УДК-517.54

В. К. ДУБОВОЙ

ИНДЕФИНИТНАЯ МЕТРИКА В ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ПРОБЛЕМЕ ШУРА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ. 1

Характеристическая оператор-функция (х. о.-ф.)— фундаментальное понятие, впервые введенное М. С. Лившицем, является мощным инструментом при исследовании операторов сжатия в гильбертовом пространстве. Определяя соответствующий оператор с точностью до унитарной эквивалентности, х. о.-ф. позволяет исследовать операторы сжатия аналитическими методами. Класс х. о.-ф операторов сжатия допускает простое внутреннее описание — это класс сжимающих аналитических в единичном круге функций.

С другой стороны сжимающая аналитическая в единичном круге функция является главным объектом исследования в известной интерполяционной проблеме Шура. Проблема Шура, как и многие другие классические интерполяционные задачи анализа, привлекает к себе внимание математиков с момента ее постановки. В последние годы развитие методов J-теории позволило В. П. Потапову и группе его учеников добиться новых успехов в исследовании задач этого круга.

В связи с этим возникает интерес к задачам, стимулирующим синтез этих двух направлений. На одну из задач такого типа обратил внимание автора В. П. Потапов. Задача состоит в следующем. Известно, что широкий класс интерполяционных задач, как это следует из теоремы С. А. Орлова, можно классифицировать по рангам радиусов предельных кругов Вейля. Подобная классификация возможна и в задаче Шура, т. е. в классе х. о.-ф. операторов сжатия. Возникает естественный вопрос о том, какая классификация операторов сжатия при этом порождается. Оказывается, что ранги радиусов предельных кругов Вейля в задаче Шура совпадают с кратностью односторонних сдвигов, содержащихся в данном операторе сжатия и сопряженном к нему. Интересно отметить, что операторная ситуация подсказала более тонкую, чем это было принято до этого, классификацию задач в проблеме Шура. Оказалось, что методы, развитые при исследовании х. о.-ф., расширяют наши возможности при исследовании задачи Шура. Таким образом, устанавливаемые связи полезны для обоих направлений.

В настоящий момент имеется много работ, в которых изложены методы J-теории и применение их к классическим интерполяционным задачам анализа, например [1] — [3], Кроме этого, в работе [4] методами J-теории решена проблема Шура для квадратных матриц-функций.

Однако рассмотрение х. о.-ф. естественным образом приводит к изучению задачи Шура для прямоугольных матриц-функций. В связи с этим в данной статье проблема Шура изложена для этой более общей ситуации и в том виде, в каком это необходимо для рассмотрения отмеченных выше вопросов. Именно эту цель и преследует первая часть данной работы. В ней излагаются, в основном без доказательства, известные факты для случая прямоугольных матриц-функций и по ходу дела исправляются неточности, допущенные в работе [4]. В дальнейшем по мере продвижения в глубь те вопросы, которые ранее не рассматривались, будут излагаться более подробно.

Приношу благодарность В. П. Потапову, обратившему мое внимание на данную тематику, за полезные обсуждения.

§ I. Постановка задачи. Вывод основных матричных неравенств.

1. Пусть D обозначает открытый единичный круг комплексной плоскости: $D=\{\zeta : |\zeta|<1\}$. Пусть $L_{p,q}$ — совокупность прямоугольных матриц над полем комплексных чисел с p строками и q столбцами. Обозначим через $S_{p,q}$ множество аналитических в D матриц-функций $\theta(\zeta)$ со значениями в $L_{p,q}$ и удовлетворяющих при любом $\zeta \in D$ неравенству $I_q-\theta^*(\zeta)\theta(\zeta)\geqslant 0$, далее в тех случаях, когда размерность единичной матрицы не вызывает сомнений, индекс q будем опускать. Известная проблема Шура [5], обобщенная на матричный случай, формулируется следующим образом.

Заданы $n+1$ матриц $c_0, c_1, \ldots, c_n$, принадлежащих $L_{p,q}$.

Требуется: а) найти необходимые и достаточные условия того, что $c_0, c_1, \ldots, c_n$ являются первыми коэффициентами разложения в ряд матрицы-функции класса $S_{p,q}$ $\theta(\zeta)=c_0+c_1\zeta+\cdots+c_n\zeta^n+\cdots$, б) дать описание всех таких матриц-функций.

2. В основе рассматриваемого подхода к задаче Шура лежит обобщение на класс $S_{p,q}$ известного неравенства Шварца. А именно имеют место следующие утверждения.

Теорема I.1. *Пусть $\zeta_k\in D$, $1\leqslant k\leqslant n$. Для того, чтобы аналитическая в D матрица-функция $\theta(\zeta)$ принадлежала классу $S_{p,q}$, необходимо и достаточно, чтобы при $\zeta\in D$ выполнялось неравенство*

$$\begin{bmatrix} \dfrac{I-\theta(\zeta_j)\theta^*(\zeta_k)}{1-\zeta_j\bar\zeta_k} & \dfrac{I-\theta(\zeta_j)\theta^*(\zeta)}{1-\zeta_j\bar\zeta} \\ \dfrac{I-\theta(\zeta)\theta^*(\zeta_k)}{1-\zeta\bar\zeta_k} & \dfrac{I-\theta(\zeta)\theta^*(\zeta)}{1-\zeta\bar\zeta} \end{bmatrix}_1^n \geqslant 1 \tag{1.1}$$

Теорема I.1′. *Пусть $\zeta_k\in D$, $1\leqslant k\leqslant n$. Для того, чтобы аналитическая в D матрица-функция принадлежала классу $S_{p,q}$, необходимо и достаточно, чтобы при $\zeta\in D$ выполнялось неравенство*

$$\begin{bmatrix} \dfrac{I-\theta(\zeta_j)\theta^*(\zeta_k)}{1-\zeta_j\bar\zeta_k} & \dfrac{\theta(\zeta)-\theta(\zeta_j)}{\zeta-\zeta_j} \\ \dfrac{\theta^*(\zeta)-\theta^*(\zeta_k)}{\bar\zeta-\bar\zeta_k} & \dfrac{I-\theta^*(\zeta)\theta(\zeta)}{1-\bar\zeta\zeta} \end{bmatrix}_1^n \geqslant 0 \tag{1.1′}$$

Доказательство неравенств (I.I) и (I.I′) для случая $p=q$ имеется в [4]. В случае прямоугольных матриц-функций для доказательства этих утверждений достаточно расширить матрицу-функцию до квадратной, дополняя ее нулевыми элементами.

Неравенство (I.I′) принято называть двойственным по отношению к неравенству (I.I).

3. Из неравенства (I.I) как и в работе [4] следует

Теорема I.2. *Для принадлежности матрицы-функции $\theta(\zeta)=c_0+c_1\zeta+\ldots+c_n\zeta^n+\ldots$ классу $S_{p,q}$ необходимо и достаточно, чтобы матрица*

$$C_n=\begin{bmatrix} c_0 & & & \\ c_1 & c_0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_n & c_{n-1} & \cdots & c_0 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

была сжимающей при любом $n: I-C_nC_n^*\geqslant 0$.

Приведенную теорему дополняет

Теорема I.3. *Пусть $c_k\in L_{p,q}$, $k=1, 2, \ldots, n$ таковы, что $I: C_kC_k^*\geqslant 0$, где C_k имеет вид (1.2). Тогда существует $\theta(\zeta)\in S_{p,q}$, первые $n+1$ коэффициентов разложения в ряд которой совпадают с матрицами $c_0, c_1, \ldots, c_n: \theta(\zeta)=c_0+c_1\zeta+\cdots+c_n\zeta^n+\cdots$*

Доказательство опирается на следующее утверждение:

Если матрицы $c_0, c_1, \dots, c_n$ удовлетворяют неравенству $A_n = I - C_n C_n^* \geqslant 0$, то существует матрица $z \in L_{p,q}$ такая, что

$$A_{n+1} = I - C_{n+1} C_{n+1}^* \geqslant 0, \tag{1.3}$$

$$\text{где } C_{n+1} = \begin{bmatrix} c_0 & & & & 0 \\ c_1 & c_0 & \cdot & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ c_n & c_{n-1} & \cdots & c_0 & \\ z & c_n & \cdots & c_1 & c_0 \end{bmatrix}.$$

Смысл этого утверждения состоит в том, что совокупность матриц $c_0, c_1, \dots, c_n$ всегда можно продолжить до последовательности $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, c_{n+1}, c_{n+2}, \dots$ для которой матрицы $A_k = I - C_k C_k^* \geqslant 0$ для любого $k = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$. Но тогда в силу теоремы 1.2 матрица-функция $\theta(\zeta) = c_0 + c_1\zeta + \dots + c_n\zeta^n + \dots$ принадлежит классу $S_{p,q}$.

В работе [4] имеется ошибка при доказательстве этого утверждения. В связи с этим остановимся на доказательстве этого факта более подробно.

Применяя к матрице

$$A_n = I - C_n C_n^* = \begin{bmatrix} A_{n-1} & B_n \\ B_n^* & I - \sum\limits_{k=0}^{n} c_k c_k^* \end{bmatrix} \geqslant 0$$

лемму о блок-матрице [6], получаем, что матричное уравнение

$$A_{n-1} X = B_n, \; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad x_k \in L_{p,p}, \; 1 \leqslant k \leqslant n.$$

имеет решение, при этом $d = I - \sum\limits_{k=0}^{n} c_k c_k^* - X^* A_{n-1} X \geqslant 0$.

Пусть $y = c_0 [c_1^*, \dots, c_n^*] X$, $z = y^* c_0$.
Тогда, умножая матрицу (1.3) справа на

$$T = \begin{bmatrix} I_{(n+1)p} & \begin{bmatrix} -y \\ -X \end{bmatrix} \\ 0 & I_p \end{bmatrix}$$

и слева на T^*, после простых вычислений получим

$$T^* A_{n+1} T = \begin{bmatrix} A_n & 0 \\ 0 & d + y^* y \end{bmatrix} \geqslant 0$$

Так как T невырожденна, то отсюда следует, что $A_{n+1} \geqslant 0$. Значит, надо положить

$$c_{n+1} = z = y^* c_0 = X^* \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} c_0^* c_0,$$

где X — решение уравнения $A_{n-1} X = B_n$.

Теоремы 1.2 и 1.3 дают ответ на первый вопрос, поставленный в проблеме Шура. А именно, условие $A_n = I - C_n C_n^* \geqslant 0$, где C^n

имеет вид (1.2), является необходимым и достаточным для того, чтобы матрицы $c_0, c_1, \ldots, c_n$ являлись первыми коэффициентами разложения в ряд матрицы-функции класса $S_{p,q}$ $\theta(\zeta) = c_0 + c_1\zeta + \cdots + c_n\zeta^n + \cdots$.

4. При рассматриваемом подходе с каждой классической задачей связывается основное матричное неравенство. В этом пункте приводятся основные матричные неравенства, связанные с задачей Шура.

Теорема 1.4. *Для того, чтобы аналитическая в D матрица-функция $\theta(\zeta)$ принадлежала классу $S_{p,q}$ и имела $n+1$ заданных первых коэффициентов разложения в ряд $\theta(\zeta) = c_0 + c_1\zeta + \cdots + c_n\zeta^n + \cdots$ необходимо и достаточно, чтобы она при $|\zeta| < 1$ удовлетворяла неравенству*

$$\left[\begin{array}{c|c} I - C_nC_n^* & \begin{array}{c} I - c_0\theta^*(\zeta) \\ \bar{\zeta}\left(I - \left(c_0 + \frac{1}{\bar{\zeta}}c_1\right)\theta^*(\zeta)\right) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \bar{\zeta}^n\left(I - \left(c_0 + \frac{1}{\bar{\zeta}}c_1 + \cdots + \frac{1}{\bar{\zeta}^n}c_n\right)\theta^*(\zeta)\right) \end{array} \\ \hline * & \dfrac{I - \theta(\zeta)\theta^*(\zeta)}{1 - \zeta\bar{\zeta}} \end{array}\right] \geqslant 0 \ (S).$$

Необходимость условия теоремы может быть доказана так же, как и в работе [4]. На доказательстве достаточности остановимся более подробно, поскольку в доказательстве достаточности, предложенном в [4], допущена ошибка.

Прежде всего обратим внимание на то, что (S) можно переписать в виде

$$\left[\begin{array}{c|c} I - C_nC_n^* & \Lambda^*_{p,n}(\zeta) - C_n\Lambda^*_{q,n}(\zeta)\,\theta^*(\zeta) \\ \hline * & \dfrac{I - \theta(\zeta)\theta^*(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}\zeta} \end{array}\right] \geqslant 0 \quad (1.4)$$

где $\Lambda_{p,n}(\zeta) = [I_p, \zeta I_p, \ldots, \zeta^n I_p]$.

Если равенство (1.4) выполняется, то при $|\zeta| < 1$

$$\frac{I - \theta(\zeta)\theta^*(\zeta)}{1 - \zeta\bar{\zeta}} \geqslant 0$$

и, следовательно, $\theta(\zeta)$ принадлежит классу $S_{p,q}$.

Пусть далее $\theta(\zeta) = d_0 + d_1\zeta + d_2\zeta^2 + \cdots$.

Нужно доказать, что из (1.4) следуют равенства $d_k = c_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

$$\text{Пусть } D_\infty = \begin{bmatrix} d_0 & & & \\ d_1 & d_0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ d_n & d_{n-1} & \cdots & d_0 \\ d_{n+1} & d_n & \cdots & d_1 d_0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}, \quad D_n = \begin{bmatrix} d_0 & & 0 \\ d_1 & d_0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ d_n & d_{n-1} & \cdots d_0 \end{bmatrix}.$$

Тогда нетрудно видеть, что $\Lambda_q^*(\zeta)\,\theta^*(\zeta) = D_\infty^*\Lambda_p^*(\zeta)$, $\frac{I-\theta(\zeta)\,\theta^*(\zeta)}{1-\zeta\bar\zeta} =$ $= \Lambda_p(\zeta)\,(I - D_\infty D_\infty^*)\Lambda_p^*\zeta$, где $\Lambda_p(\zeta) = [I_p,\ \zeta I_p, \ldots \zeta^n I_p,\ \ldots]$. Очевидно, (I.4) эквивалентно следующему неравенству

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} I - C_nC_n^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} D_\infty^*\right)\Lambda_p^*(\zeta) \\ \hline * & \Lambda_p(\zeta)\left(I - D_\infty D_\infty^*\right)\Lambda_p^*(\zeta) \end{array}\right] \geqslant 0, \quad (1.5).$$

Умножая (I.5) слева на $T(\zeta) = [\Lambda_p(\zeta), -I_p]$, а справа на $T^*(\zeta)$, после простых преобразований приходим к неравенству

$$\Lambda_p(\zeta)\,(I - QQ^*)\,\Lambda_p^*(\zeta) \geqslant (1 + |\zeta|^2 + \cdots + |\zeta|^{2n})I_p, \tag{1.6}$$

где $Q = \begin{bmatrix} C_n 0 \\ 0\ \ 0 \end{bmatrix} - D_\infty$. Из (1.6) следует

$$\Lambda_p(\zeta)\,QQ^*\Lambda_p^*(\zeta) \leqslant \frac{|\zeta|^{2n+2}}{1-|\zeta|^2} I_p. \tag{1.7}$$

Откуда, учитывая вид Q, получаем $c_k = d_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Что и требовалось доказать.

Теорема 1.5. *Для того, чтобы аналитическая в D матрица-функция $\theta(\zeta)$ принадлежала классу $S_{p,q}$ и имела $n+1$ заданных первых коэффициента разложения в ряд $\theta(\zeta) = c_0 + c_1\zeta + \cdots c_n\zeta^n + \cdots$ необходимо и достаточно, чтобы она при $|\zeta| < 1$ удовлетворяла неравенству*

$$\left[\begin{array}{c|c} I - C_nC_n^* & \begin{array}{c} \zeta^{-1}(\theta(\zeta) - c_0) \\ \zeta^{-2}(\theta(\zeta) - c_0 - c_1\zeta) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \zeta^{-(n+1)}(\theta(\zeta) - c_0 - c_1\zeta - \cdots - c_n\zeta^n) \end{array} \\ \hline * & \dfrac{I - \theta^*(\zeta)\,\theta(\zeta)}{1 - \bar\zeta\zeta} \end{array}\right] \geqslant 0\ (\tilde S).$$

Это утверждение доказывается точно так же, как и в случае квадратных матриц-функций [4].

Неравенства (S) и $(\tilde S)$ называются соответственно основным и дуальным матричными неравенствами проблемы Шура. Решая каждое из них, мы получим полное описание всевозможных решений проблемы Шура.

§ 2. Элементарный кратный множитель. I. Для описания совокупности решений неравенств (S) и $(\tilde S)$ нам понадобится так называемый элементарный кратный множитель [2], [4].

Определение. Аналитическая матрица-функция $B(\zeta)$ порядка N, имеющая в расширенной комплексной плоскости единственный полюс произвольной кратности, называется $\mathcal{J}$-растягивающим в единичном круге $\mathcal{J}$-элементарным кратным множителем, если она $\mathcal{J}$-растягивающая внутри круга и $\mathcal{J}$-унитарна на его границе, т. е. $B(\zeta)\mathcal{J}B^*(\zeta) - \mathcal{J} \geqslant 0$, $|\zeta| < 1$ **(2.1)**, $B(\zeta)\mathcal{J}B^*(\zeta) - \mathcal{J} = 0$, $|\zeta| = 1$ **(2.2)**, или, в равной степени $B^*(\zeta)\mathcal{J}B(\zeta) - \mathcal{J} \geqslant$

$\geqslant 0$, $|\zeta| < 1$, $B^*(\zeta)\mathcal{J}B(\zeta) - \mathcal{J} = 0$, $|\zeta| = 1$. Здесь $\mathcal{J}$ — постоянная, эрмитовая и инволютивная матрица порядка N: $\mathcal{J}^* = \mathcal{J}$, $\mathcal{J}^2 = I$.

Нас будет интересовать тот случай, когда полюс матрицы-функции находится, в зависимости от ситуации, в точках $\zeta = 0$ или $\zeta = \infty$. Добавим, что в дальнейшем $\mathcal{J}$-элементарный кратный множитель нормируется к единице в точке $\zeta = 1$, т. е. $B(1) = I$.

С неравенством (S) связана матрица $\mathcal{J}$ вида

$$\mathcal{J} = j = \begin{bmatrix} -I_q & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}.$$

Это объясняется тем, что матричный элемент, стоящий в нижнем правом углу этого неравенства, допускает представление в виде

$$I_p - \theta(\zeta)\theta^*(\zeta) = [\theta(\zeta),\ I_p]\begin{bmatrix} -I_q & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta^*(\zeta) \\ I_p \end{bmatrix}.$$

В силу тех же соображений с неравенством $(\tilde{S})$ связана матрица $\mathcal{J}$ вида $\mathcal{J} = \tilde{j} = \begin{bmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}$.

2. Пусть $\mathcal{J} = j$ и j — элементарный кратный множитель $B_n(\zeta)$ имеет полюс в точке 0: $B_n(\zeta) = d_0 + \frac{d_1}{\zeta} + \cdots + \frac{d_{n+1}}{\zeta^{n+1}}$ **(2.3).**

Тогда из (2.1) следует, что $\operatorname{rang} d_{n+1} \leqslant p$. В том случае, когда $\operatorname{rang} d_{n+1} = p$, $B_n(\zeta)$ будем называть j-элементарным кратным множителем полного ранга.

Как и в работе [4] может быть доказана следующая

Теорема 2.1 (о параметризации). *Для каждой кратной j-элементарной матрицы-функции* (2.3) *полного ранга однозначно определяются параметры $c_0, c_1, \ldots, c_n$, принадлежащие $L_{p,q}$ и удовлетворяющие условию*

$$A_n = I - C_nC_n^* > 0,\quad C_n = \begin{bmatrix} c_0 & & 0 \\ c_1 & c_0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ c_n & c_{n-1} & \cdots c_0 \end{bmatrix}$$

такие, что $B_n(\zeta)$ допускает представление в виде

$$B_n(\zeta) = I + \frac{1-\zeta}{\zeta} j \begin{bmatrix} \Lambda_{q,n}(1) & 0 \\ 0 & \Lambda_{p,n}(1) \end{bmatrix} H_n \begin{bmatrix} \Lambda^*_{q,n}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) & 0 \\ 0 & \Lambda^*_{p,n}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

$$H_n = \begin{bmatrix} C_n^* \\ I \end{bmatrix} (I - C_nC_n^*)^{-1}\,[C_n,\ I]. \quad (2.5)$$

Обратно, любая матрица-функция $B_n(\zeta)$ указанного вида является j-элементарной кратной функцией полного ранга, при этом j-форма $B_n(\zeta)$ имеет вид

$$\frac{1}{1-\zeta\bar{\zeta}}\left(B_n^*(\zeta)\,jB_n(\zeta) - j\right) =$$

$$=\frac{1}{\zeta\bar{\zeta}}\begin{bmatrix}\Lambda_{q,n}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) & 0\\ 0 & \Lambda_{p,n}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)\end{bmatrix} H_n \begin{bmatrix}\Lambda^*_{q,n}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) & 0\\ 0 & \Lambda^*_{p,n}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)\end{bmatrix}. \qquad (2.6)$$

Следствие. Для каждой двучленной j-элементарной матрицы-функции полного ранга $b_0(\zeta) = I + \frac{1-\zeta}{\zeta} P_0$ с полюсом в точке $\zeta = 0$ однозначно определяется параметр $c_0 \in L_{pq}$, такой, что $I - c_0c_0^* > 0$ и $b_0(\zeta)$ допускает представление

$$b_0(\zeta) = I + \frac{1-\zeta}{\zeta} j \begin{bmatrix} c_0^* \\ I \end{bmatrix} (I - c_0c_0^*)^{-1} \, [c_0, \ I]. \qquad (2.7)$$

Обратно, любая матрица-функция указанного вида является j-элементарной функцией полного ранга.

Таким образом $P_0 = \begin{bmatrix}\xi_0^* \\ \eta_0^*\end{bmatrix} [\xi_0, \ \eta_0] \ j$ **(2.8)**, где $\xi_0 = -(I - c_0c_0^*)^{-\frac{1}{2}} c_0$, $\eta_0 = (I - c_0c_0^*)^{-\frac{1}{2}}$ **(2.9)**.

Отметим при этом, что матрица P_0 обладает следующими свойствами $P_0^2 = P_0$, $P_0 j \geqslant 0$, $\operatorname{rang} P_0 = p$ **(2.10)**.

3. Для решения неравенства $(\tilde{S})$ нам понадобится $\tilde{j}$-элементарный кратный множитель полного ранга с полюсом на ∞:

$$\tilde{B}_n(\zeta) = \tilde{d}_0 + \tilde{d}_1\zeta + \cdots + \tilde{d}_{n+1}\zeta^{n+1}, \ \operatorname{rang} \tilde{d}_{n+1} = p. \qquad (2.11)$$

Очевидно, $\tilde{B}_n^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)$ является $-\tilde{j}$-элементарным кратным множителем полного ранга с полюсом в точке $\zeta = 0$. Поэтому, из теоремы 2.1 о параметризации следует, что однозначно определяются матрицы $c_k \in L_{p,q}$, $0 \leqslant k \leqslant n$ такие, что

$$\tilde{B}_n^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) = I - \frac{1-\zeta}{\zeta} \tilde{j} \begin{bmatrix}\Lambda_{p,n}(1) & 0\\ 0 & \Lambda_{q,n}(1)\end{bmatrix} \tilde{H}_n \begin{bmatrix}\Lambda^*_{p,n}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) & 0\\ 0 & \Lambda^*_{q,n}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)\end{bmatrix}, \qquad (2.12)$$

$$\text{где } \tilde{H}_n = \begin{bmatrix} I \\ C_n^* \end{bmatrix} (I - C_nC_n^*)^{-1} \, [I, \ C_n]. \qquad (2.13)$$

Отсюда находим

$$\tilde{B}_n(\zeta) = I + (1-\zeta) \times \begin{bmatrix}\Lambda_{p,n}(\zeta) & 0\\ 0 & \Lambda_{q,n}(\zeta)\end{bmatrix} \tilde{H}_n \begin{bmatrix}\Lambda^*_{p,n}(1) & 0\\ 0 & \Lambda^*_{q,n}(1)\end{bmatrix} \tilde{j}. \qquad (2.14)$$

Таким образом, доказана первая часть следующего утверждения

Теорема 2.2. *Для каждой $\tilde{j}$-элементарной кратной матрицы-функции (2.11) полного ранга однозначно определяются параметры $c_k \in L_{p,q}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, удовлетворяющие условию $A_n = I - C_nC_n^* > 0$,* такие, что *$\tilde{B}_n(\zeta)$ допускает представление в виде* (2.14).

Обратно, любая матрица-функция вида (2.14) является $\tilde{j}$-элементарной кратной матрицей-функцией полного ранга, при этом $\tilde{j}$-форма $\tilde{B}_n(\zeta)$ имеет вид

$$\frac{1}{1-\zeta\bar{\zeta}}(\tilde{B}_n(\zeta)\,\tilde{j}\tilde{B}_n^*\zeta)-\tilde{j}=\begin{bmatrix}\Lambda_{p,\,n}(\zeta) & 0\\ 0 & \Lambda_{q,\,n}(\zeta)\end{bmatrix}\tilde{H}_n\begin{bmatrix}\Lambda_{p,\,n}^*(\xi) & 0\\ 0 & \Lambda_{q,\,n}^*(\zeta)\end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Вторая часть сформулированного утверждения доказывается так же, как и для теоремы 2.1.

Следствие. Для каждой двучленной $\tilde{j}$-элементарной матрицы-функции, $\tilde{b}_0(\zeta)=I+(1-\zeta)\,Q_0$ полного ранга однозначно определяется матрица $c_0\in L_{p,\,q}$ такая, что $I-c_0c_0^*>0$ и $\tilde{b}_0(\zeta)$ допускает представление

$$\tilde{b}_0(\zeta)=I+(1-\zeta)\begin{bmatrix}I\\ c_0^*\end{bmatrix}(I-c_0c_0^*)^{-1}\ [I,\,c_0]\,\tilde{j}\,. \qquad (2.16)$$

4. Пусть $B_k(\zeta)$, $0\leqslant k\leqslant n$ — определенные посредством (2.4) j-элементарные кратные множители, соответствующие параметрам $c_0, c_1, \ldots, c_k$; $0\leqslant k\leqslant n$. Применяя ставшие уже обычными при этом подходе рассуждения, можно показать, что $B_{k+1}(\zeta)$ делится на $B_k(\zeta)$, $0\leqslant k\leqslant n$ и что при этом частное является j-элементарным двучленным множителем полного ранга. Это означает, что $B_n(\zeta)$ разлагается на произведение j-элементарных двучленных множителей полного ранга $B_n(\zeta)=b_n(\zeta)\,b_{n-1}(\zeta)\cdots b_1(\zeta)\,b_0(\zeta)$. (2.17) Полученные двучленные множители $b_k(\zeta)$, $0\leqslant k\leqslant n$ можно выразить непосредственно через параметры $c_0, c_1, \ldots, c_n$:

$$b_k(\zeta)=I+\frac{1-\zeta}{\zeta}\,j\left(\begin{bmatrix}\Lambda_{q,\,k}(0) & 0\\ 0 & \Lambda_{p,\,k}(1)\end{bmatrix}H_k\begin{bmatrix}\Lambda_{q,\,k}^*(1) & 0\\ 0 & \Lambda_{p,\,k}^*(1)\end{bmatrix}-\right.$$
$$\left.-\begin{bmatrix}\Lambda_{q,\,k-1}(1) & 0\\ 0 & \Lambda_{p,\,k-1}(1)\end{bmatrix}H_{k-1}\begin{bmatrix}\Lambda_{q,\,k-1}^*(1) & 0\\ 0 & \Lambda_{p,\,k-1}^*(1)\end{bmatrix}\right), \qquad (2.18)$$

а $b_0(\zeta)$ имеет вид (2.7).

Аналогично можно получить разложение $\tilde{B}_n(\zeta)=\tilde{b}_0(\zeta)\,\tilde{b}_1\zeta)\ldots$ $\ldots\tilde{b}_n(\zeta)$, где при $k=1,\,2,\,\ldots,\,n$

$$\tilde{b}_k(\zeta)=I+(1-\zeta)\left(\begin{bmatrix}\Lambda_{p,\,k}(1) & 0\\ 0 & \Lambda_{q,\,k}(1)\end{bmatrix}\tilde{H}_k\begin{bmatrix}\Lambda_{p,\,k}^*(1) & 0\\ 0 & \Lambda_{q,\,k}^*(1)\end{bmatrix}-\right.$$
$$\left.-\begin{bmatrix}\Lambda_{p,\,k-1}(1) & 0\\ 0 & \Lambda_{q,\,k-1}(1)\end{bmatrix}\tilde{H}_{k-1}\begin{bmatrix}\Lambda_{p,\,k-1}^*(1) & 0\\ 0 & \Lambda_{q,\,k-1}^*(1)\end{bmatrix}\right)\tilde{j}\,. \qquad (2.19)$$

а $\tilde{b}_0(\zeta)$ имеет вид (2.16).

§ 3. Решение основных матричных неравенств. Будем решать основные матричные неравенства (S) и $(\tilde{S})$ в предположении невырожденности так называемого основного информационного блока $A_n=I-C_nC_n^*>0$. Такую задачу Шура будем называть невырожденной. Случай вырождения информационного блока требует спельного рассмотрения, и ему будет посвящена отдельная работа. Полное описание совокупности решений основных матричных неравенств в невырожденном случае дают следующие два утверждения.

Теорема 3.1. *Общее решение* $\theta(\zeta)$ *основного матричного неравенства* (S) *представляется в виде дробно-линейного преобразования произвольной матрицы-функции* $\omega(\zeta)\in S_{p,q}$ $\theta(\zeta)=[\omega(\zeta)b(\zeta)+d(\zeta)]^{-1}[\omega(\zeta)a(\zeta)+c(\zeta)]$ **(3.1)**, *матрица коэффициентов которого строится по матрице* C_n

$$B_n(\zeta)=\begin{bmatrix} a(\zeta) & b(\zeta)\\ c(\zeta) & d(\zeta)\end{bmatrix}=$$

$$=I+\frac{1-\zeta}{\zeta}j\begin{bmatrix}\Lambda_{q,n}(1) & 0\\ 0 & \Lambda_{p,n}(1)\end{bmatrix}H_n\begin{bmatrix}\Lambda^*_{q,n}\left(\frac{1}{\bar\zeta}\right) & 0\\ 0 & \Lambda^*_{p,n}\left(\frac{1}{\bar\zeta}\right)\end{bmatrix} \qquad (3.2)$$

и является j*-растягивающим элементарным кратным множителем полного ранга с полюсом кратности* $n+1$ *в точке* $\zeta=0$.

Теорема 3.2. *Общее решение* $\theta(\zeta)$ *основного матричного неравенства* $(\tilde S)$ *представляется в виде дробно-линейного преобразования произвольной матрицы-функции* $\omega(\zeta)\in S_{p,q}$ $\theta(\zeta)=[\tilde a\times(\zeta)\omega(\zeta)+\tilde b(\zeta)][\tilde c(\zeta)\omega(\zeta)+\tilde d(\zeta)]^{-1}$ **(3.3)**, *матрица коэффициентов которого строится по матрице* C_n

$$\tilde B_n=(\zeta)\begin{bmatrix}\tilde a(\zeta) & \tilde b(\zeta)\\ \tilde c(\zeta) & \tilde d(\zeta)\end{bmatrix}=$$

$$=I+(1-\zeta)\begin{bmatrix}\Lambda_{p,n}(\zeta) & 0\\ 0 & \Lambda_{q,n}(\zeta)\end{bmatrix}\tilde H_n\begin{bmatrix}\Lambda^*_{p,n}(1) & 0\\ 0 & \Lambda^*_{q,n}(1)\end{bmatrix}\tilde j \qquad (3.4)$$

и является $\tilde j$*-растягивающим элементарным кратным множителем полного ранга с полюсом кратности* $n+1$ *в точке* $\zeta=\infty$.

Приведенные утверждения доказываются точно так же, как и в случае квадратных матриц [4]. Отметим, что основным при этом является доказательство того, что неравенства (S) и $(\tilde S)$ можно переписать соответственно в виде

$$[\theta(\zeta),\ I]\frac{B_n^{-1}(\zeta)\,j\,B_n^{*-1}(\zeta)}{1-|\zeta|^2}\begin{bmatrix}\theta^*(\varepsilon)\\ I\end{bmatrix}\geqslant 0, \qquad (3.5)$$

$$\text{и}\ [\theta^*(\zeta),\ I]\frac{\tilde B_n^{*-1}(\zeta)\,\tilde j\,\tilde B_n^{-1}(\zeta)}{1-|\zeta|^2}\begin{bmatrix}\theta(\zeta)\\ I\end{bmatrix}\geqslant 0. \qquad (3.6)$$

Затем, разбивая матрицы-функции $B_n(\zeta)$ и $\tilde B_n(\zeta)$ на блоки, получаем решение этих неравенств соответственно в виде (3.1) и (3.3).

Пусть $\tilde B_n(\zeta)\{\omega(\zeta)\}=[\tilde a(\zeta)\omega(\zeta)+\tilde b(\zeta)][\tilde c(\zeta)\omega(\zeta)+\tilde d(\zeta)]^{-1}$, тогда (3.3) можно переписать в виде $\theta(\zeta)=\tilde B_n(\zeta)\{\omega(\zeta)\}$.

Параметром тут, как и выше, служит произвольная функция $\omega(\zeta)\in S_{p,q}$.

Таким образом, вся информация о задаче Шура содержится в кратном множителе полного ранга $\tilde B_n(\zeta)$, и каждое свойство этой функции находит отражение в задаче. То есть невырожденная задача Шура адекватна заданию кратного множителя $\tilde{B}_n(\zeta)$. Очевидно, аналогичный вывод можно сделать и относительно кратного множителя $B_n(\zeta)$.

§ 4. Пошаговое решение задачи Шура. Параметры Шура. Сейчас, следуя замечательной идее И. Шура [5], будем решать задачу Шура последовательно, предполагая, как и раньше, что $A_n = I - C_n C_n^* > 0$ **(4.1)**.

1. Решим ее сначала в самом простом случае, когда задан лишь свободный член c_0. Из теоремы 3.2 следует, что совокупность матриц-функций $\theta(\zeta) \in S_{p,q}$, имеющих матрицу c_0 свободным членом при разложении в степенной ряд $\theta(\zeta) = c_0 + \ldots$, описывается равенством $\theta(\zeta) = \tilde{b}_0(\zeta)\{\omega(\zeta)\}$ **(4.2)**, где $\tilde{b}_0(\zeta)$ имеет вид (2.13), а параметр $\omega(\zeta) \in S_{p,q}$.

2. Будем теперь искать среди всех полученных решений $\theta(\zeta)$ такие, которые имели бы заданными два коэффициента ряда $\theta(\zeta) = c_0 + c_1\zeta + \cdots$.
Каждая такая функция $\theta(\zeta)$ допускает представление в виде (4.2). Опишем совокупность получаемых при этом параметров $\omega(\zeta)$. Положим для удобства $\theta_1(\zeta) = \omega(\zeta)$ и пусть $\theta_1(\zeta) = c_0^{(1)} + \cdots$ Тогда из соотношения (4.2), переписанного в виде $\theta(\zeta) = \tilde{b}_0(\zeta) \times \{\theta_1(\zeta)\}$ **(4.3)**, следует $[I + c_1 c_0^*(I - c_0 c_0^*)^{-1}] c_0^{(1)} = [I + c_1 c_0^*(I - c_0 c_0^*)^{-1}] c_0 + c_1$.

Из (4.1) находим, что матрица $I + c_1 c_0^*(I - c_0 c_0^*)^{-1}$ имеет обратную. Значит, $c_0^{(1)} = c_0 + [I + c_1 c_0^*(I - c_0 c_0^*)^{-1}]^{-1} c_1$ **(4.4)**. Откуда получаем, что $I - c_0^{(1)} c_0^{(1)*} > 0$ **(4.5)**.

Таким образом, для того чтобы произвольная функция $\theta_1 \times (\zeta) \in S_{p,q}$ определяла по формуле (4.3) решение задачи Шура $\theta(\zeta)$ с двумя заданными коэффициентами ряда $\theta(\zeta) = c_0 + c_1\zeta + \ldots$, $A_1 = I - C_1 C_1^* > 0$ необходимо, чтобы $\theta_1(\zeta) = c_0^{(1)} + \ldots$, где $c_0^{(1)}$ определяется по формуле (4.4), при этом выполняется (4.5).

Проводя простые выкладки, можно показать, что приведенные условия являются не только необходимыми, но и достаточными.

Определяя по предыдущему все функции $\theta_1(\zeta) \in S_{p,q}$ вида $\theta_1(\zeta) = c_0^{(1)} + \ldots$, $I - c_0^{(1)} c_0^{(1)*} > 0$, получим представление $\theta_1(\zeta)$ в виде дробно-линейного преобразования произвольной функции $\theta_2(\zeta) \in S_{p,q}$: $\theta_1(\zeta) = \tilde{b}_1(\zeta)\{\theta_2(\zeta)\}$, где $\tilde{b}_1(\zeta)$ имеет вид (2.13) с матрицей $c_0^{(1)}$ вместо c_0.

Суперпозиция дробно-линейных преобразований $\theta(\zeta) = \tilde{b}_0(\zeta) \times \{\tilde{b}_1(\zeta)\{\theta_2(\zeta)\}\}$, $\theta_2(\zeta) \in S_{p,q}$ с матрицей коэффициентов $\tilde{b}_0(\zeta)\tilde{b}_1(\zeta)$ будет общим видом матриц-функций $\theta(\zeta)$ с двумя заданными коэффициентами ряда $\theta(\zeta) = c_0 + c_1\zeta + \cdots$.

3. Очевидно, описанная процедура продолжаема. После $n+1$ шагов придем к следующему результату.

Общий вид матриц-функций $\theta(\zeta) \in S_{p,\,q}$ с $n+1$ предписанными первыми коэффициентами степенного ряда $\theta(\zeta) = c_0 + c_1\zeta + \ldots + c_n\zeta^n + \ldots$, $A_n = I - C_n C_n^* > 0$ представляется в виде суперпозиции дробно-линейных преобразований $\theta(\zeta) = \tilde{b}_0(\zeta)\{\tilde{b}_1(\zeta)\{\ldots\{\tilde{b}_n(\zeta)\{\theta_{n+1}(\zeta)\}\}\ldots\}\}$, с произвольной $\theta_{n+1}(\zeta) \in S_{p,\,q}$ в качестве параметра, где

$$\tilde{b}_k(\zeta) = I + (1-\zeta)\begin{bmatrix} I \\ c_0^{(k)*} \end{bmatrix}(I - c_0^{(k)}\, c_0^{(k)*})^{-1}\,[I,\ c_0^{(k)}]\,\tilde{j}, \tag{4.6}$$

при этом $c_0^{(0)} = c_0$. Матрица коэффициентов результирующего дробно-линейного преобразования имеет вид $\overset{n}{\underset{k=0}{\widehat{\prod}}} \tilde{b}_k(\zeta)$ (4.7). Следовательно, задаче Шура, удовлетворяющей условию $A_n > 0$, соответствует произведение (4.7) двучленных множителей полного ранга (4.6).

Справедливо и обратное утверждение, а именно, что произвольному произведению (4.7) двучленных множителей полного ранга (4.6) отвечает вполне определенная задача Шура.

Итак, задача Шура со строго положительным информационным блоком (4.1) адекватна заданию конечного произведения (4.7) двучленных $\tilde{j}$-элементарных множителей полного ранга с полюсом в точке $\zeta = \infty$.

Отметим, что параметры $c_0^{(0)}, c_0^{(1)}, \ldots, c_0^{(n)}$ называются параметрами Шура.

4. Остановимся на связи между произведением (4.7) и кратным множителем $\tilde{B}_n(\zeta)$, соответствующим задаче Шура. Произведение (4.7) является $\tilde{j}$-элементарной кратной матрицей-функцией полного ранга. По теореме о параметризации такая матрица-функция представима в виде (2.11):

$$\overset{n}{\underset{k=0}{\widehat{\prod}}} \tilde{b}_k(\zeta) = I + (1-\zeta)\begin{bmatrix} \Lambda_{p,\,n}(\zeta) & 0 \\ 0 & \Lambda_{q,\,n}(\zeta) \end{bmatrix} \tilde{H}_n \begin{bmatrix} \Lambda_{p,\,n}^*(1) & 0 \\ 0 & \Lambda_{q,\,n}^*(1) \end{bmatrix} \tilde{j},$$

где матрица $\tilde{H}_n$ определяется через матрицы $c_0, c_1, \ldots, c_n$, совпадающими с данными задачи. Значит, $\overset{n}{\underset{k=0}{\widehat{\prod}}} \tilde{b}_k(\zeta) = \tilde{B}_n(\zeta)$.

Эта связь позволяет, в частности, выразить, пользуясь формулами (2.16), двучленные множители $\tilde{b}_k(\zeta)$, построенные по параметрам Шура, непосредственно через данные задачи.

5. Ранее мы отправлялись от неравенства $(\tilde{S})$. Если идти от неравенства (S) получим те же результаты, но в терминах j-элементарных множителей вида (2.7). В частности, что задача Шура с невырожденным блоком (4.1) адекватна заданию конечного произведения $\overset{n}{\underset{k=0}{\widehat{\prod}}} b_k(\zeta)$ двучленных j-элементарных мно-

жителей полного ранга с полюсом в точке $\zeta = 0$

$$b_k(\zeta) = I + \frac{1-\zeta}{\zeta} j \begin{bmatrix} c_0^{(k)*} \\ I \end{bmatrix} (I - c_0^{(k)} c_0^{(k)*})^{-1} [c_0^{(k)}, I] \qquad (4.8)$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

где $c_0^{(0)}, c_0^{(1)}, \ldots c_0^{(n)}$ — те же параметры Шура.

6. Полученные результаты позволяют поставить в соответствие каждой матрице-функций $\theta(\zeta) \in S_{p,q}$ $\theta(\zeta) = c_0 + c_1\zeta + \ldots + c_n\zeta^n + \ldots$, для которой все информационные блоки строго положительны. $A_n > 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ — бесконечное произведение двучленных множителей полного ранга видов (4.6), (4.8):

$$\widehat{\prod_{k=0}^{\infty}} \tilde{b}_k(\zeta) \left(\widehat{\prod_{k=0}^{\infty}} b_k(\zeta) \right). \qquad (4.9)$$

Обратно, каждому бесконечному произведению множителей видов (4.6), (4.8) соответствует вполне определенная матрица-функция $\theta(\zeta) \in S_{p,q}$.

В задаче Шура произведения Бляшке-Потапова (4.9) всегда расходятся. Точная характеристика расходимости дается с помощью радиусов предельного круга Вейля, о котором речь пойдет в следующей части данной работы.

Список литературы: 1. *Ковалишина И. В., Потапов В. П.* Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны — Пика. — Докл. АН Арм. ССР, 1974, **LIX**, № 1, с. 17 — 22. 2. *Ковалишина И. В.* j-растягивающие матрицы-функции в задаче Каратеодори. — Докл. АН Арм. ССР, 1974, **LIX**, № 3, с. 129 — 135. 3. *Ковалишина И. В.* j-растягивающие матрицы-функции и классическая проблема моментов. — Докл. АН Арм. ССР, 1975, **LX** № 1, с. 3 — 10. 4. *Галстян Л. А.* Аналитические j-растягивающие матрицы-функции и проблема Шура.— Изв. АН Арм. ССР, 1977, **XII**, № 3, с. 204 — 228. 5. *Schur I.* Über Potenzreihen, die im Innern der Einheitskreises beschränkt Sind. — Iourn. f. Math., 1917, 147, 205 — 232; 1918, 148, 122 — 145. 6. *Ефимов А. В., Потапов В. П.* j-растягивающие матрицы-функции и их роль в аналитической теории электрических цепей.— Усп. мат. наук, 1973, XXVIII, вып. 1 (169), с. 65—130.

Поступила в редколлегию 12.05.80.