УДК 517.9

К. П. КИРЧЕВ, Е. Х. ХРИСТОВ

О РАЗЛОЖЕНИЯХ, СВЯЗАННЫХ С ПРОИЗВЕДЕНИЯМИ ДВУХ РЕГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ ДИРАКА

1. Обозначим через $\{Q(x), \alpha\}$ краевую задачу, определяемую системой Дирака, $By' + Q(x)y = \lambda y$, $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$, $(' = d/dx)$ (1) $y_2(0) = 0$; $y_1(\pi)\sin\alpha + y_2(\pi)\cos\alpha = 0$ (2), где $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$; вещественные функции $p(x)$, $q(x) \in C^1[0, \pi]$, число $\alpha \in [0, \pi)$. Пусть $\varphi(x, \lambda)$ и $\psi(x, \lambda)$ решения уравнений (1) такие, что $\varphi(0, \lambda) = (1, 0)^T$, $\psi(\pi, \lambda) = (\cos\alpha, -\sin\alpha)^T$ (3), (T — транспонирование) и $\omega(\lambda) = \varphi_1(\pi; \lambda)\sin\alpha + \varphi_2(\pi, \lambda)\cos\alpha \equiv -\varphi_2(0, \lambda)$ характеристическая функция задачи $\{Q(x), \alpha\}$. Как известно (см. [1] гл. 1), нули λ_n, $(n \in Z = (0, \pm 1 \ldots))$ функции $\omega(\lambda)$, определяющие спектр $\sigma\{Q(x), \alpha\}$ задачи (1), (2), простые, т. е. $\omega(\dot{\lambda}_n) \neq 0$, $(\cdot = \partial/\partial(\lambda)$ и $\lambda_n = n - \alpha/\pi + O(n^{-1})$ при $n \to \pm\infty$ (4).

Пусть теперь заданы две краевые задачи $\{Q_j(x), \alpha_j\}$, $(j = 1,2)$. Построим по их спектрам $\sigma_j = \{\lambda_n^{(j)}, (n \in Z)\}$ множества $\Lambda = \sigma_1 \bigcup \sigma_2$, $\Lambda'' = \sigma_1 \bigcap \sigma_2$, $\Lambda' = \Lambda \setminus \Lambda''$, где вследствие (4), без ограничения общности, предполагаем, что $\lambda_n^{(j)}$ занумерованы так, что $n = m$, если $\lambda_n^{(1)} = \lambda_m^{(2)}$. Для краткости обозначений положим $\lambda_n^{(j)} = \lambda_{2n+j}$, $(n \in Z; j = 1,2)$. Определим произведение $y^{(1)} \cdot y^{(2)}$ решений $y^{(j)}(x,\lambda) = (y_1^{(j)}, y_2^{(j)})^T$ уравнений $By^{(j)\prime} + Q_j(x)\, y^{(j)} = \lambda y^{(j)}$, $(j = 1,2)$ (5) по формуле $Y(x, \lambda) = y^{(1)} \cdot y^{(2)}(x,\lambda) =$

$$= \begin{pmatrix} y_1^{(1)} y_1^{(2)} - y_2^{(1)} y_2^{(2)} \\ y_1^{(1)} y_2^{(2)} + y_2^{(1)} y_1^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Построим по решениям $\varphi^{(j)}(x,\lambda)$, $\psi^{(j)}(x,\lambda)$, удовлетворяющим уравнениям (5) и начальным условиям (3), с $\alpha = \alpha_j$, функции $\Phi(x,\lambda) = \varphi^{(1)} \cdot \varphi^{(2)}(x,\lambda)$, $\Psi(x,\lambda) = \psi^{(1)} \cdot \psi^{(2)}(x,\lambda)$, и пусть $\Omega(\lambda) = \omega_1(\lambda)\,\omega_2(\lambda)$, где $\omega_j(\lambda) = \omega(Q_j(x), \alpha_j; \lambda)$.

Введем системы $\{U_n(x) = (U_{n,1}, U_{n,2})\}$ и $\{V_n(x) = (V_{n,1}, V_{n,2})\}$, положив при $\lambda_n \in \Lambda'$ $U_n(x) = \Omega^{-1}(\lambda_n)\,\Phi(x,\lambda_n)$ $V_n(x) = \Psi(x,\lambda_n)$, а при $\lambda = \lambda_{2n+1} = \lambda_{2n+2} \in \Lambda''$ $U_{2n+1}(x) = 2\ddot{\Omega}^{-1}(\lambda)\,\Phi(x,\lambda)$, $U_{2n+2}(x) = 2\ddot{\Omega}^{-1}(\lambda)\,\dot{\Phi}(x,\lambda)$, $V_{2n+1}(x) = \dot{\Psi}(x,\lambda) - \dddot{\Omega}(\lambda)(3\ddot{\Omega}(\lambda))^{-1}\Psi(x,\lambda)$, $V_{2n+2} = \Psi(x,\lambda)$. С помощью тождества $[\Psi(x,\mu), \Phi(x,\lambda)] = (\mu-\lambda)^{-1}(\Omega(\mu) - \Omega(\lambda))$ нетрудно проверить, что $[V_n, U_m] = \delta_{n,m}$, где $[f,g] = \int_0^\pi f_1(x)g_2(x) - f_2(x)g_1(x)\,dx$.

Теорема 1. *Для любой комплекснозначной функции $f(x) = (f_1, f_2)$, где $f_1(x), f_2(x) \in C^1[0,\pi]$ справедлива формула разложения $f(x) = \lim S_N(f;x)$, $(0 < x < \pi)$* **(6)**, *где при $\alpha_1 > \alpha_2$ $S_N(f;x) = S(-N+4, N, f; x)$, а при $\alpha_1 = \alpha_2$ $S_N(f;x) = S(-2N+3, 2N, f; x)$; где $S(M,N,f;x) = \sum_{n=M}^{N} V_n(x)[f, U_n]$. Сходимость в (6) равномерна по x в любом интервале $\Delta \subset (0,\pi)$.*

Теорему 1 можно доказать сходными [2, 3] выкладками, просчитав контурный интеграл $\oint_{c_N}\int_0^\pi G(x,y,\lambda)f(y)\,dy$, где $G(x,y,\lambda) =$

$$= \Omega^{-1}(\lambda)\{\Psi(x,\lambda)\tilde{\Phi}(y,\lambda)\,\theta(x-y) + [\sum_{j=1,2} S^{(j)}(x,\lambda)\tilde{S}^{(3-j)}(y,\lambda) -$$

$-\Phi(x,\lambda)\tilde{\Psi}(y,\lambda)]\,\theta(y-x)\}$, где $S^{(j)}(x,\lambda) = \psi^{(j)} \cdot \varphi^{(3-j)}(x,\lambda)$, $\tilde{f} = (Bf)^T$ $\theta(x) = 1$ при $x > 0$, $\theta(x) = 0$ при $x < 0$, $c_N: \lambda = (4\pi)^{-1}(\pi - 2(\alpha_1+\alpha_2)) + 4^{-1}(2N-3)\exp(i\varphi)$, $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$, а при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ $c_N: \lambda = -\alpha\pi^{-1} + 2^{-1}(2N-1)\exp(i\varphi)$, $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$.

2. Обозначим через $\beta_{2n+j}^{-1} = \|\psi^{(j)}(x,\lambda_{2n+j})\|^2_{L_2}$, $(n \in Z)$ — квадрат нормы собственных функций краевой задачи $\{Q_j(x), \alpha_j\}$. Положим в (6) $f(x) = (q_2(x) - q_1(x), p_1(x) - p_2(x))$ и подсчитаем коэффициенты разложения $[f, U_{2n+j}]$ с помощью тождества $[f(x), \Phi(x,\lambda)] = \varphi_1^{(2)}(\pi,\lambda)\varphi_2^{(1)}(\pi,\lambda) - \varphi_2^{(2)}(\pi,\lambda)\varphi_1^{(1)}(\pi,\lambda)$, учитывая, что

$$\beta_{2n+j}^{-1} = \psi_1^{(j)}(0,\lambda)\,\omega_j(\lambda) = \frac{\omega_j(\lambda)\cos\alpha_j}{\varphi_1^{(j)}(\pi,\lambda)} = -\left.\frac{\omega_j(\lambda)\sin\alpha_j}{\varphi_2^{(j)}(\pi,\lambda)}\right|_{\lambda=\lambda_{2n+j}} \tag{7}$$

В результате получаем следующие утверждения.

Теорема 2. *Пусть для собственных чисел краевых задач $\{Q_j(x), \alpha_j\}$ и $\{Q_j(x), \tilde{\alpha}_j\}$, $(j = 1,2)$, где $\alpha_2 \neq \tilde{\alpha}_2$ выполняются равенства $\lambda_{2n+1} \equiv \lambda_n(Q_1(x), \alpha_1) = \lambda_n(Q_2(x), \tilde{\alpha}_2)$, $(n \in Z)$ и $\lambda_n(Q_1(x), \tilde{\alpha}_1) = \lambda_n(Q_2(x), \alpha_2) \equiv \lambda_{2n+2}$, $(n \in Z - Z_0)$, где Z_0 — конечное множество индексов n. Тогда $\alpha_1 = \tilde{\alpha}_2$, $\tilde{\alpha}_1 = \alpha_2$ и $Q_2(x) - Q_1(x) =$*

$= \sum_{\in Z_0} \widetilde{V}_{2n+2}(x)\beta_{2n+2}\frac{\widetilde{\omega}_1(\lambda_{2n+2})}{\omega_1(\lambda_{2n+2})}$, $(0\leqslant x\leqslant \pi)$, *где матричные функции* $\widetilde{V}_{2n+j}(x) = \begin{pmatrix} -V_{2n+j,\,2}(x) & V_{2n+j,\,1}(x) \\ V_{2n+j,\,1}(x) & V_{2n+j,\,2}(x)\end{pmatrix}$.

Следствие 1. *Если в теореме 2* $Z_0 = \varnothing$, *то* $Q_1(x) = Q_2(x)$, $(0\leqslant x\leqslant \pi)$.

Теорема 3. *Пусть заданы две краевые задачи* $\{Q_j(x),\ \alpha_j\}$, $(j = 1,2)$, *для которых собственные числа* $\lambda_{2n+1} = \lambda_{2n+2}$ *и нормировочные числа* $\beta_{2n+1} = \beta_{2n+2}$ *при* $n \in Z \diagdown \bigcup_{l=1}^{3} Z_0^{(l)}$, *где* $Z_0^{(l)}$ — *конечные множества индексов* n: $Z_0^{(1)} = \{n\in Z/\lambda_{2n+1} = \lambda_{2n+2},\ \beta_{2n+1}\neq\beta_{2n+2}\}$, $Z_0^{(2)} = \{n\in Z/\lambda_{2n+1}\neq\lambda_{2n+2},\ \beta_{2n+1}\neq\beta_{2n+2}\}$, $Z_0^{(3)} = \{n\in Z/\lambda_{2n+1}\neq\lambda_{2n+2},\ \beta_{2n+1}=\beta_{2n+2}=\beta_n\}$. *Тогда* $\alpha_1 = \alpha_2$ и $Q_2(x) - Q_1(x) = \sum_{n\in Z_0^{(1)}}(\beta_{2n+2}-\beta_{2n+1})\widetilde{V}^{(x)}_{2n+2} + \sum_{n\in Z_0^{(2)}}\{\beta_{2n+2}\widetilde{V}_{2n+2}(x) - \beta_{2n+1}\widetilde{V}_{2n+1}(x)\} + \sum_{n\in Z_0^{(3)}}\beta_n\{\widetilde{V}_{2n+2}(x) - \widetilde{V}_{2n+1}(x)\}$, $(0\leqslant x\leqslant\pi)$,

где $\widetilde{V}_{2n+j}(x)$ *определяется как в теореме 2, а* β_{2n+j} — *из* (7).

Следствие 2. *Если в теореме 3* $Z_0^{(l)} = \varnothing\ (l = 1, 2, 3)$, то $Q_1(x) = Q_2(x)$, $(0\leqslant x\leqslant\pi)$.

Замечание. Теоремы 2, 3 можно рассматривать как обобщение некоторых из теорем Хохштадта [4, 5] о структуре разности потенциалов двух задач Штурма — Лиувилля. Следствия 1, 2 являются для краевой задачи Дирака аналогами известных теорем единственности Борга и Марченко. Отметим, что обратная задача для регулярного оператора Дирака (в постановках следствий 1, 2) изучена в [6].

Список литературы: 1. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Введение в спектральную теорию. — М.: Наука, 1970—671 с. 2. *Gerdjikov V. S., Khristov E. Kh.* On expansions over products of Solutions of two Dirac Systems. — Препринт ОИЯИ, E5 — 11668, 1978. 3. *Кирчев К. П., Христов Е. Х.* О разложениях, связанных с произведениями решений двух регулярных задач Штурма — Лиувилля. — Препринт ОИЯИ, P5 — 12227, 1979. 4. *Hochstadt H.* The inverse Sturm — Liouville Problem. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1973, 26, № 516, p. 715 — 730. 5. *Левитан Б. М.* Об определении оператора Штурма — Лиувилля по одному и двум спектрам. — Изв. АН СССР, сер. мат., 1978, **42**, № 1, с. 185 — 199. 6. *Гасымов М. Г., Джабиев Т. Т.* Определение системы дифференциальных уравнений Дирака по двум спектрам. Тр. летней школы по спектр. теории операторов и теории представлений групп. — 1968, Баку, ЭЛМ, 1975, с. 46 — 71.

Поступила в редколлегию 02.05.79.