УДК 513.88

М. Ю. ЛЮБИЧ, Ю. И. ЛЮБИЧ

ТЕОРИЯ ПЕРРОНА — ФРОБЕНИУСА ДЛЯ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ И ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ПОЛУГРУПП

1. **Введение.** Основное содержание настоящей статьи, так же как и предшествующей ей статьи [2], было анонсировано в [1]. Прежде чем к нему переходить, напомним читателю теорему об отщеплении граничного спектра, которой вместе с различными ее вариантами, обобщениями и ближайшими следствиями была посвящена работа [2].

Пусть S — топологическая полугруппа, T — ее п.п. представление в банаховом пространстве B. Тогда сильное замыкание $\beta_T = \overline{\operatorname{Im} T}$ является компактной полугруппой и, следовательно, обладает наименьшим двусторонним идеалом K — *ядром Сушкевича*. Если K — группа и, тем самым, — компактная группа, то представление T называется *элементарным*. Единица P группы K называется *граничным проектором* представления T (очевидно, $P^2 = P$). Подпространства $B_0 = \operatorname{Ker} P$, $B_1 = \operatorname{Im} P$ называются соответственно *внутренним и граничным* для T. Они инвариантны, так как P коммутирует со всеми операторами $T(s)$ $(s \in S)$. Очевидно, $B = B_0 \dotplus B_1$. При этом B_0 состоит из тех векторов x, для которых орбита $O(x) = \{T(s)x\}$ «асимптотична» нулю (т. е. $0 \in \overline{O(x)}$), а B_1 является замыканием линейной оболочки тех векторов x, орбиты которых лежат в конечномерных подпространствах,

и подпредставления $T(s) \mid \operatorname{Lin} O(x)$ эквивалентны неприводимым унитарным представлениям группы K.

Для абелевой полугруппы S все п. п. представления элементарны. Однако в этом случае существует более широкий класс так называемых *асимптотически почти периодических* (*а. п. п.*) представлений, для которых теорема об отщеплении граничного спектра остается в силе, причем описание внутреннего подпространства уточняется следующим образом: $B_0 = \{x \mid \lim\limits_{s\to\infty} T(s)x = 0\}$, где предельный переход совершается по естественному направлению в S: $s_1 \geqslant s_2$, если s_1 делится на s_2 или $s_1 = s_2$. Что касается граничного подпространства B_1, то оно превращается в замыкание линейной оболочки весовых векторов, отвечающих унитарным характерам группы K. Отметим, что в данном случае K есть ω — предельное множество полугруппы β_T. Это по-прежнему компактная группа, хотя β_T может уже не быть компактной.

Абелева ситуация охватывает, в частности п.п. операторы A, для которых по определению представление $n \mapsto A^n$ полугруппы Z_+ является п.п. (свойство а. п. п. здесь эквивалентно п.п.).

В настоящей статье мы строим на основе [2] спектральную теорию неотрицательных п. п. (в абелевом случае — а. п. п.) представлений в пространстве $C(Q)$ непрерывных функций на компакте Q. Ее прототипом является классическая теория Перрона — Фробениуса, относящаяся первоначально к неотрицательным матрицам, но обобщенная затем М. Г. Крейном и М. А. Рутманом на неотрицательные компактные операторы в банаховом пространстве с конусом. Центральным фактом этой теории является теорема существования неотрицательного инвариантного вектора и дуального к нему неотрицательного линейного функционала. Мы начнем с обобщения этой «теоремы Перрона — Фробениуса» на п. п. представления в $C(Q)$*. В конце статьи будет изложено одно применение к динамическим системам.

2. Обобщение теоремы Перрона — Фробениуса. Условимся для краткости говорить, что представление T топологической полугруппы S в пространстве $C(Q)$ непрерывных функций на компакте Q принадлежит *классу* N, если 1) T — элементарное п. п. (или в случае абелевой S — а.п.п.); 2) T неотрицательно, т. е. $T(s) \geqslant 0$ для всех $s \in S$; 3) спектральный радиус $r(T(s)) = 1$ для всех $s \in S$. Именно этот класс представлений будет объектом нашего исследования.

Теорема 2.1. *Для любого представления класса N существует инвариантная функция $h \geqslant 0$ и инвариантная мера***) μ, *дуальная к h в том смысле, что*

$$\mu(h) = \int\limits_Q h\,d\mu = 1. \tag{2.1}$$

---

* Дальнейшее обобщение на банахово пространство с конусом содержится в [1].

** Термин «мера», если не оговорено противное, означает неотрицательную меру.

Доказательство. Положим

$$h = \int_K (A1)\, dA \tag{2.2}$$

где dA — нормированная мера Хаара на группе K. Все $A \in K$ неотрицательны, поэтому $h \geqslant 0$. Функция $\varepsilon = P1 \geqslant 0$ отлична от нуля, ибо в силу неотрицательности представления $\|T(s)1\| = \|T(s)\|$, а $\|T(s)\| \geqslant r(T(s)) = 1$. Отсюда $\|\varepsilon\| \geqslant 1$, поскольку $P \in \{\overline{T(s)}\}$. Теперь из (2.1) видно, что $h \neq 0$ (положительный вклад в h вносит окрестность единицы P группы K). Наконец, h — инвариантная для T функция, ибо $T(s)A = T(s)PA$, а $T(s)P \in K$, так как K — двусторонний идеал в β_T.

Для построения меры μ возьмем любую меру $\lambda \geqslant 0$, такую, что $\lambda(h) = 1$ и положим

$$\mu(\varphi) = \int_K \lambda(A\varphi)\, dA \quad (\varphi \in C(Q)). \tag{2.3}$$

Этим определяется инвариантная мера μ, такая, что

$$\mu(h) = \int_K \lambda(Ah)\, dA = \int_K \lambda(h)\, dA = 1.$$

Использованная в доказательстве функция $\varepsilon = P1$ играет и в дальнейшем важную роль. Множество тех $t \in Q$, для которых $\varepsilon(t) > 0$, будет обозначаться через E_+. Построенная согласно (2.2) инвариантная функция h, которую мы назовем *канонической**, положительна на E_+. Вместе с тем она равна нулю вне E_+. Последним свойством обладают вообще все инвариантные функции и даже все функции из граничного подпространства $B_1 = \operatorname{Im} P$. Дело в том, что граничный проектор P неотрицателен, в силу чего действует по формуле

$$(P\varphi)(t) = \int_Q \varphi\, d\pi_t \quad (t \in Q), \tag{2.4}$$

где $\{\pi_t\}$ — соответствующее семейство мер. Отсюда

$$\varepsilon(t) = (P1)(t) = \int_Q d\pi_t \quad (t \in Q). \tag{2.5}$$

Следовательно, $|(P\varphi)(t)| \leqslant \|\varphi\|\, \varepsilon(t)$ $(t \in Q)$ и, если $\varepsilon(t_0) = 0$, то $(P\varphi(t_0) = 0$ для всех φ. Это замечание является исходным пунктом нашей работы [3], в которой описывается структура произвольного неотрицательного проектора в $C(Q)$. Некоторые факты из [3] существенно используются ниже. В частности, пусть

$$\Pi = \operatorname{supp} P \equiv \overline{\bigcup_{t \in Q} \operatorname{supp} \pi_t}, \quad E = E_+ \cap \Pi. \tag{2.6}$$

* Обозначение ее буквой h зафиксируем раз и навсегда.

Расссмотрим фактор-пространство $\tilde{E}$, получаемое отождествлением точек из E функциями вида $(P\varphi)/\varepsilon$. Оказывается, $\tilde{E}$ — компакт, а пространство $C(\tilde{E})$ порядково изоморфно граничному подпространству. Требуемый изоморфизм $V\colon B_1 \to C(\tilde{E})$ есть композиция сужения на E, деления на ε и естественного переноса на $\tilde{E}$. Отсюда, между прочим, ясно, что функции из B_1 однозначно определяются своими сужениями на E. Это можно усмотреть и непосредственно, поскольку (2.4) при $\varphi \in B_1$ дает

$$\varphi(t) = \int_E \varphi d\pi_t \quad (t \in Q). \tag{2.7}$$

Назовем представление T класса N *слабо положительным*, если $E_+ = Q$ (т. е. $\varepsilon > 0$) и $\Pi = Q$. Тогда и $E = Q$, компакт $\tilde{E}$ оказывается фактор-компактом $\tilde{Q}$ исходного Q. Для слабо положительного представления каноническая инвариантная функция h положительна (и $\mu > 0$, если в (2.3) $\lambda > 0$).

Представление T полугруппы S в $C(Q)$ называется *стохастическим* (или *марковским*), если таковы все $T(s)$, т. е. $T(s) \geqslant 0$, $T(s)1 = 1$ $(s \in S)$. По этому определению функция 1 инвариантна. Она же будет канонической инвариантной функцией в случае стохастического представления класса N, а утверждение теоремы 2.1 теперь содержательно сводится к существованию инвариантной вероятностной меры.

Подчеркнем еще, что для стохастического представления $\|T(s)\| = r(T(s)) = 1$.

3. Леммы о положительной эквивалентности. *Положительной эквивалентностью* неотрицательных представлений* называется эквивалентность, осуществляемая оператором, неотрицательным вместе со своим обратным.

Лемма 3.1. *Для того чтобы оператор $U \geqslant 0$ в $C(Q)$ был обратим в полугруппе неотрицательных операторов, необходимо и достаточно, чтобы он был мономиален, т. е. имел следующий вид:*

$$(U\varphi)(t) = \omega(t)\varphi(f^{-1}t) \ (t \in Q), \tag{3.1}$$

*где $\omega > 0$, $f \in \mathrm{Homeo}\, Q$. Функция ω и гомеоморфизм f однозначно определяются** оператором U.*

Необходимость. Сопряженный оператор U^*, будучи автоморфизмом конуса мер, биективно действует на множестве лучей конуса, а эти лучи определяются мерами Дирака δ_t $(t \in Q)$. Следовательно, $U^*\delta_t = \omega(t)\delta_{f^{-1}t}$, где $\omega > 0$, $f\colon Q \to Q$ — биекция. Непрерывность ω и f^{-1} следует из непрерывности U^*. Так как Q — компакт, то $f \in \mathrm{Homeo}\, Q$. Остается заметить, что $(U\varphi)(t) = (U^*\delta_t)\varphi$.

* Действующий, возможно, в разных пространствах с конусом.

** Конечно, в (3.1) можно написать $\varphi(ft)$ вместо $\varphi(f^{-1}t)$, но принятая нами запись удобнее для дальнейшего.

Достаточность. Если U имеет вид (3.1), то $(U^{-1}\psi)(t) = \psi(ft)/\omega(ft)$.

Однозначность. Из (3.1) следует, что $\omega = U1$, $\varphi(f^{-1}t) = (U\varphi)(t)/\omega(t)$ для всех φ, а этим f определяется однозначно.

Следствие. *Для того чтобы стохастический оператор U в $C(Q)$ был обратим в полугруппе неотрицательных (и, тем самым, в полугруппе стохастических) операторов, необходимо и достаточно, чтобы он был оператором подстановки, т. е. имел следующий вид:*

$$(U\varphi)(t) = \varphi(f^{-1}t), \tag{3.2}$$

где $f \in \mathrm{Homeo}\,Q$. Гомеоморфизм f однозначно определяется оператором U.

Рассмотрим теперь вопрос об условиях положительной эквивалентности представления класса N стохастическому.

Лемма 3.2. *Для того чтобы представление T класса N было положительно эквивалентно стохастическому, необходимо и достаточно выполнение любого из следующих четырех равносильных условий:* 1) $\inf(T(s)1)(t) > 0$; 2) $\varepsilon > 0$; 3) $h > 0$; 4) *существует инвариантная функция $H > 0$. Требуемая эквивалентность осуществляется оператором $\hat{H}$ умножения на H (в частности — оператором $\hat{h}$).*

Доказательство. Условие 1) необходимо. Действительно, пусть $T(s) = u^{-1}T_1(s)U$, где T_1 — стохастическое представление, $U \geqslant 0$, $U^{-1} \geqslant 0$. Положим $c_1 = \|U^{-1}\|^{-1}$, $c_2 = \|U\|^{-1}$. Тогда $U^{-1}1 \leqslant c_1^{-1}$, $U1 \leqslant c_2^{-1}$, откуда $U1 \geqslant c_1$, $U^{-1}1 \geqslant c_2$. Следовательно, $T(s)1 \geqslant c_1c_2$. $1) \Rightarrow 2)$, так как $\varepsilon\,(\in \overline{\{T(s)\,1\}}$. Импликация $2) \Rightarrow 3)$ вытекает из известного нам факта: $h\,|\,E_+ > 0$. Импликация $3) \Rightarrow 4)$ тривиальна. Наконец, при условии 4) представление $T_1 = \hat{H}^{-1}T\hat{H}$, очевидно, — стохастическое.

Следствие. *Слабо положительное представление класса N положительно эквивалентно стохастическому (по-прежнему слабо положительному).*

4. Связь представлений класса N с действиями компактных групп. Напомним, что *действием* топологической группы G на хаусдорфовом топологическом пространстве X называется гомоморфизм α: $G \to \mathrm{Homeo}\,X$, такой, что отображение $(g, x) \mapsto \alpha(g)x$ $(g \in G,\ x \in X)$ непрерывно. Если X — компакт, то α порождает стохастическое представление α^* группы G в $C(X)$:

$$(\alpha^*(g)\,\theta)(x) = \theta(\alpha(g^{-1})\,x) \quad (x \in X). \tag{4.1}$$

Если вдобавок группа G компактна, то α^* — представление класса N. Очевидно, α^* слабо положительно ($P = \mathrm{id}$). Мы покажем, что к этой модели сводится любое представление класса N на своем граничном подпространстве,

Теорема 4.1. *Каждому представлению T класса N соответствует некоторое действие α_T ядра Сушкевича K на компакте $\tilde{E}$, такое, что представление $T \mid B_1$ положительно эквивалентно естественному поднятию представления α_T^* на исходную полугруппу S.*

Доказательство. Ядро Сушкевича K можно рассматривать как компактную группу неотрицательных операторов в B_1 ($K \approx K \mid B_1$, $K \mid B_0 = 0$). Если V: $B_1 \to C(\tilde{E})$ — описанный ранее (на основе [3]) порядковый изоморфизм, то, полагая $\tilde{A} = VAV^{-1}$ ($A \in K$), мы получаем представление $\tilde{T}$ группы K в $C(\tilde{E})$, положительно эквивалентное исходной реализации в B_1. Так как все $\tilde{A} \geqslant 0$ и обратимы в полугруппе неотрицательных операторов, то по лемме 3.1 они мономиальны:

$$(\tilde{A}\theta)(\tilde{t}) = \omega_A(\tilde{t})\,\theta(f_A^{-1}\tilde{t}) \quad (\tilde{t} \in \tilde{E},\ A \in K). \tag{4.2}$$

Легко видеть, что $f_{A_1A_2} = f_{A_1}f_{A_2}$ и $f_A^{-1}\tilde{t}$ — непрерывная функция по совокупности A, $\tilde{t}$. Таким образом, мы имеем действие $\alpha_T(A)\tilde{t} = f_A^{-1}\tilde{t}$ группы K на компакте $\tilde{E}$. При этом $(\alpha_T^*\theta)(\tilde{t}) = \theta(f_A^{-1}\tilde{t})$. Покажем, что представление $\tilde{T}$ положительно эквивалентно α_T^*. Действительно, функция $H = Vh$ инвариантна для $\tilde{T}$, причем $H > 0$, так как $H(\tilde{t}) = (h/\varepsilon)(t)$ ($t \in E$, $\tilde{t} \in \tilde{E}$ — класс точки t). В силу (4.2) инвариантность H означает, что

$$H(\tilde{t}) = \omega_A(\tilde{t})\,H(f_A^{-1}\tilde{t}) \quad (\tilde{t} \in \tilde{E},\ A \in K). \tag{4.3}$$

Выражая отсюда $\omega_A(\tilde{t})$ и подставляя в (4.2), получаем*

$$(\tilde{A}\theta)(\tilde{t}) = \frac{H(\tilde{t})\,\theta(f_A^{-1}\tilde{t})}{H(f_A^{-1}\tilde{t})} = H(\tilde{t})\,\alpha_T^*\left[\frac{\theta}{H}\right](\tilde{t}),$$

т. е. $\tilde{A} = \tilde{H}\alpha_T^*\tilde{H}^{-1}$, что и требовалось.

Естественное поднятие представления α_T^* на S индуцируется цепочкой гомоморфизмов $S \xrightarrow[T]{} \beta_T \xrightarrow[\pi]{} K$, где π — умножение на P (по поводу последнего см. [2]).

Замечание. Требуемую эквивалентность осуществляет $\hat{H}^{-1}V$.

Следствие 1. *Любое представление класса N на своем граничном подпространстве положительно эквивалентно стохастическому.*

Если T с самого начала стохастическое, то действие α_T происходит на фактор-компакте $\tilde{\Pi}$ (или даже на $\tilde{Q}$, если T слабо положительно). Так как в этом случае $\varepsilon = 1$, то $1 \in B_1$. Изомор-

* С общей точки зрения смысл этой процедуры состоит в уничтожении тривиального коцикла ω.

физм V редуцируется к композиции сужения на Π и переноса на $\tilde{\Pi}$. Следовательно, $V1 = 1$. Поэтому $\omega_A \equiv 1$, и эквивалентность $T | B_1$ с α_T^* осуществляется стохастическим преобразованием V.

Действие α_T факторизует компакт $\tilde{E}$, превращая его в пространство орбит $\tilde{E}/K$, также компактное.

Следствие 2. *Подпространство инвариантных функций представления T порядково изоморфно пространству $C(\tilde{E}/K)$, а подпространство инвариантных мер — пространству мер на $\tilde{E}/K$.*

В самом деле, инвариантные функции представления T лежат в граничном подпространстве, а инвариантные функции эквивалентного представления α_T^* и его поднятия — одни и те же, так как образ S в K плотен. Для α_T^* инвариантность функции эквивалентна ее постоянству на каждой орбите. Подпространство таких функций естественно изоморфно $C(\tilde{E}/K)$ с сохранением порядка. Утверждение для мер вытекает из двойственности (см. [2]).

5. **Эргодические и неразложимые представления.** Представление T класса N называется *эргодическим*, если действие α_T транзитивно, т. е. для любых $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2 \in \tilde{E}$ существует $A \in K$, такой, что $f_A \tilde{t}_2 = \tilde{t}_1$, иными словами, компакт $\tilde{E}/K$ сводится к одной точке. Так как последнее равносильно одномерности пространства $C(\tilde{E}/K)$, то *для эргодичности представления класса N необходимо и достаточно, чтобы подпространство его инвариантных функций (мер) было одномерным.* Между прочим, это означает, что для эргодического представления можно канонизировать не только инвариантную функцию h, но и дуальную ей инвариантную меру. Определение эргодичности — глубоко внутреннее. Однако существует некоторое внешнее проявление эргодичности — так называемая неразложимость, обнаруживающее себя при дополнительном условии слабо положительности.

Представление $T \geqslant 0$ называется *неразложимым*, если для любой точки $t \in Q$ и любой функции $\varphi \geqslant 0$ $(\varphi \neq 0)$ существует $s \in S$, такое, что $(T(s)\varphi)(t) > 0$.

Теорема 5.1. *Для того чтобы представление T класса N было неразложимым, необходимо и достаточно, чтобы оно было эргодическим и слабоположительным.*

Необходимость. Пусть T неразложимо, но не эргодично. Тогда существует $t_0 \in E$ такое, что орбита $O(\tilde{t}_0) \subset \tilde{E}$ под действием α_T не совпадает с $\tilde{E}$. Так как $O(\tilde{t})$ — компакт (в силу компактности K), то существует функция $\theta \in C(\tilde{E})$ такая, что $(\theta \geqslant 0)$ $(\theta \neq 0)$, $\theta | O(\tilde{t}_0) = 0$, т. е. $\theta(\tilde{f}_A^{-1} \tilde{t}_0) = 0$ для всех $A \in K$. Полагая $\varphi = V^{-1}\hat{H}\theta \in C(Q)$, имеем $\varphi \geqslant 0$ $(\varphi \neq 0)$, $(T(s)\varphi)(t_0) = 0$ для всех $s \in S$ вопреки неразложимости.

Докажем, что T слабоположительно. Если $\varepsilon(t_0) = 0$ при некотором $t_0 \in Q$, то $\varphi(t_0) = 0$ для всех $\varphi \in B_1$, а тогда и $(T(s) \times \varphi)(t_0) = 0$ для всех $s \in S$, ибо B_1 инвариантно. Это противоречит неразложимости, ибо в B_1 существует функция $\varphi \geqslant 0$ $(\varphi \neq 0)$, например, $\varphi = \varepsilon$.

Если $\Pi \neq Q$, то найдется $\varphi \geqslant 0$ $(\varphi \neq 0)$ такая, что $\varphi | \Pi = 0$. Тогда $P\varphi = 0$ и, поскольку $B_0 = \operatorname{Ker} P$ инвариантно, то $PT(s)\varphi = 0$ $(s \in S)$. Отсюда $T(s)\varphi | \Pi = 0 \, (s \in S)$, ибо $T(s)\varphi \geqslant 0$. Это также противоречит неразложимости.

Достаточность. Пусть представление T эргодично и слабо положительно, но не неразложимо. Пусть $\varphi \geqslant 0$ $(\varphi \neq 0)$ и $t_0 \in Q$ таковы, что $(T(s)\varphi)(t_0) = 0$ для всех $s \in S$. Заменяя s на ss' и переходя по s' к точке $P\varphi$ замыкания орбиты $\{T(s')\varphi\}$, получаем $(T(s)P\varphi)(t_0) = 0$. При этом $P\varphi \geqslant 0$ и $P\varphi \neq 0$, ибо $\Pi = Q$. Следовательно, с самого начала можно считать, что $\varphi \in B_1$. Так как $\varepsilon > 0$, то $E_+ = Q$ и $E = Q$.

Изоморфизм V редуцируется к композиции деления на ε и естественного переноса $(t \mapsto \tilde{t})$ на $\tilde{Q}$. Если $\theta = \hat{H}^{-1}V\varphi$, то в силу предыдущего $\theta(f_A^{-1}\tilde{t}_0) = 0$ для всех $A \in K$. Ввиду эргодичности $\theta = 0$, откуда $\varphi = 0$, вопреки исходному допущению.

Исследуем теперь спектральные свойства эргодических представлений. Обозначим по-прежнему через h каноническую инвариантную функцию представления T.

Теорема 5.2. *Пусть ψ — весовая функция эргодического представления T, отвечающая унитарному весу χ. Тогда*

$$|\psi(t)| = \rho h(t) \quad (t \in E), \quad |\psi(t)| \leqslant \rho h(t) \quad (t \in Q), \tag{5.1}$$

где $\rho = \mathrm{const} > 0$.

Доказательство. Согласно замечанию к теореме 4.1 функция $\theta = \hat{H}^{-1}V\psi \in C(\tilde{E})$ — весовая для представления α_T^* и того же веса χ (продолженного на K). Таким образом, $\theta(f_A^{-1}\tilde{t}) = \chi(A)\theta(\tilde{t})$, откуда $|\theta(f_A^{-1}\tilde{t})| = |\theta(\tilde{t})|$ $(\tilde{t} \in \tilde{E}, \; A \in K)$. Ввиду транзитивности действия α_T получаем: $|\theta| = \rho$, где $\rho = \mathrm{const} > 0$. Но $\theta(\tilde{t})$ является частным от деления функций $(\psi/\varepsilon)(t)$ и $(h/\varepsilon)(t)$, преобразованных к переменной $\tilde{t}$ $(t \in E)$. Следовательно, $|(\psi/h)(t)| = \rho \; (t \in E)$. Для произвольного $t \in Q$ используем (2.7):

$$\psi(t) = \int_E \psi \, d\pi_t, \quad h(t) = \int_E h d\pi_t \quad (t \in Q).$$

Отсюда

$$|\psi(t)| \leqslant \int_E |\psi| \, d\pi_t = \rho \int_E h d\pi_t = \rho h(t).$$

Из теоремы 5.2 извлекается основная информация об унитарных весах и соответствующих весовых функциях эргодического представления.

Следствие 1. *Весовые функции эргодического представления, отвечающие унитарным весам, не имеют нулей на множестве E, а в стохастическом случае их модули постоянны на $E = \Pi$. Весовые функции неразложимого представления класса N не имеют нулей, а в стохастическом случае их модули постоянны.*

В частности, $h > 0$ для неразложимого представления класса N, а, значит, такое представление положительно эквивалентно стохастическому по лемме 3.2.

Следствие 2. *Весовые подпространства эргодического представления, отвечающие унитарным весам, одномерны.*

Действительно, пусть ψ_1, ψ_2 — две весовых функции, отвечающие унитарному весу χ. Возьмем любую точку $t_0 \in E$. Комбинация $\psi_2(t_0)\psi_1(t) - \psi_1(t_0)\psi_2(t)$ обращается в нуль в этой точке. Согласно следствию 1 она тождественно равна нулю. Тем самым, ψ_1, ψ_2 линейно зависимы.

Следствие 3. *Унитарные веса эргодического представления образуют группу относительно поточечного умножения, т. е. подгруппу группы K^* одномерных характеров ядра Сушкевича.*

Доказательство. Благодаря теореме 4.1 можно заменить T представлением α_T^*. Если χ_1, χ_2 — два унитарных веса, а θ_1, θ_2 — соответствующие весовые функции (для α_T^*), то $\theta_1\theta_2 \neq 0$ (ибо модули функций θ_1, θ_2 постоянны) и, следовательно, $\theta_1\theta_2$ — весовая функция, отвечающая весу $\chi_1\chi_2$. Точно так же θ_1^{-1} — весовая функция, отвечающая весу χ_1^{-1}.

Более глубокий факт заключен в следующей «теореме о повороте», доказательство которой приведено в [4].

Теорема 5.3. *Пусть χ — унитарный вес неразложимого представления T класса N. Тогда представление $\chi \otimes T$ (т. е. $s \to \chi(s)T(s)$) эквивалентно T.*

Эквивалентность осуществляется оператором $\hat{\psi}$ умножения на соответствующую весовую функцию ψ.

В силу теоремы 5.3 весь (а не только унитарный) спектр представления T инвариантен относительно умножения на χ.

6. **Перемешивающие и примитивные представления.** Представление T класса N называется *перемешивающим*, если компакт $\tilde{E}$ состоит из одной точки. Очевидно, перемешивающее представление эргодично. В силу изоморфизма $C(\tilde{E}) \approx B_1$ свойство перемешивания эквивалентно тому, что $\dim B_1 = 1$, что в терминах граничного проектора означает, что он имеет вид

$$(P\varphi)(t) = h(t)\int_Q \varphi\, d\mu \quad (t \in Q), \tag{6.1}$$

где h, μ — канонические инварианты. При этом $\varepsilon = P1 = h$.

Внешнее проявление перемешивания (при условии слабой положительности) состоит в так называемой примитивности. Это свойство, более сильное, чем неразложимость.

Представление $T \geqslant 0$ называется *примитивным*, если для любой функции $\varphi \geqslant 0$ $(\varphi \neq 0)$ существует $s \in S$ такое, что $T(s)\varphi > 0$

Теорема 6.1. *Для того чтобы представление T класса N было примитивным, необходимо и достаточно, чтобы оно было перемешивающим и слабо положительным.*

Необходимость. Если T примитивно, то оно неразложимо и по теореме 5.1 слабо положительно и эргодично. Если компакт $\tilde{E}$ содержит более одной точки, то, выбрав любую точку $t_0 \in E$, можно построить функцию $\theta \in C(\tilde{E})$ такую, что $\theta \geqslant 0$ $(\theta \neq 0)$, но $\theta(\tilde{t}_0) = 0$. Тогда для любого $A \in K$ функция $\theta(\tilde{f}_A^{-1}\tilde{t})$ обращается в нуль в точке $\tilde{f}_A\tilde{t}_0$. Полагая $\varphi = V^{-1}\hat{H}\theta \in C(Q)$, имеем: $\varphi \geqslant 0$ $(\varphi \neq 0)$, $(T(s)\varphi)(t_s) = 0$ $(s \in S)$, где t_s — прообраз в E точки $\tilde{f}_A\tilde{t}_0$ при $A = T(s)P$. Это противоречит определению примитивности.

Достаточность. Пусть представление T — перемешивающее и слабо положительное. Тогда в силу (6.1) $P\varphi > 0$ для любой $\varphi \geqslant 0$ $(\varphi \neq 0)$. По теореме об отщеплении граничного спектра $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$, где $\varphi_1 = P\varphi$, а замыкание орбиты $\{T(s)\varphi_0\}$ содержит нуль. Поэтому найдется $s \in S$ такое, что $T(s)\varphi > 0$.

7. **Эргодические и субэргодические классы и компоненты.** Рассмотрим произвольное представление T класса N. Его *эргодическими классами* называются полные прообразы в E орбит действия α_T в $\tilde{E}$*. Так как естественное отображение $E \to \tilde{E}$ непрерывно, а орбиты компактны, то эргодические классы замкнуты в E (а при $\varepsilon > 0$ компактны, ибо в этом случае E — компакт). Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы с каждым эргодическим классом X связать некоторое представление T_X, естественно порождаемое представлением T. Проще всего было бы рассмотреть представление, определяемое действием α_T на орбите $\tilde{X} \subset \tilde{E}$. Однако хотелось бы, в отличие от этого, построить T_X в пространстве функций на самом X. Это удается сделать, анализируя еще более тонкую структуру, состоящую из *субэргодических классов* — полных прообразов в E точек множества $\tilde{E}$.

Для каждого субэргодического класса v рассмотрим банахово пространство $C_\varepsilon(v)$ функций на v, непрерывных и обладающих конечной нормой относительно ε: $\|\psi\| = \sup\limits_{t \in v} |\psi(t)|/\varepsilon(t) < \infty$.

Лемма 7.1. *Каждая функция $\psi \in C_\varepsilon(v)$ продолжается до функции $\hat{\psi} \in C(Q)$, обращающейся в нуль на множестве E_0 нулей функции ε.*

---

* Если представление эргодично, то единственным эргодическим классом является E.

Доказательство. Достаточно показать, что $\bar{v} \setminus v \subset E_0$. Тогда объединение $v \cup E_0$ будет компактным, а продолжение функции ψ нулем на E_0 будет непрерывным в силу неравенства $|\psi(t)| \leqslant \leqslant \|\psi\| \varepsilon(t)$ $(t \in v)$. После этого можно взять любое непрерывное продолжение с компакта $v \cup E_0$ на весь Q.

Пусть $t_0 \in \bar{v} \setminus v$, но $\varepsilon(t_0) > 0$. Тогда $t_0 \in E_+$ и $t_0 \in \bar{v} \subset \Pi$, т. е. $t_0 \in E$. Но класс v замкнут в E, поэтому $t_0 \in v$, вопреки условию.

Замечание. Если $\psi \geqslant 0$, то можно построить и $\hat{\psi} \geqslant 0$.

Рассмотрим теперь семейство мер $\{\tau_{s,t}\}$, связанных с неотрицательными операторами $T(s)$:

$$(T(s)\varphi)(t) = \int_Q \varphi \, d\tau_{s,t} \quad (s \in S, \ t \in Q). \tag{7.1}$$

Лемма 7.2. *Имеет место включение* $\sup \tau_{s,t} \subset \Pi$ $(t \in \Pi)$.

Доказательство. Достаточно показать, что если функция $\varphi \geqslant 0$ обращается в нуль на Π, то она обращается в нуль на $\sup \tau_{s,t}$ $(t \in \Pi)$. Но так как $P\varphi = 0$, то $PT(s)\varphi = 0$, и так как $T(s)\varphi \geqslant 0$, то $T(s)\varphi \mid \Pi = 0$, откуда в силу (7.1) $\varphi \mid \sup \tau_{s,t} = = 0$ $(t \in \Pi)$.

Лемма 7.3. *Имеет место включение*

$$E_+ \cap \sup \tau_{s,t} \subset \Delta^{-1} f_s \Delta(t) \quad (t \in E),$$

где f_s — гомеоморфизм факторкомпакта $\tilde{E}$, соответствующий оператору $T(s)$, Δ: $E \to \tilde{E}$ — естественное отображение.

Доказательство. Пусть $z \in E_+ \cap \sup \tau_{s,t}$. Тогда по лемме 7.2 $z \in E$. Пусть, однако, $\tilde{z} \neq f_s^{-1}\tilde{t}$ $(\tilde{t} = \Delta(t), \ \tilde{z} = \Delta(z))$. Тогда найдется функция $\theta \in C(\tilde{E})$, такая, что $\theta \geqslant 0$, $\theta(\tilde{z}) > 0$, $\theta(f_s^{-1}\tilde{t}) = = 0$. Последнее равенство записывается в виде $(\tilde{T}(s)\theta)(\tilde{t}) = 0$. Положим $\varphi = V^{-1}\theta \in B_1$. Тогда

$$\int_Q \varphi \, d\tau_{s,t} = (T(s)\varphi)(t) = (V^{-1}\tilde{T}(s)\theta)(\tilde{t}) = 0,$$

ибо изоморфизм V^{-1} действует поточечно. Следовательно, $\varphi \mid \sup \tau_{s,t} = 0$. В частности, $\varphi(z) = 0$, т. е. $\theta(\tilde{z}) = 0$ — противоречие.

Возьмем теперь $\psi \in C_\varepsilon(v)$ и продолжим в соответствии с леммой 7.1. Будем иметь

$$(T(s)\hat{\psi})(t) = \int_Q \hat{\psi} \, d\tau_{s,t} = \int_{E_+ \cap \sup \tau_{s,t}} \hat{\psi} \, d\tau_{s,t} \quad (t \in Q).$$

Положим $v(s) = \Delta^{-1} f_s \Delta(v)$. Если $t \in v(s)$, то по лемме 7.3 $E_+ \cap \cap \sup \tau_{s,t} \subset v$. Так как, с другой стороны, $v \subset E_+$, то $E_+ \cap \cap \sup \tau_{s,t} = v \cap \sup \tau_{s,t}$. С учетом того, что $\hat{\psi} \mid v = \psi$, получаем

$$(T(s)\hat{\psi})(t) = \int_v \psi \, d\tau_{s,t} \quad (t \in v(s)). \tag{7.2}$$

Итак, функция $T(s)\hat{\psi}|v(s)$ не зависит от выбора продолжающей функции $\hat{\psi}$. Она непрерывна на $v(s)$, поскольку непрерывна на всем Q. Покажем, что она принадлежит пространству $C_\varepsilon(v(s))$. Так как $\psi\in C_\varepsilon(v)$, то

$$\left|\int\limits_v \psi\, d\tau_{s,t}\right| \leqslant \|\psi\| \int\limits_Q \varepsilon\, d\tau_{s,t},$$

а

$$\int\limits_Q \varepsilon\, d\tau_{s,t} = (T(s)\varepsilon)(t) = (T(s)P1)(t) =$$
$$= (PT(s)1)(t) \leqslant \|T(s)1\|\varepsilon(t) = \|T(s)\|\varepsilon(t).$$

Следовательно,

$$\left|\int\limits_v \psi\, d\tau_{s,t}\right| \leqslant \|T(s)\|\cdot\|\psi\|\varepsilon(t). \tag{7.3}$$

Итак, для каждого субэргодического класса v и каждого $s\in S$ мы построили оператор $T_v(s): C_\varepsilon(v)\to C_\varepsilon(v(s))$ по формуле $T_v(s)\psi = T(s)\hat{\psi}|v(s)$. В силу (7.2), (7.3) $\|T_v(s)\|\leqslant\|T(s)\|$. Семейство $\{T_v(s)\}_{s\in S}$ назовем *субэргодической компонентой* представления T, отвечающей данному классу v.

Пусть теперь X — эргодический класс, $C_\varepsilon(X)$ — функциональное банахово пространство, определяемое так же как $C_\varepsilon(v)$ для субэргодического класса v. Аналогично лемме 7.1 доказывается

Лемма 7.1′. *Каждая функция $\psi\in C_\varepsilon(X)$ продолжается до непрерывной функции $\tilde{\psi}\in C(Q)$, обращающейся в нуль на множестве E_0.*

Это продолжение, очевидно, обслуживает в смысле леммы 7.1 одновременно все ограничения $\psi|v$ $(v\subset X)$ для субэргодических классов. Введем оператор $T_X(s)$ в $C_\varepsilon(X)$, полагая

$$(T_X(s)\psi)(t) = \int\limits_{\Delta^{-1}f_s^{-1}\Delta(t)} \psi\, d\tau_{s,t} \quad (t\in X). \tag{7.4}$$

Так как равенство $\Delta^{-1}f_s^{-1}\Delta(t) = v$ эквивалентно тому, что $t\in v(s)$, то это определение согласовано с определением субэргодических компонент и, следовательно, $(T_X(s)\psi)(t) = (T(s)\tilde{\psi})(t)$ $(t\in X)$. Тем самым, действительно, $T_X(s)\psi\in C_\varepsilon(X)$ и $\|T_X(s)\|\leqslant\|T(s)\|$.

Представление T_X полугруппы S в пространстве $C_\varepsilon(X)$ называется *эргодической компонентой* представления T, отвечающей эргодическому классу X.

Естественно ожидать, что T_X окажется эргодическим, однако нужно помнить, что $C_\varepsilon(X)$ не является, вообще говоря, пространством непрерывных функций на компакте из-за возможного наличия нулей у функции $\varepsilon|X$. Тем не менее, T_X — неотрицательное п. п. представление, обладающее инвариантной функцией $h_X = h|X$ (где h, как обычно,— каноническая инвариантная функ-

ция* представления T). Так как $h \mid E_+ > 0$, то и подавно $h_X > 0$. Ситуацию можно считать вполне удовлетворительной, поскольку имеет место

Теорема 7.1. *Подпространства инвариантных функций и инвариантных мер представления T_X одномерны.*

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для функций. Если $\psi \in C_\varepsilon(X)$ инвариантна для T_X, то $\psi(t) = (T \times \times (s)\tilde{\psi})(t)$ $(t \in X)$ при всех $s \in S$. Но тогда $\psi(t) = (P\tilde{\psi})(t)$ $(t \in X)$. Функция $P\tilde{\psi}$ постоянна на субэргодических классах, а, значит, такова же и ψ. Но тогда в силу (7.4)

$$\psi(t) = \int_v \psi \, d\tau_{s,t} = (\psi \mid v) \int_v d\tau_{s,t} \; (t \in v(s)).$$

Точно так же

$$h(t) = (h \mid v) \int_v d\tau_{s,t} \; (t \in v(s)).$$

Следовательно, $(\psi/h)(t) = a(v)$ $(t \in v(s))$, где $a(v)$ — соответствующая константа. Итак, $\psi/h = \text{const}$ на объединении классов $v(s)$ $(s \in S)$. Но это множество плотно в X ввиду транзитивности действия группы K в ее орбите $\tilde{X}$.

Следствие. *Если $\varepsilon > 0$, то для каждого эргодического класса X представление T_X — эргодическое.*

8. **Абелева ситуация. Неотрицательные п. п. операторы.** Напомним, что в абелевой ситуации представление достаточно считать а. п. п. При этом наиболее интересен эргодический случай. Существенным дополнением к теореме 4.1 здесь является

Теорема 8.1. *Если T — эргодическое (в частности, неразложимое) представление абелевой полугруппы S, то компакт $\tilde{E}$ гомеоморфен ядру Сушкевича K, а действие α_T при этом эквивалентно регулярному действию группы K на себе***.

Доказательство. В абелевом транзитивном случае гомеоморфизмы $f_A \neq \mathrm{id}\,(A \in K)$ не имеют неподвижных точек, так как множество неподвижных точек любого из них инвариантно для всех. Выбирая любую точку $\tilde{t}_0 \in \tilde{E}$, получаем гомеоморфизм $K \to \tilde{E}$ $(A \to f_A^{-1}\tilde{t}_0)$. При соответствующем отождествлении $\tilde{E}$ с K действие α_T переходит в регулярное.

Следствие. *Группа унитарных весов эргодического (в частности, неразложимого) представления абелевой полугруппы совпадает с группой K^* характеров ядра Сушкевича.*

---

* Можно положить $\tilde{h}_X = h$, ибо $h \mid E_0 = 0$. Важно заметить, что $h_X \in C_\varepsilon(X)$. Вообще, если $\varphi \in B_1$, то $\varphi \mid X \in C_\varepsilon(X)$.

** Напомним, что *регулярным действием группы на себе называется действие сдвигами.*

Рассмотрим теперь вопрос о сходимости представления, т. е. о сходимости всех орбит.

Теорема 8.2. *Для того чтобы эргодическое представление T было сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы оно было перемешивающим. При выполнении этого условия*

$$\lim_{s\to\infty} T(s)\varphi = \left(\int_Q \varphi\, d\mu\right) h. \tag{8.1}$$

Это непосредственно вытекает из теоремы 2.4 работы [2], замечания к ней и формулы (6.1) настоящей статьи.

Следствие. *Если представление T класса N примитивно, то оно сходится к пределу, определяемому формулой* (8.1).

Теперь мы резюмируем развитую теорию в приложении к неотрицательному оператору A в $C(Q)$. При этом никаких дополнительных доказательств не понадобится, поскольку дело сведется к представлению $n \to A^n$ $(n \in Z_+)$. Соответственно вводятся следующие определения.

Оператор $A \geqslant 0$ называется *неразложимым*, если для любой точки $t \in Q$ и любой функции $\varphi \geqslant 0$ $(\varphi \neq 0)$ существует показатель n такой, что $(A^n\varphi)(t) > 0$. Оператор A называется *примитивным*, если для любой функции $\varphi \geqslant 0$ $(\varphi \neq 0)$ существует показатель n такой, что $A^n\varphi > 0$.

Теорема 8.3. *Пусть A — неотрицательный п. п. оператор в $C(Q)$ и пусть его спектральный радиус $r(A) = 1$*. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *ω — предельное (в сильной топологии) множество K для полугруппы $\{A^n\}_1^\infty$ является компактной абелевой группой (ядром Сушкевича оператора A). Единицей этой группы служит некоторый проектор $P \geqslant 0$, $P \neq 0$.*

2. *На внутреннем подпространстве $B_0 = \operatorname{Ker} P$ последовательность $\{A^n\}_1^\infty$ сильно стремится к нулю.*

3. *Граничное подпространство $B_1 = \operatorname{Im} P$ порядково изоморфно $C(\tilde{E})$, где $\tilde{E}$ — компакт, являющийся факторпространством топологического пространства $E = E_+ \cap \Pi$ $(E_+ = \{t \mid \varepsilon(t) > 0\})$, $\varepsilon = P1$, $\Pi = \operatorname{supp} P$. Изоморфизм осуществляется композицией сужения функций на E, деления на ε и переноса на $\tilde{E}$.*

4. *Оператор A на граничном подпространстве положительно эквивалентен стохастическому оператору, порождаемому некоторым гомеоморфизмом компакта $\tilde{E}$.*

5. *Число $\lambda = 1$ является собственным значением для операторов A и A^*, ему соответствуют инвариантная функция $h \geqslant 0$ и инвариантная мера μ такие, что $\mu(h) = 1$* (обобщение теоремы Перрона—Фробениуса).

---

* Для любого п. п. оператора спектральный радиус не превосходит единицы.

6. *Если оператор A неразложим, то a) h, μ единственны с точностью до положительных множителей, $h > 0$, $\mu > 0$; b) $E = Q$, $\varepsilon > 0$, фактор-компакт $\tilde{Q}$ гомеоморфен ядру Сушкевича K, сужение оператора A на граничное подпространство подобно оператору, порожденному в $C(K)$ топологически транзитивным сдвигом** на компактной группе K; c) граничный спектр оператора A — группа, изоморфная группе K^* характеров ядра Сушкевича; d) собственные подпространства, отвечающие граничному спектру, одномерны; e) модули всех собственных функций пропорциональны инвариантной функции h; f) для каждого граничного собственного значения λ оператор λA подобен A и, таким образом, весь спектр оператора A инвариантен относительно умножения на* λ (теорема о повороте).

7. *Следующие утверждения для неразложимого оператора A эквивалентны: a) A примитивен; b) A не имеет собственных значений $\lambda \neq 1$ на единичной окружности; c) последовательность $\{A^n\}_1^\infty$ сильно сходится. При этом*

$$\lim_{n\to\infty} A^n \varphi = \left(\int_Q \varphi \, d\mu\right) h. \tag{8.2}$$

Основные спектральные свойства неразложимых операторов (включая обобщение на этот случай теоремы Перрона — Фробениуса, но исключая теорему о повороте) были получены М. Розенблаттом [5] и Б. Джемиссоном совместно с Р. Сайном [6]. В работах [5]—[7] были введены также эргодические и субэргодические классы (но не компоненты!) для стохастического оператора. Наши конструкции в этом случае приводят к близким, но не точно тем же результатам. Сходимость степеней неразложимого стохастического оператора изучалась в [8].

9. **Рюэлевский вариант теоремы Перрона — Фробениуса.** В эргодической теории некоторых классов динамических систем ключевую роль играет «рюэлевский вариант» теоремы Перрона — Фробениуса (см., например, [9, 10]). Мы покажем, что он укладывается в рамки построенной выше теории. Пусть Q — метрический компакт с метрикой d, $B(x, \varepsilon) = \{y \in Q \mid d(x, y) < \varepsilon\}$. Непрерывное преобразование R компакта Q называется *растягивающим*, если существуют такие $\eta_0 > 0$, $a > 1$, что для всех $x \in Q$: a) $R^{-1}B(x, \eta_0) = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant e(x)} U_i$, где U_i — такие попарно не пересекающиеся множества, что $R \mid U_i$ — гомеоморфизм на $B(x, \eta_0)$; b) если $y_1, y_2 \in U_i$, то $d(Ry_1, Ry_2) \geqslant a d(y_1, y_2)$.

Если $Rx' = x$ и $x' \in U_i$, то через $R^{-1}_{x, x'}$ мы будем обозначать отображение $B(x, \eta_0) \to U_i$, обратное к $R \mid U_i$ («ветвь многозначного отображения R^{-1}»). Преобразование R^n является также рас-

* Т. е. сдвигом, орбиты которого плотны.

тягивающим с параметрами η_0, a^n. Ветви многозначного отображения R^{-n} мы будем обозначать через $R^{-n}_{x,x'}$.

Преобразование R называется *перемешивающим*, если для любых открытых множеств U и V существует такое ν, что $R^{-n}U \cap V = \varnothing$ $(n \geqslant \nu)$. Для растягивающего R это эквивалентно тому, что для любого $\eta > 0$ найдется такое ν, что для всех $x \in Q$ множества $R^{-\nu}x$ η-плотны в Q.

Далее, пусть $\gamma \in C^\alpha$ (Q) — гельдеровская функция с показателем $\alpha > 0$, т. е. $|\gamma(x) - \gamma(y)| \leqslant Ld(x, y)^\alpha$ $(L = \text{const})$. Оператор Рюэля $\tilde{R} : C(Q) \to C(Q)$, ассоциированный с преобразованием R, определяется следующим образом:

$$(\tilde{R}\varphi)(x) = \sum_{y \in R^{-1}x} e^{\gamma(y)} \varphi(y).$$

Очевидно, $\tilde{R} \geqslant 0$ и

$$(\tilde{R}^n\varphi)(x) = \sum_{y \in R^{-n}x} e^{\gamma_n(y)} \varphi(y),$$

где

$$\gamma_n(y) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(R^k y).$$

Через r обозначим спектральный радиус оператора $\tilde{R}$.

Предложение 9.1. *Если $R: Q \to Q$ — растягивающее перемешивающее преобразование, $\gamma \in C^\alpha(Q)$, то $A = r^{-1}\tilde{R}$ — п. п. примитивный оператор.*

Для доказательства нам понадобятся три леммы.

Лемма 9.1. *Существует такое $M = M$ $(a; L, \alpha)$, что если $d(x, y) < \eta_0$, $x' = R^{-n}x$, $y' = R^{-n}_{x,x'}y$, то*

$$|\gamma_n(x') - \gamma_n(y')| \leqslant Md(x, y)^\alpha \leqslant D \quad (\equiv M\eta_0^\alpha).$$

Доказательство. Имеем

$$|\gamma_n(x') - \gamma_n(y')| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |\gamma(R^k x') - \gamma(R^k y')| \leqslant$$

$$\leqslant L \sum_{k=0}^{n-1} d(R^k x', R^k y')^\alpha \leqslant Ld(x, y)^\alpha \sum_{k=0}^{n-1} a^{-(n-k)\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{L}{a^\alpha - 1} d(x, y)^\alpha.$$

Лемма 9.2. *Существует такое $\rho > 0$, что для всех $x, y \in Q$*

$$(\tilde{R}^n 1)(x) \leqslant \rho(\tilde{R}^n 1)(y) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Доказательство. Предположим сначала, что $d(x, y) < \eta_0$. Пусть $R^{-n}x = \{x_i\}$, $R^{-n}y = \{y_i\}$, где $y_i = R^{-n}_{x,x_i}y$. Тогда по лемме 9.1 $e^{\gamma_n(x_i)} \leqslant e^D e^{\gamma_n(y_i)}$. Суммируя, получаем (9.1) с $\rho = e^D$.

Далее, так как R — перемешивающее преобразование, то найдется такое ν, что для всех y множество $R^{-\nu}y$ η_0-плотно в Q. Пусть $n \geq \nu$ и z — точка максимума $\tilde{R}^{n-\nu}1$. Тогда

$$(\tilde{R}^{n-\nu}1)(z) = \|\tilde{R}^{n-\nu}1\| \geq \|\tilde{R}\|^{-\nu}(\tilde{R}^n 1)(x).$$

Найдется такое $y_0 \in R^{-\nu}y$, что $d(y_0, z) < \eta_0$. Полагая $c = \inf e^{\gamma_\nu} > 0$, получаем

$$(\tilde{R}^n 1)(y) = \sum_{t \in R^{-\nu}y} e^{\gamma_\nu(t)}(\tilde{R}^{n-\nu}1)(t) \geq c(\tilde{R}^{n-\nu}1)(y_0) \geq$$
$$\geq ce^{-D}(\tilde{R}^{n-\nu}1)(z) \geq ce^{-D}\|\tilde{R}\|^{-\nu}(\tilde{R}^n 1)(x).$$

Лемма 9.3. *Имеет место оценка* $\|\tilde{R}^n\| \leq \rho r^n$.

Доказательство. Возьмем в качестве x точку максимума функции $\tilde{R}^n 1$, а в качестве y — ее точку минимума. Получим

$$(\tilde{R}^n 1)(x) = \|\tilde{R}^n\|, \quad (\tilde{R}^n 1)(y) \leq r^n.$$

Остается применить предыдущую лемму.

Доказательство предложения 9.1. Пусть $\varphi \in C(Q)$. Зафиксируем $\delta > 0$. Найдем такое $\eta < \eta_0$, что $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \delta$ при $d(x, y) < \eta$. Имеем

$$(\tilde{R}^n\varphi)(x) - (\tilde{R}^n\varphi)(y) = \sum_i e^{\gamma_n(x_i)}\{\varphi(x_i) - \varphi(y_i) +$$
$$+ \varphi(y_i)(1 - e^{\gamma_n(y_i) - \gamma_n(x_i)})\}.$$

Но $d(x_i, y_i) < \eta$, откуда следует, что $|\varphi(x_i) - \varphi(y_i)| < \delta$. Кроме того, из леммы 9.1 $|1 - e^{\gamma_n(y_i) - \gamma_n(x_i)}| \leq e^D Md(x, y)^\alpha$. Таким образом,

$$|(\tilde{R}^n\varphi)(x) - (\tilde{R}^n\varphi)(y)| \leq (\varepsilon + \|\varphi\| e^D Md(x, y)^\alpha) \sum_i e^{\gamma_n(x_i)}.$$

Но $\sum_i e^{\gamma_n(x_i)} = (\tilde{R}^n 1)(x) \leq \rho r^n$ по лемме 9.3. Отсюда следует, что ограниченная последовательность $A^n\varphi = r^{-n}\tilde{R}^n\varphi$ равностепенно непрерывна, что и доказывает п. п. оператора A.

Пусть теперь $\varphi \geq 0$ и $\varphi \neq 0$. Тогда найдется шар $B(z, \varepsilon)$, на котором функция φ положительна. Так как R перемешивает, то существует такое n, что $R^{-n}x \cap B(z, \varepsilon) \neq \varnothing$ $(x \in Q)$. Отсюда следует, что $A^n\varphi > 0$, что доказывает примитивность оператора A.

Из теоремы 8.3 и предложения 9.1 вытекает

Теорема 9.1. («рюэлевский вариант» теоремы Перрона—Фробениуса. *Спектральный радиус r является простым собственным значением операторов $\tilde{R}$ и $\tilde{R}^*$. Ему отвечает положительная собственная для $\tilde{R}$ функция h и положи-*

тельная собственная для $\tilde{R}^*$ *мера* μ, $\int\limits_Q h d\mu = 1$. *Равномерно на* Q *имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} r^{-n}\tilde{R}^n\varphi = \left(\int\limits_Q \varphi d\mu\right) h \quad (\varphi \in C(Q)).$$

10. **Конечномерный случай** является полезной иллюстрацией развитой выше теории. Пусть $A = (a_{ik})_{i,k=1}^m$ — неотрицательная матрица (т. е. все $a_{ik} \geqslant 0$). Ее можно рассматривать как неотрицательный оператор в пространстве $C(Q)$ на компакте $Q = \{1, \ldots, m\}$. Почти периодичность оператора A в данном случае эквивалентна ограниченности степеней $A^n = (a_{ik}^{(n)})$ $(n > 0)$.

Неразложимость матрицы A означает, что для любой пары i, k найдется такое n, что $a_{ik}^{(n)} > 0$. Примитивность означает, что для любого k найдется такое n, что $a_{ik}^{(n)} > 0$ для всех i *. Эти понятия естественно и наглядно трактуются в терминах *графа* Γ_A *матрицы* A, определяемого следующим образом: его вершинами служат $1, \ldots, m$, а стрелки $i \to k$ соответствуют в точности тем парам (i, k), для которых $a_{ik} \neq 0$. Неразложимость матрицы A эквивалентна сильной связности графа Γ_A, т. е. существованию пути из любой вершины в любую. Примитивность эквивалентна существованию такого n, что из любой вершины в любую ведет путь длиной n. Любую матрицу $A \geqslant 0$ можно путем перестановки базисных векторов привести к блочному нижнетреугольному виду с неразложимыми (или одномерными нулевыми) диагональными блоками. Будем считать, что это уже осуществлено; диагональные блоки занумеруем сверху вниз: $A_1, \ldots, A_s$. Соответственно Q разбивается на классы $X_1, \ldots, X_s$. Комбинаторно это разбиение описывается следующим образом. Вершина графа Γ_A называется *возвратной*, если через нее проходит цикл, т. е. замкнутый путь. Множество возвратных вершин совпадает с объединением тех X_j, для которых $A_j \neq 0$. Эти классы называются *возвратными*. Две возвратные вершины i, k $(i \neq k)$ принадлежат одному классу, если и только если существует цикл, через них проходящий **.

Будем далее считать, что $r(A) = 1$, т. е. что граничный спектр оператора A непуст. Оказывается, эргодические классы — это в точности те возвратные классы X_j, для которых $r(A_j) = 1$, а соответствующие операторы A_j являются эргодическими компонентами оператора A.

Каждый эргодический класс X_j распадается на ν_j субэргодических классов $X_{j1}, \ldots, X_{j\nu_j}$ таким образом, что в графе мат-

---

* Легко видеть, что n можно выбрать не зависящим от k и тогда все $a_{ik}^{(n)} > 0$, т. е. $A^n > 0$.

** Отметим, что если $j < l$, то не существует путей, начинающихся в классе X_j и кончающихся в X_l.

рицы A_j все стрелки, исходящие из вершин класса X_{jl} ведут в вершины класса $X_{j,\,l+1}$ ($X_{j,\,\nu_j+1} \equiv X_{j1}$).

Граничный спектр эргодической компоненты A_j есть группа корней из единицы некоторой степени ν_j. Ядро Сушкевича является циклической группой порядка, равного наименьшему общему кратному чисел ν_j.

Список литературы: 1. *Любич М. Ю., Любич Ю. И.* Спектральная теория почти периодических представлений полугрупп.— Укр. мат. журн., 1984, **36**, № 5, с. 632—636. 2. *Любич М. Ю., Любич Ю. И.* Отщепление граничного спектра для почти периодических операторов и представлений полугрупп.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1986, вып. **45**, с. 47—55. 3. *Любич М. Ю., Любич Ю. И.* Общий вид неотрицательных проекторов в пространстве непрерывных функций на компакте. — Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1985, вып. 43, с. 87—93. 4. *Любич Ю. И.* Введение в теорию банаховых представлений групп. — Х.: Вища шк., 1985.—142 с. 5. *Rosenblatt M.* Equicontinuous Markov operators.— Теория вероятностей и ее применения, 1964, **9**, № 2, с. 205—222. 6. *Jamison B., Sine R.* Irreducible almost periodic Markov operators. — Journ. Math. Mech., 1969, **18**, p. 1043—1047. 7. *Jamison B.* Ergodic decomposition induced by certain Markov operators. — Trans. Amer. Math. Soc., 1965, **117**, № 5, p. 451—468. 8. *Jamison B.* Asymptotic behavior of succesive iterates of continuous functions under a Markov operator.— Journ. Math. Anal. Appl., 1964, **9**, p. 203—214. 9. *Walters P.* Invariant measures and equilibrium states far some mappings which expand distances.— Trans. Amer. Math. Soc., 1978, **236**, p. 121—153. 10. *Синай Я. Г.* Гиббсовские меры в эргодической теории.— Успехи мат. наук, 1972, **27**, вып. 4, с. 21—64.

Поступила в редколлегию 11.06.84.