УДК 513.88 : 519.21

А. А. ЯНЦЕВИЧ

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ. II. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Рассмотрим нестационарную линейно представимую последовательность [1] $x(n) = T^n x_0$ **(1)**, где $T \in [H, H]$ — обратимый оператор (в дальнейшем будем считать для простоты T квазиунитарным оператором первого ранга).

Включим T в операторный ϑ-узел $\vartheta = [T, H, \Psi, E, J, K]$, $I - T^*T = \Psi\Psi^+$, $I - K^+K = \Psi^+\Psi$, $\Psi^+ = J\Psi^*$, $\Psi \in [E, H]$, $J \in [E, E]$, $J = J^*$, $J^2 = I$, $K \in [E, E]$.

Рассмотрим пару отображений $H \dot{+} E \to H$, $H \dot{+} E \to E$, которая сопоставляется ϑ-узлу:

$$\begin{cases} x(n+1) = Tx(n) + \Psi u(n), \ x(n) \in H, \\ Kv(n) = u(n) - J\Psi^* x(n+1), \ u(n), \ v(n) \in E, \\ \qquad x(n)|_{n=0} = x_0. \end{cases} \tag{2}$$

В дальнейшем отображение (2) будем называть случайной открытой системой (СОС).

Так как T по предположению квазиунитарен и ранг его равен 1, то удобно перейти от операторного ϑ-узла к операторному θ-комплексу:

$$\theta = (T, H, g = \sqrt{\omega} a, J = 1, k),$$
$$I - T^*T = (\cdot, g) g, \ a \in E \subset H, \ \dim E = 1,$$
$$|a| = 1, \ k = \sqrt{1 - \omega^2}\, e^{i\alpha}, \ \Psi a = g, \ \omega > 0,$$

где α — произвольное вещественное число.

Уравнения СОС в этом случае упрощаются:

$$x(n+1) = Tx(n) + u(n) g; \quad kv(n) = u(n) - (x(n+1), g), \tag{3}$$

где $u(n) = (u(n), a)_E$, $v(n) = (v(n), a)_E$

Лемма. *Корреляционная разность случайной последовательности имеет вид* $w(n, m) = R_v(n, m) - R_u(n, m)$, *где* R_u *и* R_v — *соответствующие корреляционные функции на входе и выходе СОС.*

Доказательство получается из рассмотрения наряду с СОС (3) двойственной открытой системы, ассоциированной с θ^*-узлом, содержащим T^* [2].

Теорема 1. *Пусть* $x(n) = T^n x_0$, *где* T — *полное сжатие. Тогда существуют две совокупности случайных последовательностей* $\{x_l(n)\}$, $\{u_l(n)\}$, *удовлетворяющих следующим условиям:*

1) $x_l(n) = \Psi_l(n)\xi_l$, $\Psi_l(n)$ — *детерминированные функции,* $M\xi_l\bar{\xi}_m = \delta_{lm}$;

2) имеет место представление

$$x(n)=\sum_{k=1}^{\infty}\Psi_k(n)\,\xi_k \tag{4}$$

(сходимость понимается в среднеквадратичном);

3) $u_l(n)=\tilde{u}_l(n)\,a,\ \tilde{u}_l(n)=Mu_l(n)\,\bar{a},\ M\,|a|^2=1;$

4) детерминированные последовательности $\Psi_k(n)$ *и* $\tilde{u}_l(n)$ *определяются рекуррентными соотношениями*

$$\begin{cases}\Psi_l(m+1)=\lambda_l\Psi_l(m)+\tilde{u}_l(m)\,M(a\bar{\xi}_l);\\ k\tilde{u}_{l+1}(m)=\tilde{u}_l(m)-\sqrt{\omega}\,\Psi_l(m+1)\,M\xi_l\bar{a},\\ \qquad u_1(m)=0.\end{cases} \tag{5}$$

Доказательство теоремы 1 получается при помощи разложения и последующего сцепления открытой системы (3) [2].

Отметим, что в отличие от ортогонального разложения Лоэва—Карунена (5) представляет собой полный аналог спектрального разложения стационарной случайной последовательности: $\Psi_k(n)$ является внутренним состоянием дискретного осциллятора с комплексными частотами.

Пусть $z(n)=T^n z_0$— линейная представимая последовательность, где T — вполне неунитарный оператор с непрерывным спектром первого ранга. Тогда оператор T унитарно эквивалентен своей треугольной модели $\dot{T}\in[L^2_{[0,\,l]},\ L^2_{[0,\,l]}]$ [3]:

$$\dot{T}f=e^{i\alpha(x)}f(x)-2e^{i\alpha(x)+x}\int_x^l e^{-\xi}f(\xi)\,d\xi. \tag{6}$$

Так как $(J-T^*T)\,f=2\int_0^l e^{-\xi}f(\xi)\,d\xi\,e^{-x}$,

то каналовый элемент $g(x)=\sqrt{2}\,e^{-x}$, $\dim E=1$, $\Psi a=g$, $a\in E$, $|a|=1$, $k=e^{-l+i\gamma}$, γ — вещественное число. Следовательно, θ-комплекс имеет вид

$$\dot{\theta}=[\dot{T},\ L^2_{[0,\,l]},\ g=\sqrt{2}\,e^{-x},\ 1,\ e^{-l+i\gamma}]. \tag{7}$$

В силу унитарной эквивалентности T и $\dot{T}$ рассмотрение достаточно проводить для треугольной модели. Уравнения открытой системы, ассоциированной с (7),

$$\begin{gathered}f_{n+1}(x)=e^{i\alpha(x)}f_n(x)-2e^{i\alpha(x)+x}\int_x^l e^{-\xi}f(\xi)\,d\xi+u_n\sqrt{2}\,e^{-x};\\ kv_n=u_n-2\int_0^l f_{n+1}(\xi)\,e^{-\xi}\,d\xi,\ \ f_n(x)\,|_{n=0}=f_0(x).\end{gathered} \tag{8}$$

Введем функции

$$g_n(x)=\int_x^l e^{-\xi}f_n(\xi)\,d\xi, \tag{9}$$

тогда из (8), (9) имеем

$$\frac{dg_{n+1}(x)}{d_x}=e^{i\alpha(x)}\frac{dg_n(x)}{dx}-2e^{i\alpha(x)}g_n(x)-\sqrt{2}\,e^{-2x}{}_{f}\cdot$$

$$f_n(x)=-e^{-x}\frac{dg_n(x)}{dx};\tag{10}$$

$$g_n(l)=0,\ g_n(x)|_{n=0}=\int_x^l e^{-\xi}f_0(\xi)\,d\xi;$$
$$kv_n=u_n-\sqrt{2}\,g_{n+1}(l).\tag{11}$$

Используя представления:

$$g=\int_0^l\sqrt{2}\,e^{-x}\,d\zeta_{[0,\,x]};\quad f_n=\int_0^l f_n(x)\,d\zeta_{[0,\,x]},$$

$$f_n(x)=\frac{d}{dx}(f_n,\ \zeta_{[0,\,x]}),$$

где

$$\zeta_\Delta(x)=\begin{cases}1, & x\in\Delta,\\ 0, & x\bar{\in}\Delta,\end{cases}\quad \Delta=[x',\ x''],$$

$(\zeta_{\Delta_1},\ \zeta_{\Delta_2})=d(\Delta_1\cap\Delta_2)$, d — длина соответствующего интервала, приходим к теореме

Теорема 2. *Для случайной последовательности* $\dot{z}(n)=\dot{T}^n z_0$, *где* $\dot{T}$ *— вполне неунитарный оператор с непрерывным спектром первого ранга, существует случайная спектральная мера* $\zeta_{[0,\,x]}$ $M\zeta_{\Delta_1}\bar{\zeta}_{\Delta_2}=d(\Delta_1\cap\Delta_2)$ *такая, что* $\dot{z}(n)$ *представляется в виде*

$$\dot{z}(n)=\int_0^l f_n(x)\,d\zeta_{[0,\,x]},\tag{12}$$

где $f_n(x)=-e^{-x}\frac{dg_n(x)}{dx}$, *а* $g_n(x)$ *определяются из дифференциально-разностного уравнения* (10) *с условиями* (11).

Замечание. Так как в случае $\dim(I-T^*T)H=1$ корреляционная разность имеет вид $w(n,\ m)=\Phi(n)\Phi(m)$, где $\Phi(n)=(\dot{T}^n_{z_0},\ g)$, то, переходя к треугольной модели, имеем $\Phi(n)=\sqrt{2}\,g_n(0)$, следовательно, корреляционную разность можно найти по формуле $w(n,\ m)=2g_n(0)\overline{g_m(0)}$, где $g_n(0)$ строится по треугольной модели.

Список литературы: 1. *Янцевич А. А.* Применение теории операторных узлов к исследованию нестационарных случайных процессов и последовательностей.— В кн.: Материалы Всесоюз. симпозиума по статистике случайных процессов. К., 1973, с. 229—232. 2. *Янцевич А. А.* Операторные *j*-узлы и ассоциированные открытые системы.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1972, вып. 17, с. 215—220. 3. *Кужель А. В.* Треугольная модель K'-операторов в пространстве с индефинитной метрикой.— Докл. АН УССР, 1962, **5**, с. 572—574.

Поступила в редколлегию 23.11.83.