УДК 517.535.4

Б. Г. ФРЕЙДИН

О ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЯХ, ДОПУСКАЮЩИХ СПЕЦИАЛЬНУЮ ОЦЕНКУ СНИЗУ

Целая функция $f: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ называется функцией класса Крейна, если

$$1/f(z) = C + \sum_{k=1}^{\infty} A_k/(z - h_k), \quad \sum_{k=1}^{\infty} |A_k| < \infty, \tag{1}$$

где C, A_k, $h_k \in \boldsymbol{R}$. Эти функции были введены М. Г. Крейном в [1] и использовались в теории операторов, проблеме моментов, теории дифференциальных уравнений [2, 5]. М. Г. Крейн доказал [1], что такие функции имеют рост не выше экспоненциального типа и выполняются условия:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\ln|f(t)||(1+t^2)^{-1}\,dt < \infty, \tag{2}$$

$$\exists \lim_{t\to\infty} t^{-1} n_+(t) = \lim_{t\to\infty} t^{-1} n_-(t), \tag{3}$$

где $n_+(t)$ и $n_-(t)$ — считающие функции нулей соответственно на $[0, t]$ и $[-t, 0]$. Для функций класса Крейна, имеющих нормальный тип при порядке $\rho = 1$, условие (3) означает определенную симметрию в расположении корней. Возникает вопрос, имеется ли аналог (3) для функций класса Крейна порядка $\rho < 1$. То, что при $0 \leqslant \rho \leqslant \frac{1}{2}$ корни могут располагаться лишь на одном луче, показывает пример: $f(z) = \cos\sqrt{z}$. В настоящей заметке показано, что при $1/2 < \rho < 1$ для функций класса Крейна имеет место некоторое более слабое условие, чем (3): обе величины

$$\sigma_+ = \overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-\rho(t)} n_+(t), \quad \sigma_- = \overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-\rho(t)} n_-(t),$$

где $\rho(t)$ — уточненный порядок $f(z)$, положительны.

Из (1) следует, что $f(z)$ допускает оценку снизу $|f(z)| > C|y|$. В 1961 г. В. И. Мацаевым было получено следующее обобщение теоремы Крейна.

Теорема [3.] *Если целая функция $f(z)$ удовлетворяет во всей плоскости неравенству*

$$\ln|f(z)| > -C(r/|\sin\varphi|)^{\delta}, \tag{4}$$

где $0 < \delta < 1$, то функция $f(z)$ не выше экспоненциального типа и выполняются условия (2) и (3).

Теорема 1. *Пусть $f(z)$ — целая функция порядка ρ, $1/2 < \rho < 1$, и уточненного порядка $\rho(r)$. Предположим, что $f(z)$ во всей плоскости допускает оценку снизу*

$$\ln|f(z)| > -\delta(r)(r/|\sin\varphi|)^{\rho(r)}, \tag{5}$$

где $\delta(r) \downarrow 0$. Тогда величины σ_+ и σ_- положительны.

Доказательство. Будем пользоваться характеристиками Неванлинны для угла [4, гл. 1, § 5], а также следующим результатом [4, гл. 6, теорема 2.3]. Если функция $f(z)$ мероморфна в углу $\{z: \alpha \leqslant \arg z \leqslant \beta\}$, то для произвольных $\varepsilon > 0$, $d > 1$ вне некоторого множества $E_\varepsilon \subset (0, \infty)$, такого, что $\mu(E_\varepsilon) = \overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\, r^{-1} m(E_\varepsilon \cap [0, r])$,

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \ln^+|f(re^{i\varphi})|\, d\varphi \leqslant K r^{\pi/(\beta-\alpha)}(S_{\alpha,\beta}(dr, f) + 1), \tag{6}$$

где K — постоянная.

Обозначим через D угол $\{z: |\arg z - \pi| < \theta/2\}$, $\theta > \pi/\rho$, $\pi - \theta/2 = \alpha$. Условимся характеристики S, A, B, C, c, относящиеся к этому углу, обозначать соответственно S_D, A_D, B_D, C_D, c_D.

Пусть функция $f(z)$ удовлетворяет условию теоремы 1. По первой теореме Неванлинны для угла [4, гл. 1] имеем $S_D(r, f) = S_D(r, 1/f) + O(1)$, поэтому получаем

$$m_D(r, f) \equiv \int\limits_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \ln^+|f(re^{i\varphi})|\, d\varphi \leqslant K r^{\pi/\theta}(S_D(dr, 1/f) + O(1)) =$$
$$= K r^{\pi/\theta}(C_D(dr, 1/f) + A_D(dr, 1/f) + B_D(dr, 1/f) + O(1)), \tag{7}$$

$r \overline{\in} E_\varepsilon$, $\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon$. Оценим характеристики C_D, A_D и B_D в (7). Если предположим, что $\sigma_- = 0$, то, учитывая свойства уточненного порядка [4, гл. 2], имеем

$$C_D(dr, 1/f) = (2\pi/\theta)\int\limits_1^{dr} c_D(t)(1/t^{\pi/\theta} + t^{\pi/\theta}(dr)^{-2\pi/\theta})\, t^{-1}\, dt \leqslant$$
$$\leqslant (4\pi/\theta)\int\limits_1^{dr} n_-(t)\, t^{-(1+\pi/\theta)}\, dt = o(r^{\rho(r)-\pi/\theta});$$
$$A_D(dr, 1/f) = \int\limits_1^{dr}(t^{-\pi/\theta} - t^{\pi/\theta}(dr)^{-2\pi/\theta})[\ln^+|1/f(te^{i\alpha})| +$$
$$+ \ln^+|1/f(te^{i(2\pi-\alpha)})|]\, t^{-1}\, dt \leqslant \int\limits_1^{dr} t^{-(1+\pi/\theta)}[2\delta(t) \times$$
$$\times (t/|\sin\varphi|)^{\rho(t)}]\, dt = o(r^{\rho(r)-\pi/\theta});$$