}, \ldots, x_m$. Отсюда следует, что класс L замкнут относительно предельного перехода в $D'(\boldsymbol{R}^m)$. Далее, если функция $u(x) \in L$ не зависит от переменных

$$x_{m_{i+1}}, \ldots, x_m,$$

то она удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_{m_i}^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_{m_i+1}^2} \geqslant 0$$

при $m_{i+1}=m_{i+2}$ или соотношению $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_{m_i}^2} \geqslant 0$ при $m_{i+1}=m_i+1$ в смысле обобщенных функций. Поэтому из ограниченности сверху в $\boldsymbol{R}^m$ функции $u(x)$ следует, что она не зависит от переменной x_{m_i}, x_{m_i+1} (или, соответственно, от переменной x_{m_i}). Индукция по i показывает, что $u(x) \equiv \mathrm{const}$. Теорема доказана.

Следствие. *Класс полисубгармонических функций в $\boldsymbol{R}^{2l}$ является допустимым.*

Теорема 3. *Для допустимой функции $u(x)$ при $|x| \to \infty$*

$$u(x)=-I(x, u)+N(|x|, u)+o(V(|x|)).$$

При $m=2$ эта теорема была доказана в [1], при $m \geqslant 3$ используется тот же метод (см. также [4]).

Следуя работе [5], относительной емкостью множества $E \subset \boldsymbol{R}^m$ назовем величину

$$\varlimsup_{t \to \infty} \operatorname{cap}(E \cap B(t))[\operatorname{cap} B(t)]^{-1},$$

где cap обозначает ньютонову (при $m \geqslant 3$) или логарифмическую (при $m=2$) емкость.