УДК 517.982.2

С. А. КУЗНЕЦОВ

О СОВЕРШЕННО ПОЛНЫХ И B_r-ПОЛНЫХ ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ В ТЕРМИНАХ НАТУРАЛЬНОЙ ТОПОЛОГИИ

В статье дается описание совершенной полноты и B_r-полноты отделимых локально выпуклых пространств (далее ЛВП) в терминах полноты фактор-пространств по замкнутым подпространствам

Мы будем рассматривать ЛВП, заданные над полем действительных чисел. Не поясненные в тексте обозначения и терминология взяты из [1].

Линейный функционал f, определенный на подпространстве M из топологического сопряженного E' к ЛВП E, называется почти непрерывным, если для каждой окрестности нуля $v \subset E$ отображение $f|_{v^0 \cap M}$ непрерывно в топологии $\sigma(E', E)|_{v^0 \cap M}$ (v^0 — поляра v в E').

В работе [2] В. Птак показал, что если f — линейный функционал, определенный на подпространстве $M \subset E'$, то f почти непрерывен тогда и только тогда, когда для любой окрестности нуля $v \subset E$ множество $v^0 \cap \operatorname{Ker}(f)$ замкнуто в топологии $\sigma(E', E)|_M$.

Лемма 1. *Если L и M — подпространства в E', $M \subset L$, $\dim(L/M) < \infty$ и M почти замкнуто* в E', то и L почти замкнуто в E'.*

---

* Напомним, что подпространство M из E' называется почти замкнутым, если для каждой окрестности нуля v из E множество $v^0 \cap M$ замкнуто в слабой топологии $\sigma(E', E)$. ЛВП E называется совершенно полным, если в E со слабой топологией каждое почти замкнутое подпространство замкнуто. ЛВП E' называется B_r-полным, если в E' со слабой топологией не существует собственного всюду плотного почти замкнутого подпространства. ЛВП E называется наследственно полным, если для любого замкнутого подпространства $L \subset$ фактор-пространство E/L полно в фактор-топологии. Недавно М. Вальдивия [3] построил пример B_r-полного не наследственно полного (и, следовательно, не совершенно полного) пространства.

Доказательство. Достаточно показать, что если $x \notin M$, то $\boldsymbol{R}x + M = H$ почти замкнуто ($\boldsymbol{R}$ — поле действительных чисел).

Пусть v — окрестность нуля в E. Докажем, что $v^0 \cap H$ замкнутое в E' со слабой топологией $\sigma(E', E)$ (далее E'_σ) множество. Определим на H функционал p:

$$y \in H \Rightarrow p(y) = p(\lambda x + y') = \lambda \quad (\lambda \in \boldsymbol{R},\ y' \in M).$$

Очевидно, что M — нулевое подпространство функционала p. Так как M — почти замкнутое подпространство в E', то функционал p почти непрерывен. Множество $V = v^0 \cap H$ предкомпактно в E'_σ как подмножество компактного в E'_σ множества v^0. Так как p почти непрерывен, то p непрерывен на V в топологии $\sigma(E', E)|_V$. Поэтому множество $Ax = \{p(V)\}\, x$ предкомпактно в $\boldsymbol{R}x$ как образ предкомпакта при непрерывном линейном отображении. Так как V — выпуклое множество, то $\overline{Ax}$ — отрезок в $\boldsymbol{R}x$. Следовательно, Ax — равностепенно непрерывное множество. Обозначим через B проекцию множества V на подпространство M. Множество B равностепенно непрерывно, так как оно принадлежит множеству $V - Ax$, которое равностепенно непрерывно как сумма двух равностепенно непрерывных множеств. Следовательно, $\bar{B} \subset M$, так как M почти замкнуто. Поэтому $\{\overline{Ax} + \bar{B}\} \subset H$. Очевидно, что $v^0 \cap H \subset \overline{Ax} + \bar{B}$. $\overline{Ax} + \bar{B}$ — замкнутое в E'_σ множество, так как $\overline{Ax}$ и $\bar{B}$ — компакты в E'_σ. Следовательно, H — почти замкнутое подпространство в E'.

Теорема 1. *Для того чтобы ЛВП E было совершенно полным, необходимо и достаточно, чтобы каждый почти непрерывный линейный функционал, определенный на почти замкнутом подпространстве M из E', был непрерывен в топологии $\sigma(E', E)|_M$.*

Доказательство. Необходимость очевидна.

Докажем достаточность. Пусть M — почти замкнутое подпространство в E'. Предположим, что оно не замкнуто в E'_σ. Пусть $x \in \{E' \setminus M\}$. Из леммы 1 следует, что $\boldsymbol{R}x + M$ — почти замкнутое подпространство в E'. Определим на $\boldsymbol{R}x + M$ функционал $p: \{\boldsymbol{R}x + M\} \to \boldsymbol{R}$ следующим образом:

$$y \in \{\boldsymbol{R}x + M\} \Rightarrow p(y) = p(\lambda x + y') = \lambda \quad (\lambda \in \boldsymbol{R},\ y' \in M).$$

Очевидно, что $M = \operatorname{Ker}(p)$. Так как M и $\boldsymbol{R}x + M$ — почти замкнутые подпространства в E', то, по предположению, p — слабо непрерывный на $\boldsymbol{R}x + M$ функционал. Поэтому M — слабо замкнутое в $\boldsymbol{R}x + M$ подпространство. Так как это справедливо для любого $x \in \{E' \setminus M\}$, то M — замкнутое подпространство в E'_σ.

Известно, что если M — подпространство из E', то векторные пространства E/M^0 и M находятся в двойственности. Обозначим через $\nu(E/M^0, M)$ топологию в E/M^0 равномерной сходимости на множествах из M, равностепенно непрерывных на E (или, что эквивалентно, равностепенно непрерывных на E/M^0 в фактор-топологии).

Топологию $\nu(E/M^0, M)$ будем называть натуральной. В E/M^0 поляры равностепенно непрерывных на E подмножеств из M образуют фундаментальную систему окрестностей нуля для натуральной топологии $\nu(E/M^0, M)$.

Теорема 2. *Натуральная топология $\nu(E/M^0, M)$ согласуется с двойственностью между E/M^0 и M тогда и только тогда, когда M — почти замкнутое подпространство в E'.*

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть A — равностепенно непрерывное множество из $M \subset E'$. Это означает, что в E найдется такая окрестность нуля v, что $|A(v)| \leqslant 1$. Следовательно, $A \subset v^0$. Так как $A \subset M$, то $A \subset \{v^0 \cap M\}$. Так как v^0 — выпуклое уравновешенное множество, то выпуклая уравновешенная оболочка $L(A)$ множества A принадлежит $\{v^0 \cap M\}$, замкнутое в E'_σ множество, так как M — почти замкнутое подпространство в E'. Следовательно, $\overline{L(A)} \subset \{v^0 \cap M\} \subset M$. Так как $A^0 = (\overline{L(A)})^0$, то натуральную топологию можно задать как топологию равномерной сходимости на выпуклых уравновешенных множествах из M, равностепенно непрерывных на E и замкнутых в E'_σ; $\overline{L(A)}$ —компактное в слабой топологии $\sigma(E', E)|_M$ множество. Таким образом, натуральная топология является S-топологией, где S — некоторое семейство выпуклых уравновешенных множеств из M, компактных в слабой топологии $\sigma(E/M^0, M) = \sigma(E', E)|_M$, покрывающее пространство M. Из теоремы Макки [1, с. 95, теор. 7] следует, что топология $\nu(E/M^0, M)$ согласуется с двойственностью между E/M^0 и M.

Докажем необходимость. Пусть u — окрестность нуля в E. Следовательно, $u^0 \cap M$ — равностепенно непрерывное на E множество. Так как натуральная топология согласуется с двойственностью между E/M^0 и M, то $(u^0 \cap M)^{00} \subset M$. $(u^0 \cap M)^{00}$ и u^0 — слабо замкнутые множества и $(u^0 \cap M) \subset (u^0 \cap M)^{00}$. Следовательно, $u^0 \cap M = u^0 \cap (u^0 \cap M)^{00}$ и $u^0 \cap M$ слабо замкнуто как пересечение слабо замкнутых множеств. Следовательно, M — почти замкнутое в E' подпространство.

Таким образом, при помощи натуральной топологии дается критерий почти замкнутости в терминах двойственности. Этим определяется важность натуральной топологии при изучении совершенной полноты.

Очевидно, что натуральная топология $\nu(E/M^0, M)$ совпадает с фактор-топологией пространства E/M^0, если M — замкнутое подпространство в E'_σ. Поэтому пространство E наследственно полно тогда и только тогда, когда для любого замкнутого в E'_σ подпространства M фактор-пространство E/M^0 полно в натуральной топологии $\nu(E/M^0, M)$. Дадим аналогичный критерий совершенной полноты и B_r-полноты.

Теорема 3. *Для того чтобы ЛВП E было совершенно полным (B_r-полным), необходимо и достаточно, чтобы для любого почти*

замкнутого подпространства M (всюду плотного почти замкнутого подпространства) в E'_σ фактор-пространство (пространство) E/M^0 $[E]$ было полным в натуральной топологии $\nu(E/M^0, M)$ $(\nu(E, M))$.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть τ — исходная топология совершенно полного (B_r-полного) пространства E; $M \subset E'_\sigma$ — почти замкнутое (всюду плотное почти замкнутое) подпространство. Тогда M замкнуто в E'_σ $(E' = M)$ и, следовательно, $\tau/M^0 = \nu(E/M^0, M)$ $(\tau = \nu(E, M))$, где τ/M^0 — фактор-топология пространства E/M^0. Так как совершенно полное (B_r-полное) пространство наследственно полно (полно), то пространство E/M^0 (E) полно в топологии $\nu(E/M^0, M)$ $(\nu(E, M))$.

Докажем *достаточность*. Пусть для каждого почти замкнутого подпространства $M \subset E'$ фактор-пространство E/M^0 полно в топологии $\nu(E/M^0, M)$. Предположим, что E не является совершенно полным. Тогда существует почти замкнутое подпространство M в E' такое, что $\overline{M} \neq M$. Пусть $x \in \overline{M} \setminus M$. Из леммы 1 следует, что подпространство $Q_x = \boldsymbol{R}x + M$ почти замкнуто. Определим на Q_x линейный функционал f:

$$y \in Q_x \Rightarrow f(y) = f(\lambda x + y') = \lambda \quad (y' \in M, \ \lambda \in \boldsymbol{R}).$$

Так как $M = \operatorname{Ker}(f)$ почти замкнуто, то функционал f почти непрерывен, т. е. f непрерывен на $v^0 \cap Q_x$ в топологии $\sigma(E', E)|_{Q_x}$ для каждой окрестности нуля v из E. Следовательно, f непрерывен на каждом равностепенно непрерывном на E подмножестве $A \subset Q_x$ в топологии $\sigma(Q_x, E/Q_x^0)$. Так как E/Q_x^0 полно в топологии $\nu(E/Q_x^0, Q_x)$, то из теоремы Гротендика [4, с. 189] вытекает, что f непрерывен в топологии $\sigma(Q_x, E/Q_x^0) = \sigma(E', E)|_{Q_x}$. Следовательно, подпространство M замкнуто в Q_x как ядро непрерывного линейного функционала. Так как это верно для любого $x \in \overline{M} \setminus M$, то M замкнуто в $\overline{M}$, что противоречит тому, что $M \neq \overline{M}$.

Достаточность для B_r-полноты доказывается заменой слов «почти замкнутое в E' подпространство» словами «всюду плотное почти замкнутое в E'_σ подпространство» в доказательстве достаточности для совершенной полноты.

Следствие. *Для того чтобы бочечное пространство E было совершенно полным, необходимо и достаточно, чтобы E/M^0 было полным в сильной топологии $\beta(E/M^0, M)$, где M — почти замкнутое подпространство в E'.*

Доказательство. Так как пространство E бочечно, то каждое ограниченное в E'_σ подмножество из M равностепенно непрерывно. Следовательно, $\beta(E/M^0, M) = \nu(E/M^0, M)$. Теперь следствие вытекает из теоремы 3.

Лемма 2. *Пусть E — бочечное пространство и M — всюду плотное почти замкнутое подпространство в E'_σ. Тогда E, наделенное топологией $\nu(E, M)$, — бочечное пространство.*

Доказательство. Пространство E с топологией $\nu(E, M)$ будем обозначать через E_M. Пусть u — бочка в E_M. Так как $\nu(E, M) \leqslant \nu(E, E')$, то u — бочка в E и, следовательно, u — окрестность нуля в E. Обозначим через u^* поляру множества u относительно двойственности между E и M. Очевидно, что $u^* = u^0 \cap M$. Так как M — почти замкнутое всюду плотное подпространство, то топология $\nu(E, M)$ согласуется с двойственностью между E и M и, следовательно, $u^{**} = u$. Из того, что $(u^*)^0 = u^{**}$ следует: $u = (u^0 \cap M)^0$. Следовательно, u — окрестность нуля в E_M. Поэтому E_M — бочечное пространство.

Так как бочечность пространства E наследуется при переходе к фактор-пространству по замкнутому подпространству с фактор-топологией, то лемма 2 допускает очевидное обобщение:

Лемма 3. *Пусть E — бочечное пространство и M — почти замкнутое подпространство в E'. Тогда E/M^0, наделенное топологией $\nu(E/M^0, M)$, — бочечное пространство.*

Пусть $\boldsymbol{B}$ — фундаментальная система окрестностей нуля в пространстве E/M^0 (M — почти замкнутое подпространство в E') для натуральной топологии $\nu(E/M^0, M)$; $v \in \boldsymbol{B}$. Обозначим через E'_{v^0} подпространство в M, порожденное множеством v^0 и наделенное нормированной топологией, заданной калибровочной функцией множества v^0. Далее через t будем обозначать топологию в M локально выпуклого индуктивного предела подпространств $\{E'_{v^0}\}_{v \in \boldsymbol{B}}$ относительно отображений тождественного вложения $\varphi_{v^0}: E'_{v^0} \to M$. Подпространство M с топологией t будем обозначать через M_t.

Лемма 4. *Для того чтобы E' (E — бочечное пространство) с топологией Макки $\tau(E', E)$ (далее E'_τ) было борнологическим, необходимо и достаточно, чтобы пространство E было полным и E'_t полурефлексивным.*

Докажем *необходимость*. Поскольку E — бочечное пространство, то E совпадает с сильным сопряженным к E'_τ. Следовательно, E — полное пространство, так как сильное сопряженное к борнологическому пространству полно [4, с. 188].

Пусть u — замкнутая выпуклая уравновешенная окрестность нуля в E' с сильной топологией $\beta(E', E)$ (далее E'_β), т. е. найдется такое ограниченное множество A в E, что $A^0 = u$. Пусть v — окрестность нуля в E. Так как A ограничено, то найдется такое число $\lambda \in \boldsymbol{R}$, что $A \subset \lambda v$ и, следовательно, $\frac{1}{\lambda} v^0 \subset A^0 = u$. Поэтому отображение тождественного вложения $\varphi_{v^0}: E'_{v^0} \to E'_\beta$ непрерывно. Следовательно,

$$\beta(E', E) \leqslant t. \tag{1}$$

Пусть B — замкнутое выпуклое уравновешенное ограниченное множество в E'_τ. Тогда $B = v^0$ для некоторой окрестности нуля $v \subset E$, так как E — бочечное пространство. Следовательно, B ограничено в E'_t, так как B ограничено в E'_{v^0}. Поэтому в E'_t и в E'_τ совпадают семейства неограниченных множеств. Так как E'_τ—борнологическое пространство, то $\tau(E', E) \geqslant t$ [1, с. 123]. Сравнивая последнее неравенство с неравенством (1), получаем

$$\tau(E', E) = t = \beta(E', E). \qquad (2)$$

Из того, что $E = (E'_\tau)'_\beta$ (так как E — бочечное пространство) и из равенства (2) следует цепочка равенств:

$$((E'_t)'_\beta)'_\beta = ((E'_\tau)'_\beta)'_\beta = E'_\beta = E'_t.$$

Следовательно, E'_t рефлексивно (и тем более полурефлексивно).

Докажем *достаточность*. Калибровочная функция множества u^0 (u — окрестность нуля в E) — норма в пространстве E'_{u^0}, причем E'_{u^0}, наделенное нормированной топологией, банахово. Следовательно, пространство E'_t является борнологическим как индуктивный предел банаховых пространств.

Обозначим через F пространство $(E'_t)'$. Так как E — бочечное пространство, то в E' совпадают семейства всех $\tau(E', E)$-ограниченных подмножеств, всех $\beta(E', E)$-ограниченных подмножеств и, что следует из равенства (2), всех t-ограниченных подмножеств. Из неравенства (1) следует, что $E \subset F$. Следовательно, $\beta(F, E'_t)|_E = \beta(E, E')$. Так как E — бочечное пространство, то топология $\beta(E, E')$ совпадает с исходной топологией пространства E. Следовательно, E — полное подпространство пространства F с топологией $\beta(F, E'_t)$. Следовательно, E замкнуто в F_β. Так как E'_t полурефлексивно, то $(F'_\beta)' = E'$ и, следовательно, E всюду плотно в F_β. Поэтому $F_\beta = E$, т. е. топология t согласуется с двойственностью между E' и E. Следовательно, $t \leqslant \tau(E', E)$. Сравнивая последнее неравенство с неравенством (1), получаем, что $t = \tau(E', E)$ и, следовательно, E с топологией $\tau(E', E)$ — борнологическое пространство.

Установим теперь связь между совершенной полнотой (B_r — полнотой) бочечного пространства E, борнологичностью всякого почти замкнутого в E' (всюду плотного почти замкнутого в E'_σ) подпространства M с топологией $\tau(M, E/M^0)$ и полурефлексивностью пространства M_t.

Теорема 4. *Для того чтобы каждое почти замкнутое подпространство $M \subset E'$ (E — бочечное пространство) было борнологическим в топологии Макки $\tau(M, E/M^0)$, необходимо и достаточно, чтобы пространство E было совершенно полным и M_t — полурефлексивным.*

Докажем *необходимость*. Наделим E/M^0 натуральной топологией $\nu(E/M^0, M)$. Так как пространство E бочечно, то E/M^0 бочечно (лемма 3) и $(E/M^0)' = M$ (теорема 2). Так как M борнологично в топологии Макки $\tau(M, E/M^0)$, то M_t полурефлексивно и E/M^0 полно (лемма 4). Следовательно, E совершенно полно (теорема 3).

Докажем *достаточность*. Так как E совершенно полно, то M замкнуто в E'_σ, топология $\nu(E/M^0, M)$ совпадает с фактор-топологией пространства E/M^0 и, следовательно, E/M^0 — полное бочечное пространство в натуральной топологии (так как совершенно полное пространство наследственно полно и фактор-пространство бочечного пространства по замкнутому подпространству бочечно в фактор-топологии). Так как M_t полурефлексивно, то из леммы 4 следует, что M борнологично в топологии Макки $\tau(M, E/M^0)$.

Заменив в формулировке и доказательстве теоремы 4 слова «совершенно полное», «почти замкнутое» словами «B_r-полное», «всюду плотное почти замкнутое», получим необходимое и достаточное условие борнологичности всюду плотных почти замкнутых подпространств в E'_σ.

Доказанные теоремы о совершенной полноте бочечных пространств можно усилить при дополнительном предположении, что E — пространство Шварца. (Напомним несколько определений. Пусть E — векторное пространство и $M, N \subset E$. Множество M будем называть предкомпактным относительно N и писать $M < N$, если M содержится в линейной оболочке множества N и для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует конечное множество $K_\varepsilon \subset M$ такое, что $M \subset (K_\varepsilon + \varepsilon \cdot N)$. Отделимое ЛВП E называется пространством Шварца, если в E для каждой окрестности нуля u существует окрестность нуля v, предкомпактная относительно u).

Теорема 5. *Для того чтобы пространство Шварца E было полным, необходимо и достаточно, чтобы в E' совпадали топология t и топология Макки $\tau(E', E)$.*

Докажем *необходимость*. Так как E — полное пространство Шварца, то в E каждое ограниченное множество относительно компактно. Следовательно, E полурефлексивно. Поэтому достаточно показать, что $t = \beta(E', E)$. Так же, как в лемме 4, можно доказать, что $\beta \leqslant t$. Докажем обратное неравенство. Пусть u — произвольная окрестность нуля в E и v — окрестность нуля в E, предкомпактная относительно u. Следовательно, $u^0 < v^0$ [1, с. 244]. Очевидно, что справедливы следующие неравенства:

$$\sigma(E', E)|_{u^0} \leqslant t|_{u^0} \leqslant t_{v^0}|_{u^0}, \tag{3}$$

где t_{v^0} — топология пространства E'_{v^0}.

Пусть ω — открытое множество в топологии $t_{v^0}|_{u^0}$; пусть $x \in \omega$. Тогда существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $\{(x + \varepsilon v^0) \cap u^0\} \subset \omega$. Окрестность нуля v выбрана так, что $v < u$. Это означает, что существует конечное множество $K = \{x_i\}_{i=1}^n$ такое, что $v \subset \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i +$

$+\frac{\varepsilon}{3}u\}$. Пусть $x' \in (x+\frac{\varepsilon}{3}K^0) \cap u^0$. Тогда $x' = x + x''$, где $x'' \in \in \frac{\varepsilon}{3}K^0$. Пусть $s \in v$. Следовательно, существует $x_j \in \{x_i\}_{i=1}^n$ такой, что $s = x_j + z\ (z \in \frac{\varepsilon}{3}u)$. Проведем следующую оценку:

$$|\langle s,\ x'-x\rangle| = |\langle x_j + z,\ x'-x\rangle| \leqslant |\langle x_j,\ x'-x\rangle| + \\ + |\langle z,\ x\rangle| + |\langle z,\ x'\rangle| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Следовательно, $(x - x') \in \varepsilon v^0$ и $x' \in x + \varepsilon v^0$. Таким образом доказано, что

$$\{(x+\frac{\varepsilon}{3}K^0) \cap u^0\} \subset \{(x+\varepsilon v^0) \cap u^0\}.$$

Так как K^0 — окрестность нуля в слабой топологии $\sigma(E', E)$, то последнее включение означает, что ω — открытое множество в топологии $\sigma(E', E)|_{u^0}$. Следовательно, $t_{v^0}|_{u^0} \leqslant \sigma(E', E)|_{u^0}$. Сравнивая последнее неравенство с неравенством (3), получаем

$$\sigma(E', E)|_{u^0} = t|_{u^0} = t_{v^0}|_{u^0}.$$

Из этого, в частности, следует, что поляра u^0 окрестности нуля u из E компактна в топологии t. Из полноты E и предкомпактности его ограниченных подмножеств (так как E — пространство Шварца) следует, что $\beta(E', E)$ — сильнейшая из локально выпуклых топологий в E', обладающих этим свойством [1, с. 155]. Следовательно, $t = \beta(E', E) = \tau(E', E)$.

Докажем *достаточность*. Пусть E — пространство Шварца и в E' совпадают топология t и топология Макки $\tau(E', E)$. Пусть f — почти непрерывный линейный функционал на E', т. е. f непрерывен в топологии $\sigma(E', E)$ на поляре u^0 для каждой окрестности нуля u из E. Так как u^0 — компактное в E'_σ множество, то f ограничен на u^0 и, следовательно, непрерывен на E'_{u^0}. Так как $E'_t = \varinjlim E'_{u^0}$ относительно отображений тождественного вложения, то f непрерывен на E'_t. Следовательно, f непрерывен в топологии Макки $\tau(E', E)$, а значит, и в топологии $\sigma(E', E)$. Следовательно, пространство E полно [2, теорема 3.8].

Следствие 1. *Если E — полное пространство Шварца, то $E'_\beta\ (=E'_\tau)$ — борнологическое пространство.*

Так как E'_{u^0} банахово, то E'_t — борнологическое пространство как индуктивный предел банаховых пространств. Поскольку E — полное пространство Шварца, то $t = \beta(E', E) = \tau(E', E)$.

Следствие 2. *Для того чтобы бочечное пространство Шварца E было полным, необходимо и достаточно, чтобы пространство E'_τ было борнологическим.*

Необходимость доказана следствием 1. Достаточность вытекает из того, что топология бочечного пространства E совпадает с топологией $\beta(E, E')$ и того, что сильное сопряженное к борнологическому пространству полно [4, с. 188].

Лемма 5. *Пусть E — пространство Шварца и M — всюду плотное почти замкнутое подпространство в E'_σ. Тогда E, наделенное натуральной топологией $\nu(E, M)$,— пространство Шварца.*

Доказательство. Пространство E с топологией $\nu(E, M)$ будем обозначать через E_M. Пусть u — окрестность нуля в E_M. Тогда u — окрестность нуля в E с исходной топологией. Поэтому в E существует окрестность нуля v в исходной топологии такая, что $v < u$ и, следовательно, $u^0 < v^0$ [1, с. 244]. Так как u — окрестность нуля в E_M, то $u^0 \subset M$. Следовательно, $u^0 (v^0 \cap M)$, а $(v^0 \cap M)^0 < u$ [5, лемма 3]. Но $(v^0 \cap M)^0$ — окрестность нуля в E_M. Поэтому E_M — пространство Шварца.

Так как фактор-пространство пространства Шварца по замкнутому подпространству с фактор-топологией является пространством Шварца, то лемма 5 допускает очевидное обобщение (свойство замкнутости класса пространств Шварца относительно перехода к натуральной топологии).

Лемма 6. *Пусть E — пространство Шварца и M — почти замкнутое подпространство в E'. Тогда E/M^0, наделенное натуральной топологией $\nu(E/M^0, M)$,— пространство Шварца.*

Теорема 6. *Пространство Шварца E совершенно полно тогда и только тогда, когда в каждом почти замкнутом подпространстве $M \subset E'$ совпадают топология Макки $\tau(M, E/M^0)$ и топология t.*

Докажем *необходимость*. Так как E — совершенно полное пространство, то почти замкнутое подпространство $M \subset E'$ замкнуто в E'_σ, топология $\nu(E/M^0, M)$ совпадает с фактор-топологией пространства E/M^0, $(E/M^0)' = M$ (E/M^0 взято с фактор-топологией) и E/M^0 полно в фактор-топологии. Так как E — пространство Шварца, то E/M^0 — пространство Шварца в фактор-топологии. Теперь из теоремы 5 следует, что в M совпадают топология t и топология $\tau(M, E/M^0)$.

Докажем *достаточность*. Пусть E — пространство Шварца, M — почти замкнутое подпространство в E'_σ. Тогда E/M^0 — пространство Шварца в топологии $\nu(E/M^0, M)$ (лемма 6). Так как топология $\nu(E/M^0, M)$ согласуется с двойственностью между E/M^0 и M и в M совпадают топология t и топология $\tau(M, E/M^0)$, то E/M^0 полно в топологии $\nu(E/M^0, M)$ (теорема 5). Теперь из критерия совершенной полноты (теорема 3) следует, что E — совершенно полное пространство.

В заключение докажем критерий совершенной полноты для бочечных пространств Шварца, который является усилением в частном случае теоремы 4.

Теорема 7. *Для того чтобы бочечное пространство Шварца E было совершенно полным, необходимо и достаточно, чтобы каждое почти замкнутое подпространство M в E' было борнологическим в топологии Макки $\tau(M, E/M^0)$.*

Достаточность сразу следует из теоремы 4.

Докажем *необходимость*. Так как E — совершенно полное

бочечное пространство Шварца, то почти замкнутое подпространство $M \subset E'$ замкнуто в E'_σ, E/M^0 — полное бочечное пространство Шварца в фактор-топологии и $(E/M^0)' = M(E/M^0$ взято с фактор-топологией). Следовательно, M борнологично в топологии $\tau(M, E/M^0)$ (следствие 2 после теоремы 5).

Заметим, что если в формулировках и доказательствах теорем 4, 6, 7 заменить слова «совершенно полное», «почти замкнутое в E», «критерий совершенной полноты» словами «B_r-полное», «всюду плотное почти замкнутое в E'_σ», «критерий B_r-полноты», то мы получим аналогичные результаты для B_r-полных пространств.

Список литературы: 1. *Робертсон А., Робертсон В.* Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1967. — 257 с. 2. *Птак В.* О полных топологических линейных пространствах. — Чехословац. мат. журн., 1953, 3 (78), с. 301 — 364. 3. *Valdivia M.* B_r — Complete Spaces which are not B-complete. — Math. Z., 1984, 185, p. 253 — 259. 4. *Шефер X.* Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1971. — 359 с. 5. *Райков Д. А.* О вполне непрерывности сопряженного оператора. — Докл. АН СССР, 1958, 119, 3, с. 446 — 449.

Поступила в редколлегию 14.01.85.