УДК 517.5

В. Э. КАЦНЕЛЬСОН

КОНТИНУАЛЬНЫЕ АНАЛОГИ ТЕОРЕМЫ ГАМБУРГЕРА — НЕВАНЛИННЫ И ОСНОВНЫЕ МАТРИЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА КЛАССИЧЕСКИХ ЗАДАЧ. 2

7*. 1°. Приведем формулировки теоремы Hamburger'а — Newanlinn'ы (в нужной нам форме) — теоремы $H - N_H$, и ее континуальных аналогов для каждой из задач P, $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{K}^0$, $\boldsymbol{K}^\infty$ — соответственно теорем $H - N_{\mathrm{P}}$, $H - N_{\mathrm{G}}$, $H - N_{\mathrm{W}}$, $H - N_{K^0}$, $H - N_{K^\infty}$. Эти теоремы имеют тауберов характер. Соответствующие абелевы утверждения нам не понадобятся: их доказательства гораздо проще, и проводятся с использованием тождества (B) из § 6.

Теорема $H - N_H$. *Пусть функция* $w(z)$ *класса* $(\boldsymbol{R})$ *и вещественная последовательность* $s_0, s_1, \ldots, s_{2n-1}$ *таковы, что хотя бы на луче* $\arg z = \pi/2$ *выполняется асимптотика*

$$z^{2n+1} w(z) + \sum_{0 \leqslant k \leqslant 2n-1} z^{2n-k} s_k = O(1) \quad (|z| \to \infty,\ \arg z = \pi/2).$$

Тогда функция $w(z)$ *представима в виде* (I_{R_1}), где мера $d\sigma(\lambda) \geqslant 0$ *удовлетворяет условию* $(\boldsymbol{h}_n)$ (см. § 1, п. 1°), *и для моментов* $s_k(\sigma)$ *этой меры* $s_k(\sigma) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^k d\sigma(\lambda)$ $(k = 0, 1, \ldots 2n)$ *выполня-*

---

* Рассматривается вторая часть работы, первая — изложена в [1]. Нумерация параграфов, пунктов и формул является продолжением нумерации в работе Кацнельсон В. Э. Континуальные аналоги теоремы Гамбургера — Неванлинны и основные матричные неравенства классических задач. 1. — Теория функций, функц. анализ и их прил., 1981, вып. 36.

ются равенства $s_k(\sigma) = s_k$, $(k = 0, 1, \ldots, 2n-1)$, $s_{2n}(\sigma) = -\lim\{z^{2n+1}\,w(z) + z^{2n}s_0 + \cdots + zs_{2n-1}\}$, *причем предел существует при* $|z| \to \infty$, $\delta < \arg z < \pi - \delta$, (*где* δ, $0 < \delta < \pi/2$ — *любое фиксированное*).

Теорема $H - N_P$. *Пусть для некоторой функции* $w(z)$ *класса* $(\boldsymbol{R})$ *и суммируемой на* $(0, L)$ *функции* $S(t)$, *такой, что* $\lim\limits_{t\to+0} \operatorname{Re} S(t) < \infty$, *хотя бы на луче* $\arg z = \pi/2$ *выполняется асимптотика* $e^{-iLz}w(z) - i\int\limits_0^L e^{-i(L-\xi)z}S(\xi)\,d\xi = O(e^{\varepsilon|z|})$ (As_P).

$(|z| \to \infty$, $\arg z = \pi/2$; $\varepsilon > 0$ — *любое фиксированное*).

Тогда функция $w(z)$ *представима в виде* (I_{R_1}), *где мера* $d\sigma(\lambda) \geqslant 0$ *удовлетворяет условию* $(\boldsymbol{r}_0)$, *и эта мера дает интегральное представление* (I_P) *функции* $S(t)$ *для почти всех* $t \in (0, L)$; (*таким образом,* $S(t)$ *почти всюду совпадает с непрерывной на* $[0, L]$ *функцией*).

Теорема $H - N_G$. *Пусть для некоторой функции* $w(z)$ *класса* $(\boldsymbol{R})$ *и суммируемой на* $(0, L)$ *функции* $S(t)$ *такой, что* $\lim\limits_{t\to+0} \operatorname{Re} S(t) = 0$, *хотя бы на луче* $\arg z = \pi/2$ *выполняется асимптотика* $e^{-iLz}w(z) + iz^2\int\limits_0^L e^{-i(L-\xi)z}S(\xi)\,d\xi = 0(e^{\varepsilon|z|})$ (As_G). $(|z| \to \infty$, $\arg z = \pi/2$; $\varepsilon > 0$ — *любое фиксированное*).

Тогда функция $w(z)$ *представима в виде* (I_R) *с* $\beta = 0$, *где* α — *вещественная константа,* $d\sigma(\lambda) \geqslant 0$ — *мера, удовлетворяющая условию* $(\boldsymbol{r}_2)$, *и эти* α *и* $d\sigma(\lambda)$ *дают интегральное представление* (I_G) *функции* $S(t)$ *для почти всех* $t \in (0, L)$ (*таким образом,* $S(t)$ *почти всюду совпадает с непрерывной на* $[0, L]$ *функцией*).

Теорема $H - N_W$. *Пусть для некоторой функции* $w(z)$ *класса* $(\boldsymbol{R})$ *и суммируемой по мере Лебега на* $(0, L)$ *вещественной функции* $S(t)$ *хотя бы на одном луче* $\arg z = \theta$, *где* $0 < \theta < \pi/2$, *имеет место асимптотика* $e^{Lz}w(z) + \int\limits_0^L e^{(L-\xi)z}S(\xi)\,d\xi = o(e^{\varepsilon|z|})$ (As_W).

$(|z| \to \infty$, $\arg z = \theta$; $\varepsilon > 0$ — *любое фиксированное*).

Тогда функция $w(z)$ *представима в виде* (I_{R_1}), *где мера* $d\sigma(\lambda) \geqslant 0$ *удовлетворяет условию* $(\boldsymbol{r}_1)$ *и условию**

$$\int\limits_0^\infty e^{t\lambda}d\sigma(\lambda) < \infty \quad (\forall t < L) \quad (\boldsymbol{D}^+_{(1,\,L)}),$$

и эта мера $d\sigma(\lambda)$ *дает интегральное представление* (I_W) *функции* $S(t)$ *для почти всех* $t \in (0, L)$. (*Таким образом,* $S(t)$ *совпадает с аналитической на* $(0, L)$ *функцией*).

Теорема $H - N_{K^0}$. *Пусть для некоторой функции* $w(z)$ *класса* $(\boldsymbol{R})$ *и суммируемой по мере Лебега на* $(0, L)$ *вещественной функ-*

---

* Убывание (*Decrease*) на положительной полуоси не медленнее типа L при порядке 1.

ции $S(t)$ *такой, что* $\overline{\lim\limits_{t\to+0}} S(t) < \infty$, *хотя бы на луче* $\arg z = \pi/2$ *выполняется асимптотика* $\cos L\sqrt{z} \cdot w(z) \int\limits_0^L \frac{\sin(L-\xi)\sqrt{z}}{\sqrt{z}} S(\xi)\,d\xi = O(e^{\varepsilon\sqrt{|z|}})$ (As_{K^0}). $(|z|\to\infty,\ \arg z = \pi/2;\ \varepsilon > 0$ — *любое фиксированное*).

Тогда функция $w(z)$ *представима в виде* (I_{R_1}), *где мера* $d\sigma(\lambda) \geqslant 0$ *удовлетворяет условию* $(\boldsymbol{r}_0)$ *и условию** $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{t\sqrt{|\lambda|}}\,d\sigma \times (\lambda) < \infty \quad (\forall t < L) \quad (\boldsymbol{D}^{-}_{(1/2,L)})$, *и эта мера* $d\sigma(\lambda)$ *дает интегральное представление* (I_{K^0}) *функции* $S(t)$ *для почти всех* $t \in (0, L)$. *Таким образом, почти всюду совпадает с непрерывной на* $[0, L)$ *функцией.*

Теорема $H - N_{K^\infty}$. *Пусть для некоторой функции* $w(z)$ *класса* $(\boldsymbol{R})$ *и суммируемой по мере Лебега на* $[0, L)$ *вещественной функции* $S(t)$ *такой, что* $\lim\limits_{t\to+0} S(t) = 0$, *хотя бы на луче* $\arg z = \pi/2$ *выполняется асимптотика* $\frac{\sin L\sqrt{z}}{\sqrt{z}} w(z) - \int\limits_0^L \cos(L-\xi) \times \sqrt{z}\, S(\xi)\,d\xi = O\left(e^{\varepsilon\sqrt{|z|}}\right)$ (As_{K^∞}). $(|z|\to\infty,\ \arg z = \pi/2;\ \varepsilon > 0$ — *любое фиксированное*).

Тогда функция $w(z)$ *представима в виде* (I_{R_1}), *где мера* $d\sigma(\lambda) \geqslant 0$ *удовлетворяет условиям* $(\boldsymbol{r}_1)$ *и* $(\boldsymbol{D}^{-}_{(1/2,L)})$, *и эта мера* $d\sigma(\lambda)$ *дает интегральное представление* (I_{K^∞}) *функции* $S(t)$ *для почти всех* $t \in (0, L)$. *Таким образом,* $S(t)$ *почти всюду совпадает с непрерывной на* $[0, L)$ *функцией.*

2°. Пусть λ вещественно, z невещественно, $z = r \cdot e^{i\varphi}$. Имеем $|\lambda - z| = |\lambda - r\cdot e^{i\varphi}| = |\lambda e^{i\varphi} - r|$, и значит $|\lambda - z| \geqslant |\operatorname{Im}(\lambda - r \times e^{i\varphi})| = r\cdot|\sin\varphi|$, $|\lambda - z| \geqslant |\operatorname{Im}(\lambda e^{i\varphi} - r)| = |\lambda|\cdot|\sin\varphi|$. Складывая два последних неравенства, получаем $2|\lambda - z| \geqslant (|\lambda| + |z|)\cdot|\sin\varphi|$, или

$$\left|\frac{1}{\lambda - z}\right| \leqslant \frac{2}{|\sin\varphi|}\cdot\frac{1}{|\lambda| + |z|} \tag{7.2.1.}$$

$$(-\infty < \lambda < \infty,\ z = |z|\cdot e^{i\varphi}).$$

Из (7.2.1.) вытекает, что

$$\left|\frac{1}{\lambda - z}\right| \leqslant \frac{2}{\sin\delta}\cdot\frac{1}{|\lambda| + 1} \tag{7.2.2.}$$

$$(-\infty < \lambda < \infty;\ |z| \geqslant 1,\ \delta < \arg z < \pi - \delta),$$

---

* Убывание на отрицательной полуоси не медленнее типа L при порядке 1/2.

и при каждом фиксированном $\lambda \in (-\infty, \infty)$ выполняется $\left|\frac{1}{\lambda - z}\right| = o(1)$, $(|z| \to \infty,\ \delta < \arg z < \pi - \delta)$, где δ, $0 < \delta < \pi/2$, любое фиксированное. Из теоремы Лебега о мажорированном предельном переходе под знаком интеграла ((7.2.2.) дает суммируемую мажоранту) следует

Лемма 7.1. *Если $d\tau(\lambda) \geqslant 0$ — мера, удовлетворяющая условию (r_1), то выполняется асимптотическое соотношение* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{\lambda - z}\right| \times$ $\times\, d\tau(\lambda) = o(1)$ $(|z| \to \infty,\ \delta < \arg z < \pi - \delta)$, *где* $\delta\,(0 < \delta < \pi/2)$ — *любое фиксированное.*

Из тождества

$$\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} = \frac{1 + \lambda z}{\lambda - z} \cdot \frac{1}{1 + \lambda^2} \tag{7.2.3.}$$

и (7.2.1.) следует неравенство

$$\left|\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}\right| \leqslant \frac{2}{|\sin \varphi|} \cdot \frac{1 + |\lambda| \cdot |z|}{|\lambda| + |z|} \cdot \frac{1}{1 + \lambda^2}$$
$$(-\infty < \lambda < \infty,\ z = |z| \cdot e^{i\varphi}). \tag{7.2.4.}$$

Из (7.2.4.) следует, что

$$\left|\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}\right| \leqslant |z| \cdot \frac{2}{\sin \delta} \cdot \frac{1}{1 + \lambda^2} \tag{7.2.5.}$$
$$(-\infty < \lambda < \infty;\ |z| \geqslant 1,\ \delta < \arg z < \pi - \delta),$$

и при каждом фиксированном $\lambda \in (-\infty, \infty)$ выполняется

$$\left|\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}\right| = o(|z|)\ (|z| \to \infty,\ \delta < \arg z < \pi - \delta).$$

Из теоремы Лебега о мажорированном предельном переходе под знаком интеграла следует ((7.2.5) дает суммируемую мажоранту).

Лемма 7.2. *Если $d\tau(\lambda) \geqslant 0$ — мера, удовлетворяющая условию (r_2), то выполняется асимптотическое соотношение*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}\right| d\tau(\lambda) = o(|z|),$$
$$(|z| \to \infty,\ \delta < \arg z < \pi - \delta),$$

где $\delta\,(0 < \delta < \pi/2)$ — любое фиксированное.

Левую часть (7.2.3) можно представить и в ином виде:

$$\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} = \left(\frac{1 + z^2}{\lambda - z} + z\right) \cdot \frac{1}{1 + \lambda^2}. \tag{7.2.6}$$

3°. Для доказательства теорем $H - N$ нам понадобятся оценки выражений вида

$$(u(t, \lambda) - u(t, z)) \cdot \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}\right)$$

(λ вещественное, z любое), где $u(t, \lambda)$ — из § 6.

Из (7.2.6) следует, что

$$\left|(u(t,\lambda)-u(t,z))\cdot\left(\frac{1}{\lambda-z}-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)\right|\leqslant\{(1+|z|^2\times$$
$$\times\left|\frac{u(t,\lambda)-u(t,z)}{\lambda-z}\right|+|z|\cdot(|u(t,\lambda)|+|u(t,z)|)\}\cdot\frac{1}{1+\lambda^2}. \quad (7.3.1)$$

Для любого $t>0$ имеем (по теореме о среднем)

$$\left|\frac{e^{-it\lambda}-e^{-itz}}{\lambda-z}\right|\leqslant t\cdot\max\{|e^{-itz}|,\ 1\}.$$

Отсюда и из (7.3.1) (при $u(t,\lambda)=e^{-it\lambda}$) следует неравенство

$$\left|(e^{-it\lambda}-e^{-itz})\cdot\left(\frac{1}{\lambda-z}-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)\right|\leqslant(1+t)\cdot(1+|z|^2)\times$$
$$\times\max\{1,\ |e^{-itz}|\}\cdot\frac{1}{1+\lambda^2}. \quad (7.3.2)$$

Это неравенство будет использовано при доказательстве теорем $H-N_P$ и $H-N_G$.

Так как (по теореме о среднем) $\left|\frac{e^{t\lambda}-e^{tz}}{(\lambda-z)}\right|\leqslant t\cdot\max\{|e^{tz}|,\ e^{t\lambda}\}$, то аналогично (7.3.2) получаем, что при любом вещественном λ и при любом z выполняется неравенство

$$\left|(e^{t\lambda}-e^{tz})\cdot\left(\frac{1}{\lambda-z}-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)\right|\leqslant(1+t)\cdot(1+|z|^2)\cdot(1+|e^{tz}|)\times$$
$$\times(1+e^{t\lambda})\cdot\frac{1}{1+\lambda^2}. \quad (7.3.3)$$

Это неравенство понадобится при доказательстве теоремы W. Далее имеем

$$\frac{\cos t\sqrt{\lambda}-\cos t\sqrt{z}}{\lambda-z}=-\frac{t^2}{2}\cdot\frac{\sin t\dfrac{\sqrt{\lambda}-\sqrt{z}}{2}}{t\dfrac{\sqrt{\lambda}-\sqrt{z}}{2}}\cdot\frac{\sin t\dfrac{\sqrt{\lambda}+\sqrt{z}}{2}}{t\dfrac{\sqrt{\lambda}+\sqrt{z}}{2}},$$

а так как $|\zeta^{-1}\sin\zeta|\leqslant\exp\{|\operatorname{Im}\zeta|\}$*, то $\left|\frac{\cos t\sqrt{\lambda}-\cos t\sqrt{z}}{\lambda-z}\right|\leqslant\frac{t^2}{2}\times$ $\exp\left\{\frac{t}{2}\cdot|\operatorname{Im}(\sqrt{\lambda}-\sqrt{z})|+\frac{t}{2}|\operatorname{Im}(\sqrt{\lambda}+\sqrt{z})|\right\}=\frac{t^2}{2}\cdot\exp\times$ $\times\{t\max(|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|,\ |\operatorname{Im}\sqrt{z}|)\}\leqslant\frac{t^2}{2}\cdot\exp\{t|\operatorname{Im}\sqrt{z}|\}\cdot\exp\{t|\operatorname{Im}\times$ $\times\sqrt{\lambda}|\}$. Так как $|\cos t\sqrt{\zeta}|\leqslant\exp\{t|\operatorname{Im}\sqrt{\zeta}|\}$, то с учетом (7.3.1) получаем $\left|(\cos t\sqrt{\lambda}-\cos t\sqrt{z})\left(\frac{1}{\lambda-z}-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)\right|\leqslant\Big(1+$ $+\frac{t^2}{2}\Big)\cdot(1+|z|^2)\cdot\exp\{t|\operatorname{Im}\sqrt{z}|\}\cdot\exp\{t|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|\}\cdot(1+\lambda^2)^{-1}.$

(7.3.4)

Это неравенство понадобится при доказательстве теоремы $H-N_{K^0}$.

* Оценка типа Фрагмена — Линделефа для целой функции экспоненциального типа, ограниченной на вещественной оси.

Пусть $0 \leqslant \tau \leqslant t$. Из (7.2.4) следует неравенство

$$\left|(\cos\tau\sqrt{\lambda}-\cos\tau\sqrt{z})\cdot\left(\frac{1}{\lambda-z}-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)\right| \leqslant \left(1+\frac{\tau^2}{2}\right)\cdot(1+|z|^2)\times$$
$$\times\exp\{t|\operatorname{Im}\sqrt{z}|\}\cdot\exp\{t|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|\}\cdot(1+\lambda^2)^{-1}.$$

Интегрируя последнее неравенство по τ в пределах от нуля до t, получаем

$$\left|\left(\frac{\sin t\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}-\frac{\sin t\sqrt{z}}{\sqrt{z}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\lambda-z}-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)\right| \leqslant t(1+t^2/6)\cdot(1+|z|^2)\times$$
$$\times\exp\{t|\operatorname{Im}\sqrt{z}|\}\cdot\exp\{t|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|\}\cdot(1+\lambda^2)^{-1}. \qquad (7.3.5)$$

Это неравенство нужно для доказательства теоремы $H - N_{K\infty}$.

4^0. Докажем теорему $H - N_P$.

Пусть функция $w(z)$ класса $(\boldsymbol{R})$ и суммируемая на $(0, L)$ функция $S(\xi)$, $\varlimsup\limits_{\xi\to+0}\operatorname{Re}S(\xi)<\infty$ таковы, что для них на луче $\arg z = \pi/2$ при $|z|\to\infty$ выполняется асимптотика (As_P). Пусть t, $0\leqslant t<L$ — любое. Умножая соотношение (As_P) на $\exp\{-i(t-L)\times z\}$, получаем $e^{-itz}w(z)-i\int\limits_0^t e^{-i(t-\xi)z}S(\xi)\,d\xi - i\int\limits_t^L e^{-i(t-\xi)z}S(\xi)\times d\xi = O(e^{(t-L+\xi)|z|})$ $(|z|\to\infty,\ \arg z=\pi/2)$, и так как $S(\xi)$ суммируема на $(0, L)$, то $\int\limits_t^L e^{(t-\xi)y}S(\xi)\,d\xi\to 0$ $(y\to+\infty)$. Значит, для любого $t\in[0, L)$ выполняется асимптотическое соотношение $e^{-itz}\times$

$$\times\,w(z)-i\int\limits_0^t e^{-i(t-\xi)z}S(\xi)\,d\xi = o(1)\quad(|z|\to\infty,\ \arg z=\pi/2. \qquad (7.4.1)$$

Как функция класса $(\boldsymbol{R})$, функция $w(z)$ допускает интегральное представление (I_R) с некоторой мерой $d\sigma(\lambda)\geqslant 0$, удовлетворяющей условию $\boldsymbol{r}_2)$, и константами α и β. Мы покажем, что мера $d\sigma(\lambda)$ удовлетворяет условию $(\boldsymbol{r}_0)$, а α и β равны нулю.

Для $t\in[0, \mathrm{L})$ рассмотрим функцию $f_t(z)$ комплексного переменного z:

$$f_t(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(e^{-it\lambda}-e^{-itz})\cdot\left(\frac{1}{\lambda-z}-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)d\sigma(\lambda)-e^{-itz}(\alpha+\beta z)+i\times$$
$$\times\int\limits_0^t e^{-i(t-\xi)z}S(\xi)\,d\xi. \qquad (7.4.2)$$

Из (7. 3. 2) следует, что $\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}(e^{-it\lambda}-e^{-itz})\cdot\left(\frac{1}{\lambda-z}-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)d\sigma(\lambda)\right|\leqslant$

$$\leqslant(1+t)\cdot(1+|z|^2)\cdot\max\{1,|e^{-itz}|\}\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(\lambda)}{1+\lambda^2}\cdot \qquad (7.4.3.)$$

и что выражение под знаком абсолютной величины в левой части этого неравенства является целой функцией переменного z.

Так как $\left|\int_0^t e^{-i(t-\xi)z} S(\xi) d\xi\right| \leqslant \left(\int_0^t |S(\xi)| d\xi\right) \cdot \max(1, |e^{-itz}|)$,

то из (7.4.3) и выражения (7.4.2) для $f_t(z)$ получаем, что $f_t(z)$ — целая функция переменного z, допускающая оценку $|f_t(z)| \leqslant C \cdot (1+|z|^2) \times \max(1, |e^{-itz}|)$ $(\forall z)$ **(7.4.4)**, где $C<\infty$—величина, не зависящая от z.

Представляя $f_t(z)$ в отличном от (7.4.3) виде:

$$f_t(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda} \cdot \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right) d\sigma(\lambda) - \{e^{-itz} w(z) - i \times$$

$$\times \int_0^t e^{-i(t-\xi)z} S(\xi)\, d\xi\} \qquad (7.4.5)$$

и оценивая интеграл справа по лемме 7.2, а слагаемое в фигурных скобках согласно (7.4.1), получаем, что $f_t(z) = O(1)$, $(|z| \to \infty,\ \arg z = \pi/2)$ **(7.4.6)**.

Воспользовавшись теоремой Фрагмена-Линделефа, получим, что целая функция $f_t(z)$, удовлетворяющая (7.4.4) и (7.4.6), является константой относительно z (возможно зависящей от t). Значит, $df_t/dz \equiv 0$. Приравняем к нулю df_t/dz при $z=0$, дифференцируя в (7.4.2) под знаком интеграла, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{\frac{1-e^{-it\lambda}}{\lambda^2} - it\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)\right\} d\sigma(\lambda) - i\alpha t + \beta =$$

$$= \int_0^t (t-\xi) S(\xi) d\xi. \qquad (7.4.7)$$

Значит, $\int_0^t (t-\xi) \operatorname{Re} S(\xi) d\xi = \beta + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos t\lambda}{\lambda^2} d\sigma(\lambda)\ (0 \leqslant t < L)$. (7.4.8)

Полагая в (7.4.8) $t=0$, имеем $\beta = 0$. Разделим в (7.4.8) на t^2:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\lambda t/2)}{(\lambda t/2)^2} d\sigma(\lambda) = \frac{2}{t}\int_0^t (1-\xi/t) \operatorname{Re} S(\xi) d\xi,$$

устремляя, $t \to +0$, по теореме Фату имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma(\lambda) \leqslant \varliminf_{t\to+0} \frac{2}{t}\int_0^t (1-\xi/t) \operatorname{Re} S(\xi)\, d\xi \leqslant \varlimsup_{t\to+0} \operatorname{Re} S(t) < \infty.$$

Значит, мера $d\sigma(\lambda)$ удовлетворяет условию (r_0).

Теперь законно дифференцирование в (7. 4. 7) по t под знаком интеграла в левой части:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1-e^{-it\lambda}}{i\lambda}+\frac{1}{1+\lambda^2}\right)d\sigma(\lambda)-i\alpha=\int_0^t S(\xi)\,b\xi.$$
$$(0<t<L)$$

Устремляя здесь $t\to+0$, получаем $\alpha=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda}{1+\lambda^2}d\sigma(\lambda)$, и значит, $w(z)$ допускает представление (I_{R_1}) с мерой $d\sigma(\lambda)$. Дефференцируя еще раз по t, имеем $S(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-it\lambda}d\sigma(\lambda)$ (для почти всех $t\in(0,\ L)$).

Теорема $H-N_P$ доказана.

5°. Теорема $H-N_G$ доказывается аналогично.

Пусть функция $w(z)$ класса $(\boldsymbol{R})$ и суммируемая на $(0,\ L)$ функция $S(\xi)$, $\operatorname{Re}S(\xi)\to0$ при $\xi\to0$ таковы, что на луче $\arg z=\pi/2$ для них выполняется асимптотика (As_G). Аналогично тому, как установлено (7. 4. 1), можно показать, что

$$e^{-itz}w(z)+iz^2\int_0^t e^{-i(t-\xi)}S(\xi)\,d\xi=0(|z|^2) \qquad \textbf{(7.5.1)}$$
$$(|z|\to\infty;\ \arg z=\pi/2).$$

Рассмотрим функцию

$$f_t(z)=\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-it\lambda}-e^{-itz})\cdot\left(\frac{1}{\lambda-z}-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)d\sigma(\lambda)-e^{-itz}(\alpha+\beta z)-$$
$$-iz^2\int_0^t e^{-i(t-\xi)z}S(\xi)\,d\xi, \qquad (7.5.2)$$

где $d\sigma(\lambda)$, α, β—те, которые участвуют в представлении (I_R) функции $w(z)$ класса $(\boldsymbol{R})$. Так же, как и в п. 4°, устанавливается неравенство $|f_t(z)|\leqslant C\cdot(1+|z|^2)\cdot\max\{1,|e^{-itz}|\}$ $(\forall z)$. **(7.5.3).** Из (7. 5. 2) и (7. 5. 1) так же, как и в п. 4°, следует, что $|f_t(z)|=0(|z^2|)$, $(|z|\to\infty,\ \arg z=\pi/2)$. **(7.5.4)**

Используя теорему Фрагмена-Линделефа, из (7.5.3.) и (7.5.4) получаем, что $f_t(z)$ — линейная функция переменного z (коэффициенты могут зависеть от t). Значит, $d^2f_t/dz^2=0$. Приравняем к нулю d^2f_t/dz^2 при $z=0$, дифференцируя (7. 5. 2) под знаком интеграла:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{e^{-it\lambda}-1}{i\lambda^3}+\frac{t}{\lambda^2}-\frac{t^2}{i}\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)\right\}d\sigma(\lambda)-i\,\alpha t^2/2+\beta t=$$
$$=\int_0^t S(\xi)\,d\xi,\ (0\leqslant t<L). \qquad (7.5.5)$$

Разделим на t и возьмем вещественную часть:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2}\left(1-\frac{\sin t\lambda}{t\lambda}\right) d\sigma(\lambda)+\beta=\frac{1}{t}\int_0^t \operatorname{Re} S(\xi)\, d\xi, \qquad (7.5.6)$$

и так как $\operatorname{Re} S(\xi) \to 0$ при $\xi \to +0$, то устремляя в (7.5.6) t к нулю, получаем $\beta=0$.

Дифференцируя (7.5.5) по t, получаем, что $S(t)=-i\alpha t+$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1-it\lambda-e^{-it\lambda}}{\lambda^2}+it\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right\} d\sigma(\lambda), \quad 0<t<L.$$

Теорема $H-N_G$ доказана.

6°. Доказательство теорем $H-N_W$, $H-N_K{}^{\circ}$, $H-N_K{}^{\infty}$ — более трудное, чем доказательство теорем $H-N_P$, $H-N_G$. Основная трудность заключается в извлечении из асимптотического соотношения (As) информации об экспоненциально быстром убывании меры $d\sigma(\lambda)$, участвующей в представлении функции $w(z)$ класса $(\boldsymbol{R})$.

В следующем параграфе мы покажем, что из асимптотики (As_W) следует условие $\int_0^{\infty} e^{t\lambda}\, d\sigma(\lambda)<\infty$ $(\forall t<L)$ $(\boldsymbol{D}^{+}_{(1,L)})$, а из асимптотики $(As_K{}^0)$ или (As_{K^∞}) — условие

$$\int_{-\infty}^{0} e^{t\sqrt{|\lambda|}}\, d\sigma(\lambda)<\infty \quad (\forall t<L) \quad (\boldsymbol{D}^{-}_{(1/2,\, L)}),$$

а сейчас, считая, что условия $(\boldsymbol{D}^{+}_{(1,\, L)})$ и $(\boldsymbol{D}^{-}_{(1/2,\, L)})$ имеют место, приступим к доказательству теорем $H-N_W$ и $H-N_K$.

7°. Если уже известно, что выполняется условие $(\boldsymbol{D}^{+}_{(1,\, L)})$, то доказательство теоремы $H-N_W$ завершается рассуждениями, сходными при доказательстве теорем $H-N_P$ и $H-N_G$.

Пусть для некоторой функции $w(z)$ класса $(\boldsymbol{R})$ и для суммируемой на $(0, L)$ вещественной $S(\xi)$ на луче $\arg z=\theta$ (а ввиду вещественности S и на луче $\arg z=-\theta$) при некотором θ, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ выполняется асимптотическое соотношение (As_W). Умножая это соотношение на $e^{(t-L)z}$, получаем, что при любом $t \in [0, L)$ выполняется асимптотическое соотношение $e^{tz}w(z)+\int_0^t e^{(t-\xi)z} S(\xi) \times$
$\times\, d\xi=0(1)\,(|z| \to \infty,\ \arg z=\pm\theta)$. (7.7.1)

Пусть $d\sigma(\lambda)$-мера, α и β-константы, участвующие в представлении (I_R) функции $w(z)$ класса $(\boldsymbol{R})$. Мера $d\sigma(\lambda)$ из представления (I_R) удовлетворяет условию $(\boldsymbol{r}_2)$, и если выполняется условие $(\boldsymbol{D}^{+}_{(1,\, L)})$, то мера $d\tau(\lambda)=(1+e^{t\lambda})\, d\sigma(\lambda)$ удовлетворяет условию $(\boldsymbol{r}_2)$ при $t \in [0, L)$.

Пусть $t \in [0, L)$. Рассмотрим функцию

$$f_t(z) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{t\lambda} - e^{tz}) \cdot \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right) d\sigma(\lambda) - e^{tz}(\alpha + \beta z) -$$

$$- \int_0^t e^{(t-\xi)z} S(\xi)\, d\xi. \qquad (7.7.2)$$

Из (7.3.3) видно, что интеграл в правой части (7.7.2) сходится по z абсолютно и равномерно на каждом компакте. Поэтому $f_t(z)$ — целая функция, удовлетворяющая неравенству $|f_t(z)| \leqslant C \cdot (1 + |z|^2) \times \times (1 + |e^{tz}|)$ $(\forall z)$, **(7.7.3)** и производная по z функции $f_t(z)$ может быть получена дифференцированием в (7.7.2) под знаком интеграла. Представим $f_t(z)$ в виде

$$f_t(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right) e^{t\lambda} d\sigma(\lambda) - \{e^{tz} w(z) +$$

$$+ \int_0^t e^{(t-\xi)z} S(\xi)\, d\xi\}.$$

Мера $e^{t\lambda} d\sigma(\lambda)$ при $t \in [0, L)$ удовлетворяет условию $(\boldsymbol{r}_2)$, и, значит интеграл в правой части последнего равенства можно оценить по лемме 7.2. Слагаемое же в фигурных скобках оценивается согласно (7.7.1). Таким образом, функция $f_t(z)$ на лучах $\arg z = \pm\theta$ имеет следующее асимптотическое поведение: $|f_t(z)| = o(|z|)$, $(|z| \to \infty,\ \arg z = \pm\theta)$. (7.7.4)

Используя теорему Фрагмена-Линделефа, из (7.7.3) и (7.7.4) делаем заключение, что целая функция $f_t(z)$-константа по z (возможно зависящая от t). Значит, $df_t/dz \equiv 0$. Дифференцируя в (7.7.2) по z под знаком интеграла, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{\frac{e^{t\lambda} - 1 - t\lambda}{\lambda^2} + t\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right\} d\sigma(\lambda) - \alpha t - \beta =$$

$$= \int_0^t (t-\xi) S(\xi)\, d\xi \quad (0 \leqslant t < L). \qquad \mathbf{(7.7.5)}$$

Полагая в (7.7.5) $t = 0$, получаем, что $\beta = 0$. Продифференцируем (7.7.5) по t. Формальное дифференцирование под знаком интеграла дает $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{t\lambda} - 1}{\lambda} + \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right) d\sigma(\lambda) - \alpha = \int_0^t S(\xi)\, d\xi$ **(7.7.6)**

Так как $\displaystyle\left|\frac{e^{t\lambda} - 1}{\lambda^2} + \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right| \leqslant \frac{e^{\lambda t}}{|\lambda|} + \frac{1}{1+\lambda^2} \ (|\lambda| \geqslant 1),$ **(7.7.7)** то интеграл в левой части (7.7.6) сходится равномерно по t на каждом промежутке $[t_1, t_2] \subset (0, L)$, и, значит, дифференцирование по t в (7.7.5) под знаком интеграла законно, если $t \in (0, L)$.

Дифференцируем (7.7.6) под знаком интеграла: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{t\lambda} d\sigma(\lambda) = S(t)$,

$(0 < t < L)$. (7.7.8)

Интегрируя (7.7.8) по t, по теореме Фубини получаем $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{L\lambda}-1}{\lambda} \times$

$d\sigma(\lambda) = \int\limits_0^L S(t)\, dt$, и так как S предполагалась суммируемой на

$[0, L)$, то интеграл в левой части здесь конечен (подынтегральная функция положительна). Из конечности этого интеграла следует, что мера $d\sigma(\lambda)$ удовлетворяет условию $(\boldsymbol{r}_1)$. Наконец, зная уже, что $d\sigma(\lambda)$ удовлетворяет условию $(\boldsymbol{r}_1^-)$, устремим в (7.7.6) t к $+0$, переходя к пределу под знаком интеграла. Получаем, что

$a = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{1+\lambda^2} d\sigma(\lambda)$, и значит, функция $\omega(z)$ представима в виде (I_{R1}).

Переход к пределу под знаком интеграла теперь обоснован. Если известно, что мера $d\sigma(\lambda)$ удовлетворяет условию $(\boldsymbol{r}_1^-)$, что в предположении выполнимости условия $(\boldsymbol{D}^+_{(1,L)})$ из (7.7.7) следует, что интеграл в (7.7.6) слева сходится равномерно по t на $[0, t_0]$ при любом фиксированном $t_0 < L$.

Для завершения доказательства теоремы $H - N_W$ осталось показать, что из асимптотики (As_W) следует условие $(\boldsymbol{D}^+_{(1,L)})$.

8°. Если уже известно, что выполняется условие $(\boldsymbol{D}_{(1/2,L)})$, то доказательство теоремы $H - N_K{}^0$ завершается посредством рассуждений, уже встречавшихся при доказательствах теорем $H - N_P$, $H - N_W$.

Пусть для функции $\omega(z)$ класса $(\boldsymbol{R})$ и для суммируемой на $(0, L)$ вещественной $S(t)$ при $|z| \to \infty$, $\arg z = \pi/2$ (а вследствие вещественности S и при $|z| \to \infty$, $\arg z = -\pi/2$) выполняется асимптотика $(As_K{}^0)$. Умножая соотношение $As(_K{}^0)$ на $\exp\{\mp i(t-L)\sqrt{z}\}$ $(-\pi < \arg z < \pi, \arg\sqrt{z} = 0$ при $\arg z = 0)$, получаем, что при каждом $t \in [0, L)$ выполняется асимптотическое соотношение

$$\cos t\sqrt{z} \cdot \omega(z) - \int\limits_0^t \frac{\sin(t-\xi)\sqrt{z}}{\sqrt{z}} S(\xi)\, d\xi = o(|z|^{-1/2}) \quad (|z| \to \infty,$$
$$\arg z = \pm\pi/2).$$

Как функция класса $(\boldsymbol{R})$, функция $\omega(z)$ допускает представление (I_R) с мерой $d\sigma(\lambda)$, удовлетворяющей условию $(\boldsymbol{r}_2)$, вещественным α и неотрицательным β. Пусть уже известно, что выполняется условие $(D^{-}_{(1/2,L)})$. Так как мера $d\sigma(\lambda)$ удовлетворяет условию (r_2), то мера $(\exp\{t\cdot|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|\})(1+\lambda^2)^{-1}$ удовлетворяет условию (r_0). Из (7.3.4) теперь следует, что интеграл

$$g_t(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\cos t\sqrt{\lambda}-\cos t\sqrt{z})\cdot\left(\frac{1}{\lambda-z}-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)d\sigma(\lambda)$$

$$(0\leqslant t<L)$$

сходится по z абсолютно и равномерно на каждом компакте и является целой функцией переменного z, допускающей оценку

$$|g_t(z)|\leqslant C(t)\cdot(1+|z|^2)\cdot\exp\{t|\operatorname{Im}\sqrt{z}|\}\,(\forall z;\ C(t)<\infty\ t\in[0,L)).\quad(7.8.2)$$

Из (7.3.4) также следует, что выражение для dg_t/dz можно получить, дифференцируя по z под знаком интеграла.

Пусть $t\in[0,L)$. Введем в рассмотрение функцию

$$f_t(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\cos t\sqrt{\lambda}-\cos t\sqrt{z})\cdot\left(\frac{1}{\lambda-z}-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)d\sigma(\lambda)-(\alpha+\beta z)\times$$
$$\times\cos t\sqrt{z}+\int\limits_0^t\frac{\sin(t-\xi)\sqrt{z}}{\sqrt{z}}S(\xi)\,d\xi.\qquad(7.8.3)$$

Так как $[\cos t\sqrt{z}]\leqslant\exp\{t[\operatorname{Im}\sqrt{z}|\}$, $|\sin(t-\xi)\sqrt{z}|\leqslant\exp\{t|\operatorname{Im}\times\times\sqrt{z}|\}$, то из (7.8.2) следует, что $f_t(z)$ — целая функция переменного z, допускающая при каждом $t\in[0,L)$ оценку сверху вида $|f_t(z)|\leqslant C(1+|z|^2)\times\exp\{t|\operatorname{Im}\sqrt{z}|\}$, $(\forall z)$ (7.8.4), где $C=C(t)<\infty$ — величина, не зависящая от z.

Представим теперь $f_t(z)$ в виде

$$f_t(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda-z}-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)\cos t\sqrt{\lambda}\,d\sigma(\lambda)-$$
$$-\left\{\cos t\sqrt{z}\cdot w(z)-\int\limits_0^t\frac{\sin(t-\xi)\sqrt{z}}{\sqrt{z}}S(\xi)\,d\xi\right\}.\qquad(7.8.5)$$

Так как $|\cos t\sqrt{\lambda}|\leqslant\exp\{t|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|\}$, а мера $d\tau(\lambda)=\exp\{t|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|\}\,d\sigma(\lambda)$ при $t\in[0,L)$ удовлетворяет условию (r_2), то, согласно лемме 7.2, первое слагаемое в правой части (7.8.5) есть $o(|z|)$ при $|z|\to\infty$, $\arg z=\pi/2$. Согласно (7.8.1) второе слагаемое в правой части (7.8.5) есть $o(|z|)$ при $|z|\to\infty$, $\arg z=\pi/2$. Поэтому для $f_t(z)$ при $t\in[0,L)$ выполняется асимптотическое соотношение $f_t(z)=o(|z|)$, $(|z|\to\infty,\ \arg z=\pi/2)$ (7. 8. 6).

Используя теорему Фрагмена-Линделефа, из (7.8.4) и (7.8.6) делаем заключение, что целая функция $f_t(z)$ при $t\in[0,L)$ — константа по z (возможно зависящая от t) и, значит, $df_t/dz\equiv0$.

Приравняем к нулю df_t/dz при $z=0$, дифференцируем в (7.8.3) по z под знаком интеграла:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\cos t\sqrt{\lambda}-1}{\lambda^2}+\frac{t^2}{2}\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)\right\}d\sigma(\lambda)+$$

$$+\alpha\frac{t^2}{2}-\beta=\int_0^t\frac{(t-\xi)^3}{3!}S(\xi)\,d\xi. \qquad (7.8.7)$$

Полагая $t=0$, получаем, что $\beta=0$. Разделим на $t^2/2$, имеем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{4\sin^2(t\sqrt{\lambda}/2)}{t^2\lambda^2}-\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)\right\}d\sigma(\lambda)-\alpha=$$

$$=\frac{t}{3}\int_0^t(1-\xi/t)^3S(\xi)\,d\xi. \qquad (7.8.8)$$

При $t\to+0$, так как $S(t)$ суммируема на $(0,L)$, то предел правой части равен нулю. Так как $|(4\sin^2(t\sqrt{\lambda}/2)\times(t\lambda)^{-2}|\leqslant\leqslant|\lambda|^{-1}\cdot\exp\{t\sqrt{|\lambda|}\}$, $(\lambda\leqslant 0)$ (это неравенство получается из неравенства $|\zeta^{-1}\sin\zeta|\leqslant\exp\{|\operatorname{Im}\zeta|\}$, то, вследствие условия $(\boldsymbol{D}^-_{(1/2,\,L)})$, интеграл $\int_{-\infty}^{-1}\frac{4\sin^2(t\sqrt{\lambda}/2)}{t^2\lambda^2}d\sigma(\lambda)$ ограничен при $t\to+0$. Так как мера $d\sigma(\lambda)$ удовлетворяет условию $(\boldsymbol{r}_2)$, то имеем $\int_{|\lambda|\geqslant 1}\left|\frac{1}{\lambda}-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right|d\sigma(\lambda)<\infty$.

Поэтому интеграл $\int_1^{\infty}\frac{4\sin^2(t\sqrt{\lambda}/2)}{t^2\lambda^2}d\sigma(\lambda)$ ограничен при $t\to+0$, и так как подынтегральная функция здесь неотрицательна и стремится к единице при $t\to+0$, то по теореме Фату выполняется $\int_1^{\infty}\frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda}<\infty$. Таким образом, мера $d\sigma(\lambda)$ удовлетворяет условию $(\boldsymbol{r}_1^+)$.

Продифференцируем теперь (7.8.7) по t дважды. Формальное дифференцирование по t в первый раз дает

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{-\frac{\sin t\sqrt{\lambda}}{\lambda^{3/2}}+t\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)\right\}d\sigma(\lambda)+dt=$$

$$=\int_0^t\frac{(t-\xi)^2}{2}S(\xi)\,d\xi,$$

во второй раз

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1-\cos t\sqrt{\lambda}}{\lambda}-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right\}d\sigma(\lambda)+\alpha=$$

$$=\int_0^t (t-\xi)S(\xi)\,d\xi. \tag{7.8.10}$$

Формальное дифференцирование оправдано, так как из оценки

$$\left|\frac{\sin t\sqrt{\lambda}}{\lambda^{3/2}}\right|\leqslant t\cdot|\lambda|^{-1}\cdot\exp\{t\cdot|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|\},$$

условий $(\boldsymbol{D}^-_{(1/2,\ L)})$ и $(\boldsymbol{r}_1^+)$ следует, что интеграл в левой части (7.8.9) сходится равномерно по t на каждом промежутке $[0,\ t_0]$, если $t_0<L$. Аналогично интеграл в левой части (7.8.10) сходится равномерно по t на каждом промежутке $[0, t_0]$, если $t_0<L$. Устремляя в (7.8.10) t к $+0$, получаем, что

$$\alpha=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\,d\sigma(\lambda).$$

Таким образом, функция $\omega(z)$ допускает представление (I_{R_1}), где мера $d\sigma(\lambda)$ удовлетворяет условию $(\boldsymbol{r}_1)$.

Поделив теперь (7.8.10) на $t^2/2$, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4\sin^2(t\sqrt{\lambda}/2)}{t^2\lambda^2}\,d\sigma(\lambda)=\frac{2}{t}\int_0^t(1-\xi/t)S(\xi)\,d\xi. \tag{7.8.11}$$

Перейдем теперь в (7.8.11) к пределу при $t\to+0$. Функция под интегралом слева неотрицательна и стремится к единице при $t\to 0$. По теореме Фату

$$\int_{-\infty}^{\infty}d\sigma(\lambda)\leqslant\varliminf_{t\to+0}\frac{2}{t}\int_0^t(1-\xi/t)S(\xi)\,d\xi\leqslant\varlimsup_{t\to+0}S(t)<\infty.$$

Таким образом, мера $d\sigma(\lambda)$ удовлетворяет условию $(\boldsymbol{r}_0)$.

Продифференцируем теперь (7.8.10) по t два раза, причем так как мера $d\sigma(\lambda)$ удовлетворяет условиям $(\boldsymbol{r}_0)$ и $(\boldsymbol{D}^-_{(1/2,\ L)})$, то законно дифференцирование по t под знаком интеграла слева.

Получим $S(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\cos t\sqrt{\lambda}\,d\sigma(\lambda)\leftrightarrow$ (почти при всех $t\in(0,\ L)$).

Для завершения доказательства теоремы $H-N_{K^0}$ осталось показать, что из асимптотики (As_{K_0}) следует условие $(\boldsymbol{D}^-_{(1/2,\ L)})$.

9°. Доказательство теоремы $H-N_{K^\infty}$ проводится аналогично. Пусть для функции $\omega(z)$ класса $(\boldsymbol{R})$ и для суммируемой на $(0,\ L)$ вещественной $S(t)$ на луче $\arg z=\pi/2$ (а вследствие вещественности S и при $\arg z=-\pi/2$) выполняется асимптотическое соотношение (As_{K^∞}). Как и ранее, при **каждом** $t \in [0, L)$ выполняется асимптотическое соотношение

$$\frac{\sin t\sqrt{z}}{\sqrt{z}}\,w(z) - \int_0^t \cos(t-\xi)\sqrt{z}\,S(\xi)\,d\xi =$$

$$= O(1),\ (|z|) \to \infty,\ \arg z = \pm\pi/2). \tag{7.9.1}$$

Как функция класса $(\boldsymbol{R})$, $w(z)$ допускает представление (I_{R}) с мерой $d\sigma(\lambda)$, удовлетворяющей условию $(\boldsymbol{r}_2)$, и константами α, β. Пусть уже известно, что для этой меры выполняется условие $(\boldsymbol{D}^-{}_{(1/2,\ L)})$. Как и в п. 8°, убеждаемся с помощью (7.3.5), что функция $f_t(z)$, определяемая при $t \in [0, L)$ формулой

$$f_t(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin t\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\sin t\sqrt{z}}{\sqrt{z}}\right)\left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)\times$$

$$\times\, d\sigma(\lambda) - (\alpha + \beta z)\frac{\sin t\sqrt{z}}{\sqrt{z}} + \int_0^t \cos(t-\xi)\sqrt{z}\,S(\xi)\,d\xi, \tag{7.9.2}$$

является целой, допускающей при каждом $t \in [0, L)$ оценку $|f_t(z)| \leqslant C\cdot(1+|z|^2)\cdot\exp\{t\,|\operatorname{Im}\sqrt{z}|\}\ (\forall z)$ **(7.9.3)**. ($C = C(t) < \infty$ — не зависит от z). Из (7.9.1) следует, что $|f_t(z)|) = o(|z|)$, $(|z| \to \infty$, $\arg z = \pm\pi/2)$ **(7.9.4)**. Как и ранее, с помощью теоремы Фрагмена — Линделефа из (7.9.3) и (7.9.4) заключаем, что $df_t/dz \equiv 0$. Приравняем к нулю df_t/dz при $z = 0$, дифференцируя (7.9.2) по z под знаком интеграла, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left(\frac{\sin t\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} - t\right)\cdot\frac{1}{\lambda^2} + \frac{t^3}{6}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)\right\}d\sigma(\lambda) +$$

$$+\,\alpha\frac{t^3}{3} - \beta t = \int_0^t \frac{(t-\xi)^2}{2}S(\xi)\,d\xi\quad(0 \leqslant t < L). \tag{7.9.5}$$

Продифференцируем равенство (7. 9. 5) по t:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\cos t\sqrt{\lambda} - 1}{\lambda^2} + \frac{t^2}{2}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)\right\}d\sigma(\lambda) +$$

$$+\,\frac{\alpha t^2}{2} - \beta = \int_0^t (t-\xi)\,S(\xi)\,d\xi\qquad(0 \leqslant t < L). \tag{7.9.6}$$

Из (7.9.6) и условия $(\boldsymbol{D}^-{}_{(1/2,\ L)})$ следует, что интеграл в (7.9.6) сходится равномерно по t в каждом промежутке $[0, t_0)$, если $t_0 < L$, так что дифференцирование законно, и (7.9.6) справедливо при $t \in [0, L)$. Полагая в (7.9.6) $t=0$, получаем $\beta=0$. Поделим теперь (7.9.6) на $t^2/2$ и устремим t к $+0$. Равенство (7.9.6) имеет вид, сходный с (7.8.7). Рассуждая так же, как и в п. 8°, получим, что $\alpha=0$ и что мера $d\sigma(\lambda)$ удовлетворяет условию $(\boldsymbol{r}_1^+)$. При выполнении условий $(\boldsymbol{r}_1^+)$ и $(\boldsymbol{D}^-{}_{(1/2,\, L)})$ можно дифференцировать дважды по t левую часть равенства (7.9.6) под знаком интеграла. Дифференцируя, получаем $S(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos t\sqrt{\lambda}}{\lambda}\, d\sigma(\lambda)$ для почти всех $t \in [0, L)$.

Остальные утверждения теоремы $H - N_{K^\infty}$ доказываются так же, как в п. 8° доказываются аналогичные утверждения теоремы $H - N_{K^0}$.

Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что из асимптотики (As_{K^∞}) следует условие $(\boldsymbol{D}^-_{1/2,\, L})$.

10°. Приведем еще доказательство собственно теоремы Гамбургера-Неванлинны — теоремы $H - N_{\text{H}}$. Мы будем проводить доказательство, стремясь к возможно большей аналогии с доказательствами континуальных аналогов этой теоремы (это стремление к единообразию приведет к усложнению рассуждений).

Пусть для функции $w(z)$ класса $(\boldsymbol{R})$ и последовательности $s_0, s_1, \ldots, s_{2n-1}$ выполняется асимптотическое соотношение (As_H), а значит, и соотношения

$$z^{l+1} w(z) + \sum_{0 \leqslant k \leqslant l-1} z^{l-k} s_k = O(1) \tag{7.10.1}$$

$$(|z| \to \infty,\ \arg z = \pi/2;\ l = -1,\ 0,\ 1, \ldots, 2n).$$

(Здесь и ниже считаем сумму равной нулю, если верхний предел суммирования меньше нижнего). Пусть $d\sigma(\lambda)$ — мера, а α и β — константы, участвующие в представлении (I_{R}) функции $w(z)$. Мы покажем позже в § 8, что из асимптотического соотношения (As_H) следует, что для меры $d\sigma(\lambda)$ удовлетворяется условие $(\boldsymbol{d}_{2n})$, где условие $(\boldsymbol{d}_L)$ (L — любое вещественнсе) означает $\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 + |\lambda|)^t\, d\sigma(\lambda) < \infty \qquad (\forall t < L)$.

Рассмотрим для $l = -1, 0, 1, \ldots, 2n$ функцию

$$f_l(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\lambda^{l+1} - z^{l+1}) \cdot \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right) d\sigma(\lambda) - $$
$$- z^{l+1}(\alpha + \beta z) - \sum_{0 \leqslant k \leqslant l-1} z^{l-k} s_k. \tag{7.10.2}$$

Из неравенства $|(\lambda^{l+1} - z^{l+1}) / (\lambda - z)| \leqslant (l+1) \cdot (1 + |\lambda|)^l \times (1 + |z|)^l$, и из (7.3.1) получаем $\left|(\lambda^{l+1} - z^{l+1}) \times \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)\right| \leqslant 2(l+2) \times (1 + |z|^{l+2}) \cdot (1 + |\lambda|^{l-1})$.

Из последнего неравенства и условия $(\boldsymbol{d}_{2n})$ следует, что интеграл в правой части (7.10.2) существует, и что $f_l(z)$ — целая функция переменного z, допускающая для $l = -1, 0, 1, \ldots, 2n$

оценку $|f_l(z)| \leqslant C_l(1+|z|)^{l+2} \quad (\forall z)$. (7.10.3)

Меры $\lambda^{l+1}\,d\sigma(\lambda)$ при $l=-1, 0, 1, \ldots, 2n$ удовлетворяют условию $(\boldsymbol{r}_2)$, и, значит, согласно лемме 7.2, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda-z}-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)\lambda^{l+1}\,d\sigma(\lambda)=o(|z|)\quad (|z|\to\infty, \arg z=\pi/2). \tag{7.10.4}$$

Представляя $f_l(z)$ в виде

$$f_l(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda-z}-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)\lambda^{l+1}\,d\sigma(\lambda)-$$
$$-\left(z^{l+1}w(z)+\sum_{0\leqslant k\leqslant l-1} z^{l-k}s_k\right),$$

получаем из (7.10.1) и (7.10.4), что $f_l(z)=o(|z|)$, $(|z|\to\infty$, $\arg z=\pi/2)$ (7. 10. 5).

Из (7.10.3) и (7.10.5) следует, что целая функция $f_l(z)$ — константа относительно z, и, значит, $df_l/dz\equiv 0$. Приравняем к нулю df_l/dz при $z=0$, дифференцируя в (7.10.2) под знаком интеграла, получаем

$$\frac{df_{-1}}{dz}(0)=-\beta,\quad \frac{df_0}{dz}(0)=-\alpha+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\,d\sigma(\lambda),$$

$$\frac{df_l}{dz}(0)=-S_{l+1}+\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^{l-1}\,d\sigma(\lambda),\quad (l=1, 2, \ldots, 2n).$$

Равенства $df_l/dz_{|z=0}=0$ дают при $l=-1, 0: \beta=0$,

$\alpha=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda(1+\lambda^2)^{-1}\,d\sigma(\lambda)$, что означает представимость $w(z)$ в

виде (I_{R_1}); при $l=1, 2, \ldots, 2n$: $s_k=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^k d\sigma(\lambda)$, $(k=0, 1, \ldots 2n)$. (7.10.6)

Покажем, что мера $d\sigma(\lambda)$ удовлетворяет условиям $(\boldsymbol{h}_n)$, т. е. мера $\lambda^{2n}\,d\sigma(\lambda)$ удовлетворяет условию $(\boldsymbol{r}_0)$. Из $(\boldsymbol{d}_{2n})$ следует, что эта мера удовлетворяет условию $(\boldsymbol{r}_1)$. Рассмотрим функцию

$$w_{2n}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\lambda-z}\lambda^{2n}\,d\sigma(\lambda).$$

$w_{2n}(z)$ — функция класса $(\boldsymbol{R}_1)$; из (7.10.6) и из представления (I_{R_1}) для функции $w(z)$ вытекает: $w_{2n}(z)=z^{2n}w(z)+\sum_{0\leqslant k\leqslant 2n-1} z^{2n-k-1}s_k$.

Отсюда и из (As_H) следует, что $w_{2n}(z)=O(|z|^{-1})$ для $|z|\to\infty$, $\arg z=\pi/2$; последнее же асимптотическое соотношение для функции $w_{2n}(z)$ класса $(\boldsymbol{R}_1)$ обеспечивает ее принадлежность подклассу $(\boldsymbol{R}_0)$ этого класса, и, значит, для меры $d\tau(\lambda) = \lambda^{2n}\, d\sigma(\lambda)$, дающей интегральное представление (I_{R1}) функции $w_{2n}(z)$, выполняется условие $(\boldsymbol{r}_0)$, (являющееся для меры $d\sigma(\lambda)$ условием $(\boldsymbol{h}_n)$), и равенство $\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau(\lambda) = -\lim\limits_{|z|\to\infty,\ \delta<\arg z<\pi-\delta} z\cdot w_{2n}(z)$, может быть записано в виде $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^{2n}\, d\sigma(\lambda) = -\lim\limits_{|z|\to\infty,\ \delta<\arg z<\pi-\delta} \{z^{2n+1} w(z) + z^{2n} s_0 + \ldots + z s_{2n-1}\}$ (предел справа обязан существовать).

Для доказательства теоремы $H - N_H$ осталось показать, что из асимптотического соотношения (As_H) следует условие $(\boldsymbol{d}_{2n})$.

Поступила в редколлегию 05.01.80.