УДК 517.5

П. М. ЮДИЦКИЙ

ВНЕШНЕ-ВНУТРЕННЯЯ ФАКТОРИЗАЦИЯ j-РАСТЯГИВАЮЩИХ ОБРАТИМЫХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

Данная статья является продолжением работы [2]. Пусть $B(\zeta)$ j-растягивающая обратимая аналитическая матрица функция. Определим $\Gamma(t) = \lim\limits_{\zeta \to t} \{j - B^{-1*}(\zeta)\, jB^{-1}(\zeta)\}$, $\Lambda = \Gamma^{1/2}(I + \Gamma)^{-1/2}$, $|t| = 1$.

Свяжем с данным Λ интерполяционную задачу [2]. Любая функция вида

$$\begin{bmatrix} w(\zeta) \\ 1 \end{bmatrix} = B(\zeta) \begin{bmatrix} \omega(\zeta) \\ 1 \end{bmatrix} (b_{21}(\zeta)\,\omega(\zeta) + b_{22}(\zeta))^{-1},$$

$\omega(\zeta)$ — аналитическая сжимающая функция, $B = \| b_{ij} \|$, является ее решением. Поэтому в силу теоремы 3 существует аналитическая функция $A(\zeta)$, определяемая как

$$jA(\zeta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \{ j + P_+ [\Lambda (D_\varepsilon^{-1} \Lambda)](\zeta) \} R$$

и обладающая свойствами

$$\frac{j - A^{-1*}(\zeta)\, jA^{-1}(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}\zeta} = \lim_{\varepsilon \to 0} \langle (D + \varepsilon)^{-1} (\zeta - T)^{-1} \Lambda,\ (\zeta - T)^{-1} \Lambda \rangle,$$

$$j - A^{-1*}(t)\, jA^{-1}(t) = \Lambda (I - \Lambda^2)^{-1} \Lambda = \Gamma(t),\ |t| = 1. \qquad (1)$$

Поскольку граничные значения j-форм матриц $A(\zeta)$ и $B(\zeta)$ совпадают, то матрица $B_i(\zeta) = A^{-1}(\zeta)\, B(\zeta)$ имеет j-унитарные граничные значения. Далее покажем, что $B_i(\zeta)$ является j-растягивающей в единичном круге. С этой целью выводится неравенство отщепления — точный аналог неравенства, использованного в [1] при выделении множителей Бляшке—Потапова

$$\left[\begin{array}{c|c} \langle Dx, x \rangle & \langle (\zeta - T)^{-1} \Lambda, x \rangle \\ \hline * & \dfrac{j - B^{-1*}(\zeta)\, jB^{-1}(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}\zeta} \end{array}\right] \geqslant 0, \qquad \text{(НО)}$$

x — произвольный вектор из $L^2(\boldsymbol{C}^2)$, $|\zeta| < 1$.

При доказательстве неравенства применяется следующая

Лемма. *Блочный (в ортогональном разложении) оператор*

$$G = \begin{bmatrix} f & 0 \\ g & h \end{bmatrix}$$

является сжатием тогда и только тогда, когда

$$\begin{bmatrix} I - hh^* & g \\ g^* & I - f^* f \end{bmatrix} \geqslant 0.$$

Вывод Неравенства Отщепления (НО). Представим данную функцию $B^{-1}(\zeta)$ дробнолинейным преобразованием сжатия $B^{-1}(\zeta) = [pS(\zeta) + q][qS(\zeta) + p]^{-1}$, где $p = 1/2(I + j)$, $q = 1/2(I - j)$. При этом j-форма матрицы $B^{-1}(\zeta)$ имеет вид

$$j - B^{-1*}(\zeta)\, jB^{-1}(\zeta) = [qS(\zeta) + p]^{-1*} [I - S^*(\zeta)\, S(\zeta)] [qS(\zeta) + p]^{-1}. \quad (2)$$

Будучи сужено на единичную окружность, тождество (2) дает равенство

$$I - S^* S - (qS^* + p)^* \Lambda (I - \Lambda^2)^{-1} \Lambda (qS + p) = 0,$$

следствием которого является неравенство

$$\begin{bmatrix} I-\Lambda^2 & \Lambda(qS+p) \\ \ast & I-S^*S \end{bmatrix} \geqslant 0.$$

Поэтому матрица-функция

$$w=\begin{vmatrix} S & 0 \\ \Lambda(qS+p) & \Lambda \end{vmatrix}$$

является сжимающей.

В соответствии с этим, оператор Pw^* в пространстве $H=H^2(\mathbf{C}^2)\oplus L^2(\mathbf{C}^2)$ также представляет собой сжатие,

$$P=\begin{bmatrix} P_+ & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Разложим пространство H в ортогональную сумму

$$\bar{\xi}=\begin{vmatrix} \dfrac{\alpha}{1-t\bar{\zeta}} \\ 0 \end{vmatrix}\oplus b\xi,\ \xi\in H,\ \alpha\in\mathbf{C}^2,\ b(t)=\frac{\zeta-t}{1-t\bar{\zeta}}.$$

Соответствующее блочное разложение оператора Pw^* имеет вид

$$Pw^*\bar{\xi}=\begin{bmatrix} P_+S^*\dfrac{\alpha}{1-t\bar{\zeta}} \\ 0 \end{bmatrix}+Pbw^*\xi=\begin{bmatrix} \dfrac{S^*(\zeta)\,\alpha}{1-t\bar{\zeta}} \\ 0 \end{bmatrix}+Pb(I-P)\,w^*\xi\oplus$$
$$\oplus\, bPw^*\xi.$$

Как видим, разложение является треугольным, и в силу леммы выполнено неравенство

$$\left[\begin{array}{c|c} \langle (I-wPw^*)\,\xi,\ \xi\rangle & \left\langle \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha}{1-t\bar{\zeta}} \\ 0 \end{bmatrix},\ Pb(I-P)\,w^*\xi \right\rangle \\ \hline \ast & \alpha^*\dfrac{I-S^*(\zeta)\,S(\zeta)}{1-\bar{\zeta}\zeta}\,\alpha \end{array}\right]\geqslant 0. \qquad (3)$$

Определим вектор

$$\xi=\begin{bmatrix} -P_+q\Lambda x \\ x \end{bmatrix},\ x\in L^2(\mathbf{C})^2.$$

и вычислим получающиеся при этом блоки (3). Так как

$$Pw^*\xi=P\begin{bmatrix} -S^*P_+q\Lambda x+(p+S^*q)\,\Lambda x \\ \Lambda x \end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix} P_+ & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S^*P_-q\Lambda x+p\Lambda x \\ \Lambda x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_+p\Lambda x \\ \Lambda x \end{bmatrix},$$

то

$$\langle\xi,\ \xi\rangle-\langle Pw^*\xi,\ Pw^*\xi\rangle=\langle P_+q\Lambda x,\ \Lambda x\rangle+\langle x,\ x\rangle-$$
$$-\langle P_+p\Lambda x,\ \Lambda x\rangle-\langle\Lambda x,\ \Lambda x\rangle=\langle (I-\Lambda^2-\Lambda P_+j\Lambda)\,x,\ x\rangle=\langle Dx,\ x\rangle.$$

Другой блок неравенства (3) приводится к виду

$$\left\langle \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha}{1-t\bar{\zeta}} \\ 0 \end{bmatrix}, Pb(I-P)w^*\xi \right\rangle = \left\langle \bar{b}\frac{\alpha}{1-t\bar{\zeta}}, P_-(p\Lambda x + S^*P_-q\Lambda x) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{\alpha}{\zeta - t}, p\Lambda x + S^*P_-q\Lambda x \right\rangle = \left\langle \Lambda \frac{p+qS(\zeta)}{\zeta - t}\alpha, x \right\rangle.$$

Подставляя эти выражения в (3), получим неравенство

$$\left[\begin{array}{c:c} \langle Dx, x\rangle & \langle(\zeta-T)^{-1}\Lambda, x\rangle(p+qS(\zeta))\alpha \\ \hdashline * & \alpha^*\dfrac{I-S^*(\zeta)S(\zeta)}{1-\bar{\zeta}\zeta}\alpha \end{array}\right] \geqslant 0.$$

Используя соотношение (2), можем переписать последнее в виде (НО).

Теперь легко показать, что $B_i(\zeta) = A^{-1}(\zeta)B(\zeta)$ является j-сжимающей матрицей функцией. В самом деле, из НО следует неравенство

$$\frac{j - B^{-1*}(\zeta)jB^{-1}(\zeta)}{1-\bar{\zeta}\zeta} - \langle(D+\varepsilon)^{-1}(\zeta-T)^{-1}\Lambda, (\zeta-T)^{-1}\Lambda\rangle \geqslant 0, \forall\varepsilon > 0.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, по свойству (1), получим

$$\frac{j - B^{-1*}(\zeta)jB^{-1}(\zeta)}{1-\bar{\zeta}\zeta} - \frac{j - A^{-1*}(\zeta)jA^{-1}(\zeta)}{1-\bar{\zeta}\zeta} \geqslant 0.$$

Откуда и имеем $B^*(\zeta)A^{-1*}(\zeta)jA^{-1}(\zeta)B(\zeta) - j \geqslant 0$.

Таким образом, установлено.

1. Резольвентная матрица задачи интерполяции [2] $A(\zeta)$ обладает тем свойством, что любая j-растягивающая аналитическая матрица-функция $B(\zeta)$, имеющая те же граничные значения j-формы допускает представление $B(\zeta) = A(\zeta)B_i(\zeta)$ (в.-в. ф.), где $B_i(\zeta)$ — j-внутренняя матрица функция в классе j-сжимающих. Последнее означает

$$B_i^*(\zeta)jB_i(\zeta) - j \geqslant 0, \ 1 - \bar{\zeta}\zeta > 0,$$

$$B_i^*(t)jB_i(t) - j = 0, \ |t| = 1.$$

2. Произвольная обратимая j-растягивающая аналитическая матрица функция $B(\zeta)$ допускает разложение (в.-в. ф.), где $A(\zeta)$ — резольвентная матрица соответствующей задачи [2].

Список литературы: 1. *Ефимов А. В., Потапов В. П.* J-растягивающие матрицы-функции и их роль в аналитической теории электрических цепей.—Успехи мат. наук, 1973, 33, вып. 1 (169), с. 65—130. 2. *Юдицкий П. М.* О восстановлении j-сжимающей аналитической матрицы функции по граничным значениям ее j-формы и связанная с этим задача «интерполяции».— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1984, вып. 44, с. 21—24.

Поступила в редколлегию 05.12.84