УДК 517.946

Б. ЕРИККЕ

ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ С РЕДКИМ СПЕКТРОМ. 2

§ 2. Уточнение одной теоремы Берлинга. В работе [1] А. Берлинг доказал следующее

Предложение 0. *Пусть* $\{x_n\}$, $\{l_n\}$ — *две последовательности положительных чисел. Предположим, что конечный заряд* μ (в $\boldsymbol{R}$) *сосредоточен* на множестве* $E \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} [x_n, \quad x_n + l_n]$. Если

* Это значит, что $\mu(e) = 0$, если e борелевское $e \cap E = \varnothing$.

$$\sum_{\tau=1} \left(\frac{l_n}{x_n}\right)^2 = \infty \ \mathbf{(1)}, \quad и \ \hat{\mu} \mid (a,\ b) = 0 \ \mathbf{(2)}, \quad где\ a < b, \quad то\ \mu = 0 \quad \mathbf{(3)}.$$

Здесь $\hat{\mu}$, как обычно, преобразование Фурье заряда μ. В этом параграфе мы покажем, что в предложении 0 условие (1) можно ослабить. Мы докажем

Предложение 1. Пусть E — то же множество, что и в предложении 0 (так что выполнено условие (1)). Пусть μ — конечный заряд в $\boldsymbol{R}$, сосредоточенный на $E \cup F$, где $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, $I_n = [a_n - b_n,\ a_n + b_n]$, числа a_n — положительны, а b_n — неотрицательны, и $\sum_{\tau=1}^{\infty} \frac{1}{\log \frac{a_n}{\tilde{b}_n}} < \infty$ **(4)**, где $\tilde{b}_n = \max(b_n,\ e^{-a_n})$. Тогда из (2) следует (3).

Покажем, что предложение 1 сильнее предложения 0.

Пример. Пусть $\{\delta_n\}_1^\infty$ — последовательность положительных, а $\{N_n\}_1^\infty$ — последовательность натуральных чисел, причем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^2 = \infty \ \mathbf{(5)}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n^2}{N_v} < +\infty \ \mathbf{(6)}.$$

Выберем числа x_n, $n = 1, 2, \ldots$ так, чтобы

$$x_n \geqslant 1,\ x_n \uparrow,\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_n}{x_n} < +\infty. \tag{7}$$

Положим $\Lambda = \bigcup_{n=1}^{\infty} [x_n,\ x_n(1+\delta_n)]$, $E = R \setminus \Lambda$. Множество E удовлетворяет условиям предложения 0 в силу (5). Множество F построим следующим образом: в каждый сегмент $[x_n,\ x_n(1+\delta_n)]$ поместим $N_n - 1$ равноотстоящих точек

$$y_n^{(1)} = x_n + \frac{\delta_n x_n}{N_n};\quad y_n^{(2)} = x_n + 2\frac{\delta_n x_n}{N_n};\ \ldots;\ y_n^{(N_n - 1)} = x_n + (N_n - 1)\frac{\delta_n x_n}{N_n};$$

каждую из них окружим интервалом длины $2e^{-x_n}$; объединение всех этих интервалов и будет множеством F:

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{N_n - 1} [y_n^{(j)} - e^{+x_n},\ y_n^{(j)} + e^{-x_n}].$$

Множество F удовлетворяет условию (4), так как сумма, отвечающая левой части (4), не больше, чем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_n - 1}{\log \frac{x_n}{e^{-x_n}}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_n}{x_n} < \infty$$

в силу (7). Согласно предложению 1, заряд, сосредоточенный на $E \cup F$, преобразование Фурье которого обращается в нуль на интервале, равен нулю. Этого вывода нельзя сделать из предложения 0.

Сумма, соответствующая (1), в нашем примере не превосходит $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\delta_n x_n}{N_n}\cdot\frac{1}{x_n}\right)^2 N_n < +\infty$ (см. (6)), либо множество $R\setminus(E\cup F)$, на котором заряд обращается в нуль, равно $\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{N_n} J_j^n$, где J_j^n — интервал длины $\leqslant\frac{\delta_n x_n}{N_n}$, левый конец которого $\geqslant x_n$ $(j=1,\dots,N_n;\ n=1,\dots)$.

В работе [1] А. Берлинг вывел предложение 0 из следующей теоремы.

Теорема 0. *Пусть* ν *— конечный заряд в* $\boldsymbol{R}$. *Положим* $\sigma_\nu(x)\overset{\text{def}}{=}\log\int_R e^{-|x-\zeta|}\,d|\nu|(\zeta)$. *Если выполнено* (2) *и* $\int_R\frac{\sigma_\nu^-(x)}{1+x^2}\,dx=-\infty$ (8), $(\sigma_\nu^-\overset{\text{def}}{=}\min(\sigma,0))$, то $\nu=0$.

Докажем утверждение, усиливающее эту теорему; в качестве следствия получится предложение 1.

Теорема 1. *Пусть* μ *— конечный заряд в* $\boldsymbol{R}$, $F=\bigcup_{n\in\mathbf{Z}} I_n$, *где* $I_n=[a_n-b_n,\ a_n+b_n]$, *числа* a_n *— вещественны, и все отличны от нуля, а числа* b_n *— неотрицательны. Предположим, еще что* $\sum_{n\in\mathbf{Z}}\frac{1}{\log\frac{|a_n|}{\tilde{b}_n}}<\infty$ (9), *где* $\tilde{b}_n=\max\{b_n,\ e^{-|a_n|}\}$. *Положим,* $d\nu=\chi_{\mathbf{R}\setminus F}d\mu$ (χ_ε *обозначает характеристическую функцию множества* ε). *Если* ν *удовлетворяет условию* (8), *а* $\hat{\mu}\,|\,(a,b)=0$ $(a<b)$, *то* $\mu=0$.

Основным моментом доказательства теоремы 1 является построение некоторой целой функции g.

Доказательство. Пусть K — какой-нибудь замкнутый промежуток. Достаточно проверить, что $|\mu|(K)=0$. Для этого построим целую функцию g, удовлетворяющую следующим условиям: $(1_g)\ |g(z)|\leqslant\frac{c}{(1+|z|)^2}e^{\varepsilon|\operatorname{Im}z|}\ (z\in\boldsymbol{C})$, где $0<\varepsilon<\frac{b-a}{2}$; $(2_g)\times\times|g(x)|\leqslant e^{-|x|}$ при всех x, $x\in\bigcup_{|n|\geqslant n_0} I_n$ для некоторого числа n_0; (3_g) g не обращается в нуль в промежутке K. Допустим, что функция g уже построена. Рассмотрим заряд γ, $d\gamma=g\,d\mu$. Проверим, что он удовлетворяет условиям теоремы 0. Заряд γ конечен в силу (1_g); $\hat{\gamma}=\hat{g}\ast\hat{\mu}$, функция $\hat{g}$ сосредоточена в $[-\varepsilon,\varepsilon]$ (это следует из теоремы Пэли-Винера), а потому $\hat{\gamma}\,|\,(a+\varepsilon,\ b-\varepsilon)=0$, так что выполнено и (2). Осталось проверить, что $\int_{\mathbf{R}}\frac{\sigma_\gamma(x)}{1+x^2}\,dx=-\infty$. Для этого положим $\gamma=\gamma_1+\gamma_2$, где $d\gamma_2=\chi_F d\gamma$. Имеем при

$$\left|\frac{1}{2}x\right|>\max_{\zeta}\{|\zeta|:\zeta\in\bigcup_{|n|\leqslant n_0}\mathrm{I}_n\}\overset{\text{def}}{=}\mu$$

$$e^{\sigma_{\gamma_2}(x)} \overset{\text{def}}{=} \int_F e^{-|x-\zeta|} |g(\zeta)|\, d|\mu|(\zeta) = \int\limits_{\zeta\in F:|x-\zeta|<\frac{1}{2}|x|} + $$

$$+ \int\limits_{\zeta\in F:|x-\zeta|>\frac{1}{2}|x|} \leqslant \int\limits_{\zeta:|x-\zeta|<\frac{1}{2}|x|} e^{-|\zeta|} d|\mu|(\zeta) + |\mu|(\boldsymbol{R})\, e^{-\frac{1}{2}|x|} \leqslant \left(e^{-\frac{1}{2}|x|} + \right.$$

$$\left. + e^{-\frac{1}{2}|x|}\right) |\mu|(\boldsymbol{R}) = 2|\mu|(\boldsymbol{R})\, e^{-\frac{1}{2}|x|}. \qquad (10)$$

В первом неравенстве мы воспользовались (2_g)). Значит, при $\left|\frac{x}{2}\right| > M$ $\sigma_\gamma(x) \leqslant \log(e^{\sigma_{\gamma_1}(x)} + e^{\sigma_{\gamma_2}(x)}) \leqslant \log(e^{\sigma_{\gamma_1}(x)} + 2|\mu|(\boldsymbol{R})\, e^{-\frac{1}{2}|x|})$, причем в силу ($I_g$) $\int \frac{\sigma_{\gamma_1}(x)}{1+x^2} dx = -\infty$ **(11).** Воспользуемся теперь следующей леммой, доказательство которой будет дано позже.

Лемма: *Пусть* θ — *положительная функция, удовлетворяющая условию Липшица на прямой* $\boldsymbol{R}$. *Пусть* $\omega \in (0, +\infty)$. *Если* $\int_{-\infty}^{\infty} \log(e^{-\omega|u|} + e^{-\theta(u)})\, du/(1+u^2) > -\infty$, то $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(u)}{1+u^2} du < \infty$. Применим эту лемму с $\theta = \sigma_{c\gamma_1}$, где $c < \min\left\{\frac{1}{|\gamma_1|(\boldsymbol{R})}, \frac{1}{2|\mu|(\boldsymbol{R})}\right\}$ и $\omega = \frac{1}{2}$; учитывая равенство $e^{\sigma_{c\nu}} = c e^{\sigma_\nu}$ для любого конечного заряда ν, а также, что $\sigma_\nu \leqslant \log|\nu|(\boldsymbol{R})$, мы в силу условий (10), (11) и конечности интеграла от $\frac{\theta(u)}{1+u^2}$ по любому ограниченному множеству заключаем, что $\int \sigma_{c\gamma}(x)/(1+x^2)\, dx = -\infty$, и по теореме Берлинга $\gamma = 0$. (Липшицевость функции $\sigma_{c\gamma}$ проверяется без труда — с учетом конечности заряда γ).

Осталось убедиться в существовании целой функции g. Положим

$$g(z) = \prod_{|n|\geqslant n_0} \left(\frac{\sin\frac{\pi z}{|a_n|}}{\frac{\pi z}{|a_n|}}\right)^{l_n} \cdot \left(\frac{\sin\frac{\varepsilon}{4} z}{\frac{\varepsilon}{4} z}\right)^2, \qquad (12)$$

где $l_n = \left[2\frac{|a_n|}{\log\frac{|a_n|}{2\tilde{b}_n}}\right] + 1$ (напомним, что $I_n = [a_n - b_n,\ a_n + b_n]$),

а n_0 — такое, что

$$\left.\begin{aligned} &I_n \cap \{K \cup [-1,1]\} = \varnothing \quad \text{при } |n| \geqslant n_0 \text{ и} \\ &\left|\frac{\tilde{b}_n}{a_n}\right| < \frac{1}{2} \quad \text{при всех } n,\ |n| \geqslant n_0; \end{aligned}\right\} (13); \quad \sum_{|n|\geqslant n_0} \frac{\pi l_n}{|a_n|} < \frac{\varepsilon}{2}. \ (14)$$

Условие (9) гарантирует существование такого числа n_0. Проверим, что g удовлетворяет условиям (1_g), (2_g) и (3_g).

Справедливость условия (1_g) вытекает из (14) и следующих неравенств: $\left|\frac{\sin z}{z}\right| \leqslant e^{|Imz|} (z \in C)$*, и $\left|\frac{\sin\frac{\varepsilon}{4}z}{\frac{\varepsilon}{4}z}\right|^2 \leqslant \left(\operatorname{cons} A \frac{1}{1+|z|} \times \right.$ $\left. \times e^{\frac{\varepsilon}{4} Imz}\right)^2 (z \in C)$, если учесть, что $\left|\prod_{|n|\geqslant n_0} \left(\frac{\sin\frac{\pi z}{|a_n|}}{\frac{\pi z}{|a_n|}}\right)^{l_n}\right| \leqslant \exp \sum_{|n|\geqslant n_0} \times$ $\times \frac{\pi l_n}{|a_n|} |Imz| < \exp \frac{\varepsilon}{2} |Imz|$ в силу выбора n_0 (см. (14)).

Проверим справедливость условия (2_g). При всех вещественных x все факторы произведения, определяющего g, по модулю $\leqslant 1$, и

$$\log|g(x)| \leqslant l_n \log\left|\frac{\sin\frac{\pi x}{|a_n|}}{\frac{\pi x}{|a_n|}}\right| = l_n \log\left|\frac{\sin\pi\left(1+\frac{x-a_n}{a_n}\right)}{\pi\left(1+\frac{x-a_n}{a_n}\right)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant l_n \log\left|\frac{\frac{\pi \tilde{b}_n}{a_n}}{\pi\left(1-\frac{\tilde{b}_n}{|a_n|}\right)}\right| \leqslant l_n \log\left|\frac{2\tilde{b}_n}{a_n}\right| \leqslant 2\frac{a_n}{\log\left|\frac{a_n}{2\tilde{b}_n}\right|} \log\left|\frac{2\tilde{b}_n}{a_n}\right| \leqslant -|x|,$$

если $x \in I_n = [a_n - b_n,\ a_n + b_n]$, $|n| \geqslant n_0$. Во втором неравенстве мы воспользовались тем, что $|\sin(\pi + x)| = |\sin x| \leqslant |x|$ и $|x - a_n| \leqslant \tilde{b}_n$ для $x \in I_n$, в третьем — соотношением (13), в четвертом — определением l_n и отрицательностью $\log\frac{2\tilde{b}_n}{|a_n|}$, а в пятом — неравенством $|x| \geqslant \frac{1}{2}|a_n|$ для всех $x \in I_n$, если $|n| \geqslant n_0$ (см. (13)).

Условие (3_g) (см.(13)) выполняется.

Доказательство почти закончено, осталось убедиться в справедливости леммы.

Доказательство леммы**). Рассмотрим открытое множество $G = \{u \in R : \theta(u) > \omega|u|\}$; пусть $\{(\alpha_n,\ \beta_n)\}$ — последовательность его составляющих интервалов. Если $u \in R \setminus G$, то $e^{-\omega|u|} + e^{-\theta(u)} \leqslant 2e^{-\theta(u)}$, и потому $\int_{CG} \frac{\theta(u)}{1+u^2} du < +\infty$ (15). Проверим, что $\int_G \frac{\theta(u)}{1+u^2} du < +\infty$. (16)

---

* Функция $\frac{\sin z}{z} e^{iz}$ ограничена в верхней полуплоскости C_+, а на вещественной оси R она не превосходит единицу по модулю. Остается применить принцип максимума. Аналогичное рассуждение проходит и для нижней полуплоскости C_-.

** Вариант утверждения, доказанного в монографии [2, с. 75].

ели $u \in G$, то $e^{-\omega|u|} + e^{-\theta(u)} \leqslant 2e^{-\omega|u|}$, и потому $\int\limits_G \frac{|u|\,du}{1+u^2} < +\infty$ **(17)**, так что G не содержит лучей). Если $0 < \alpha_n < u < \beta_n$, то $\theta(u) \leqslant \leqslant \theta(\alpha_n) + C(u - \alpha_n) = \omega\alpha_n + C(u - \alpha_n) \leqslant (\omega + C)(\alpha_n + (u - \alpha_n)) = = (\omega + C)u$, ибо $\theta(\alpha_n) = \omega\alpha_n$.

Если $\alpha_n < u < \beta_n < 0$, то (поскольку $\theta(\beta_n) = \omega|\beta_n|$) $\theta(u) \leqslant \leqslant \theta(\beta_n) + C(\beta_n - u) \leqslant (C + \omega)(|\beta_n| + (\beta_n - u)) = (C + \omega)|u|$.

Таким образом, $\sum\limits_{n:0 \notin (\alpha_n, \beta_n)} \int\limits_{\alpha_n}^{\beta_n} \frac{\theta(u)}{1+u^2}\,du \leqslant (C + \omega) \sum\limits_{n:0 \notin (\alpha_n, \beta_n)} \int\limits_{\alpha_n}^{\beta_n} \frac{|u|\,du}{1+u^2} < +\infty$ в силу (17), откуда и следует (16).

В заключение автор выражает глубокую признательность В. П. Хавину, под руководством которого была выполнена данная работа.

Список литературы: 1. *Beurling A.* On quasianalyticity and general distributions, 1962, preprint. 2. *Levinson N.* Gap and density theorems. —New York, 1940.

Поступила в редколлегию 10.06.80.