УДК 513.88

М. М. ДРАГИЛЕВ

О СИММЕТРИЧНЫХ И НОРМИРОВАННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть X — локально выпуклое пространство (л. в. п.) с определяющей системой преднорм $(|\cdot|_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, (x_n) и (y_n) — две последовательности элементов в X. Условимся писать $(x_n)\sim(y_n)$, если последовательности (x_n) и (y_n) слабо эквивалентны в том смысле, что выполнено условие: $\forall\gamma\in\Gamma\ \exists\gamma_1\in\Gamma\ \exists C>0\ \ |x_n|_\gamma\leqslant C\ |y_n|_{\gamma_1}$, $|y_n|_\gamma\leqslant C\,|x_n|_{\gamma_1}$ $(n=1,2,\ldots)$

Определение 1. *Последовательность* $(x_n)\subset X$, $x_n\neq 0$ $(n=1,2,\ldots)$, *называют*: а) ***симметричной*** *(относительно слабой эквивалентности), если* $(x_n)\sim(x_{\sigma(n)})$ *для любой перестановки индексов* $\sigma(n)$ *и* ***симметризуемой***, если *ее можно сделать симметричной умножением элементов на положительные числа (нормировкой);* б) ***нормированной***, *если выполнены условия* (ср. [1]) 1) $\exists_{\gamma_0}\in\Gamma\ \varliminf_{n\to\infty}|x_n|_{\gamma_0}>0$, 2) $\forall_\gamma\in\Gamma\ \varlimsup_{n\to\infty}|x_n|_\gamma<\infty$, *и* ***нормируемой***, *если выполнение этих условий достигается в результате нормировки;* в) ***почти симметричной***, *если для любой перестановки* $\sigma(n)$ *найдется последовательность положительных чисел* (λ_n), *такая, что* $(x_n)\sim(\lambda_n\,x_{\sigma(n)})$; г) ***почти нормируемой***, *если для любой последовательности неотрицательных чисел* (t_n), *таких, что* $\varliminf_{n\to\infty} t_n=0$, *найдется последовательность* (λ_n), $\lambda_n>0$ $(n=1,2,\ldots)$, *удовлетворяющая условиям*

$$1)\ \exists\gamma_0\in\Gamma\ \varliminf_{n\to\infty}\lambda_n\ |x_n|_{\gamma_0}>0,\quad 2)\ \forall\gamma\in\Gamma\ \varliminf_{n\to\infty}\ t_n\lambda_n\ |x_n|_\gamma=0.$$

Далее примем, что последовательность (x_n) ***вырождена***, *если ряд вида* $t_1x_1+t_2x_2+\cdots+t_nx_n+\cdots$ *либо сходится в топологии* X, *каковы бы ни были числа* t_n, *либо расходится всякий раз, когда бесконечное число* t_n *отлично от нуля. В противном случае последовательность* (x_n) *назовем* ***невырожденной***. *Мы докажем, в частности, следующее утверждение.*

Теорема 1. *Всякая невырожденная почти симметричная последовательность элементов л. в. п. X почти нормируема.*

С этой целью для произвольной последовательности $(x_n) \subset X$ обозначим чевез $\delta_i((x_n))$ $(i = 1, 2)$ классы всех тех последовательностей (t_n), которые, соответственно, удовлетворяют следующим условиям [2]: 1) $\exists \gamma_0 \in \Gamma\, \forall \gamma \in \Gamma\, \exists C > 0\, |t_n|\, |x_n|_\gamma \leqslant C\, |x_n|_{\gamma_0}$; 2) $\forall \gamma \in \Gamma\, \exists \gamma_1 \in \Gamma\, \exists C > 0\, |t_n|\, |x_n|_\gamma \leqslant C\, |x_n|_{\gamma_1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Нетрудно видеть, что так определенные классы $\delta_i((x_n))$ инвариантны относительно выбора определяющей системы преднорм в X (а также относительно нормировки последовательности (x_n) и слабой эквивалентности).

Лемма 1. Последовательность $(x_n) \subset X$ тогда и только тогда нормируема, когда $x_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $\delta_1((x_n)) = l_\infty$.

Действительно, если $\delta_1((x_n)) = l_\infty$, то, в частности, $(t_n) \in \delta_1((x_n))$, где $t_n = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, а это влечет выполнение условия

$$\exists \gamma_0 \in \Gamma \forall \gamma \in \Gamma \exists C \;\; \|x_n|_\gamma \leqslant C\, |x_n|_{\gamma_0} (n = 1, 2, \ldots) \; (1).$$

Отсюда видно, что $|x_n|_{\gamma_0} \neq 0$ при всех n. Полагая $\lambda_n = |\, x_n\, |_{\gamma_0}^{-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, получим два соотношения, означающие, что последовательность $(\lambda_n x_n)$ нормирована: 1) $\exists \gamma_0 \in \Gamma\, |\lambda_n| x_n|_{\gamma_0} = 1$; 2) $\forall \gamma \in \Gamma | \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \lambda_n\, |x_n|_\gamma < \infty$.

Обратно, если последовательность (x_n) нормируема, то найдется последовательность (λ_n), для которой предыдущие соотношения выполнены. Следовательно, $x_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и при некотором C, зависящем от γ, выполнено условие (1). Следовательно, $l_\infty \subset \delta_1((x_n))$, и так, как всегда верно обратное включение, $l_\infty = \delta_1((x_n))$.

Лемма 2. Последовательность $(x_n) \subset X$ тогда и только тогда почти нормируема, когда $|\, x_n\, |_{\gamma_0} \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, хотя бы для одного $\gamma_0 \in \Gamma$ и $\delta_2((x_n)) = l_\infty$.

Доказательство. Пусть сначала $|\, x_n\, |_{\gamma_0} \neq 0$ при всех n и $\delta_2((x_n) = l_\infty$. Так как множество Γ направлено по возрастанию, для любого $\gamma \in \Gamma$ найдется $\gamma_1 \in \Gamma$, такое что $\gamma_1 > \gamma$ и $\gamma_1 > \gamma_0$ и, следовательно, $|\, x_n\, |_{\gamma_1} \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Выбрав, если нужно, эквивалентную систему преднорм, будем иметь $|\, x_n\, |_\gamma \neq 0$ $(\gamma \in \Gamma$, $n = 1, 2, \ldots)$. Если последовательность (x_n) не является почти нормируемой, то найдется последовательность (t_n), такая, что $\underline{\lim}\, t_n = 0$ и при этом выполнено следующее условие:

$$\forall \gamma_0 \in \Gamma \exists \gamma \in \Gamma | \underline{\lim_{n \to \infty}} \;\; t_n \frac{|\, x_n\, |_\gamma}{|\, x_n\, |_{\gamma_0}} > 0.$$

Другими словами, $\forall \gamma_0 \in \Gamma\, \exists \gamma \in \Gamma \;\; | \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \;\; t_n^{-1} \dfrac{|\, x_n\, |_{\gamma_0}}{|\, x_n\, |_\gamma} < \infty$, а это значит, что $(t_n^{-1}) \in \delta_2((x_n))$, т. е. $\delta_2((x_n)) \neq l_\infty$. Обратно, если последовательность (x_n) почти нормируема, то $|\, x_n\, |_{\gamma_0} \neq 0$

при некотором $\gamma_0 \in \Gamma$ и всех $n = 1, 2, \ldots$. Если $\delta_2((x_n)) \neq l_\infty$, то найдется последовательность $(t_n) \in \delta_2((x_n))$ такая, что $\overline{\lim} t_n = \infty$. По определению для такой последовательности выполнено соотношение $\forall \gamma_0 \in \Gamma \exists \gamma \in \Gamma \exists C | t_n | x_n |_{\gamma_0} \leqslant C | x_n |_\gamma (n = 1, 2, \ldots)$ **(2).** С другой стороны, поскольку $\underline{\lim} t_n^{-1} = 0$, при некоторых $\gamma_0 \in \Gamma$ и $\lambda_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ будем иметь $\underline{\lim}_{n \to \infty} \lambda_n | x_n |_{\gamma_0} > 0$, и в то же время $\forall \gamma \in \Gamma | \underline{\lim}_{n \to \infty} t_n^{-1} \lambda_n | x_n |_\gamma = 0$, которое противоречит неравенству (2). Этим заканчивается доказательство.

В работе [2] по существу доказано, что если (x_n) — невырожденная почти симметричная последовательность, то $\delta_2((x_n)) = l_\infty$. Отсюда и из леммы 2 следует теорема 1.

При дополнительном условии о том, что пространство метризуемо, там же (см. [2, лемма 3]) показано, что $\delta_1((x_n)) = l_\infty$. С помощью леммы 1 вытекает

Теорема 2. *В метризуемой л. в. п. всякая невырожденная почти симметричная последовательность нормируема.*

Следствие 1. В метризуемом л. в. п. невырожденная последовательность тогда и только тогда симметрична, когда она нормирована. Действительно, всякая нормированная последовательность симметрична (относительно слабой эквивалентности). Обратно, невырожденная симметричная последовательность почти симметрична и в силу теоремы 2 нормируема. Доказываемое утверждение вытекает отсюда и из следующего замечания: если (x_n) — нормированная последовательность, а числа λ_n таковы, что $\underline{\lim} \lambda_n = 0$, либо $\overline{\lim} \lambda_n = \infty$, то последовательность $(\lambda_n x_n)$, очевидно, не симметрична.

Следствие 2. В метризуемом л. в. п. всякая невырожденная почти симметричная последовательность симметризуема.

Неизвестно, верно ли то же для произвольного л. в. п. X. Заметим далее, что если (x_n) — базис в л. в. п. X, и последовательность (x_n) вырождена, то X алгебраически изоморфно либо пространству s всех последовательностей чисел, либо пространству s' всех финитных числовых последовательностей (если X метризуемо, то имеет место топологический изоморфизм: $X \sim s$). Из сказанного, в частности, вытекает

Следствие 3. Согласно работам [3], [4] в F — пространстве X, не изоморфном s, всякий симметричный (в более сильном смысле) шаудеровский базис нормирован.

В работе [1] это утверждение распространяется на полные бочечные л. в. п., не изоморфные пространствам s и s'. Следующий пример показывает, что требование бочечности существенно.

Пусть X совпадает с векторным пространством l_1, в котором топология задана системой преднорм: $|(t_n)|_\alpha = \sum_n | t_n | \, |\alpha_n|$ $((t_n) \in l_1$, $(\alpha_n) = \alpha \in c_0)$. Тогда последовательность координатных ортов

(e_n), $e_n = (\delta_{in})_{i=1}^{\infty}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, очевидно, является симметричным шаудеровским базисом в X. В то же время, как легко проверить, $\delta_1((e_n)) = c_0 \neq l_\infty$, и по лемме 1 базис (l_n) не нормируем. Из сказанного и из теоремы 1 вытекает

Следствие 4. Существуют пространства с почти нормируемым, но не нормируемым, невырожденным базисом.

Рассмотрим класс U всех л. в. п. X, имеющих невырожденный безусловный базис и обладающих тем свойством, что любые два безусловных базиса в X нормировкой можно сделать эквивалентными. Очевидно, все безусловные базисы в X почти симметричны. Из теоремы 1 и 2 вытекает

Следствие 5. В метризуемом U-пространстве все безусловные базисы нормируемы, в неметризуемом — почти нормируемы.

Неизвестно, существуют ли полные U-пространства, не изоморфные одному из пространств l_1, l_2 и c_0. Такие пространства не могут быть банаховыми [5], а также пространствами Кете [2].

Список литературы: 1. *Kalton N. I.* Unconditional and normalised lases. — Stud. Math, 1970, 38, p. 249—253. 2. *Драгилев М. М.* Пространства Кете с предэквивалентными безусловными базисами. — Актуальные вопросы мат. анализа, Ростов н/Д, 1978, p. 47—56. 3. *Cae N.* On symmetric Schouder bases i Frechet spaces. — Stud. Math, 1969, № 17, c. 95—98. 4. *Ruckle N.* Symmetric Coordinate space and symmetric basis. — Canad I. Math, 1967, № 19, p. 828—838. 5. *Lindenstrauss I.* Tzafriril., classical Banach spaces Lect. — Notes Mathem 1973, 338, № 9, c. I—243.

Поступила в редколлегию 02. 10. 79.